

상태변수 구속조건을 갖는 자장시스템의 형상최적화

김창욱<sup>0</sup>, 최명준, 이세희, \*\*박일한  
 송실대학교 전기공학과, \*\*성균관대학교 전기전자컴퓨터공학부

Shape Optimization of Magnetic Systems  
 with state variable Constraints

Chang-wook Kim<sup>0</sup>, Myung-jun Choi, Se-hee Lee, \*\*Il-han Park  
 Dept. of Electrical Eng. Soongsil Univ., \*\*Dept. of Electrical Eng. Sungkyunkwan Univ.

**Abstract** - This paper presents the shape optimization algorithm of magnetic systems with state variable constraints using the Finite Element Method. In the design of electromagnetic systems, sometimes we have to consider the state variables when they seriously affect the performance of electromagnetic systems. So we should define that some design problems have the constraints of the state variables. We use the gradient of constraints and sensitivity analysis in order to consider the state variable constraints and obtain an optimal shape. The optimal shape must be satisfied constraints, so we take the gradient projection method as a kind of optimization methods. In this paper a numerical example with state variable constraints uses the superconducting electromagnet that has another constraint which the volume of the superconductor should be constant.

수 구속조건식을 구성하였다.

2. 정자계에서의 민감도 해석

정자계를 표현하는 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times A) = J_s \tag{1}$$

여기서  $\mu$ 는 투자율,  $A$ 는 자기벡터포텐셜,  $J_s$ 는 구동 전류원을 나타낸다. 위 식(1)의 미분방정식을 해석대상 모델에 적용하여 유한요소법을 이용하여 해석하면 다음과 같은 자기벡터포텐셜에 대한 행렬식이 얻어진다.

$$[K][A] = [Q] \tag{2}$$

여기서  $[K]$ 는 기하학적인 정보, 물질의 특성 등이 결합된 시스템 행렬이고,  $[A]$ 는 각 절점에서의 상태변수 즉, 미지의 자기벡터포텐셜을 나타내며,  $[Q]$ 는 구동벡터이다. 위 식(2)의 행렬식에 경계조건을 적용하여 계산하면 자장시스템의 특성을 나타내는 자기벡터포텐셜이 구해진다. 전기기기 설계를 위한 목적함수는 설계변수와 시스템 상태변수의 함수로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F = F[p, A(p)] \tag{3}$$

여기서  $[p]$ 는 설계변수벡터 ( $np \times 1$ )이며,  $[A(p)]$ 는 설계변수가 변함에 따라 바뀌므로 설계변수의 함수이다. 설계변수로는 형상설계변수와 물성설계변수가 있으나 본 연구는 전기기기 형상 최적설계에 관한 것이므로 설계변수를 형상설계변수로 선택하였다. 일반적인 최적설계문제는 위 식(3)의 목적함수가 제약조건하에서 최대값 또는 최소값을 갖는 설계변수를 찾는 것이 목적이며 민감도를 이용한 최적설계에서 민감도의 최종식은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d[p]^T} &= \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + \frac{\partial F}{\partial [A]^T} \frac{\partial [A]}{\partial [p]^T} \\ &= \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]^T} \{ [Q] - [K][\tilde{A}] \} \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $[\tilde{A}]$ 는 식(2), 즉 행렬식에서 계산한 해이며,  $[\lambda]$ 는 보조변수식(adjoint variable equation)의 해로서 다음의 보조변수식 계산으로 구해진다.

$$[K]^T[\lambda] = \frac{\partial F}{\partial [A]} \tag{5}$$

1. 서 론

본 논문에서는 전기기기의 특성을 결정하는 중요한 요인 중의 하나인 상태변수에 대한 구속조건을 갖는 자장시스템의 형상최적화 방법을 연구하였다. 전기기기 설계시에 상태변수 구속조건을 갖는 경우 기존의 설계방법은 상태변수 구속조건을 고려하지 않은 상태에서 설계를 행한 후 구속조건의 만족여부를 판단하는 비체계적인 설계방법들이 사용되어지고 있다. 특히 확률통계적방법(Stochastic approach)의 경우 상태변수 구속조건을 고려하기는 거의 불가능하며 엄청난 계산시간이 요구되므로 본 논문에서는 상태변수 구속조건을 고려한 자장시스템의 형상 최적설계를 체계적으로 다룰 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 자장시스템 해석은 유한요소법을 사용하였으며, 초기 설계로부터 최적 형상을 찾기 위하여 해석적 미분법 중 이산적접근에 의한 민감도해석을 이용하였다[1][4]. 형상 최적설계 과정에서 상태변수 구속조건을 고려하기 위한 체계적인 방법으로서 구속조건의 경사도(gradient)정보를 이용한 경사도 투사법(gradient projection method)을 최적설계알고리즘으로 선택하였다[3]. 위에서 제시한 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 초전도 전자석 모델에 적용하였다. 초전도체의 형상을 설계하는 경우 임계전류밀도와 임계자속밀도 및 임계온도 등을 고려하여야 한다[2].

본 논문에서는 위의 제약조건들 중에서 상태변수에 의하여 결정되는 임계자속밀도를 구속조건으로 설정하여 초전도체의 부피를 일정하게 유지하면서 초전도 전자석의 자기저장에너지를 최대화 하는 형상을 설계하였다. 임계자속밀도는 초기 형상에서 유한요소법을 통하여 얻어지는 자속밀도중에서 최대자속밀도로 선택하여 상태변

### 3. 상태변수 구속조건을 고려한 형상 최적설계

본 논문에서는 상태변수 구속조건을 갖는 자장시스템의 형상 최적설계 알고리즘을 연구하였다. 일반적으로 전기기기 형상 최적설계에서 최적설계 알고리즘으로서 각 반복계산에서의 최대경사(steepest descent)를 탐색방향(search direction)으로 선택하는 경우 위 식(4)에서 계산한 민감도를 이용하여 아래의 식으로서 나타낼 수 있다.

$$p^{i+1} = p^i + \alpha S \quad (6)$$

여기서  $p^i$ 는  $i$ 번째 계산에서의 설계변수이며,  $\alpha$ 는 이동거리이고,  $S$ 는 설계변수의 탐색방향을 나타내며,  $p^{i+1}$ 은 개선된 설계변수이다. 본 연구에서 최적설계를 식(6)과 같이 진행하는 경우, 즉 설계변수의 탐색방향으로 최대경사를 선택하면 상태변수 구속조건을 고려하지 않은 설계를 찾게 되므로 본 논문에서는 최적설계 알고리즘의 하나인 구속조건을 고려한 최대경사도 투사법(gradient projection method)을 사용하여 설계변수의 탐색방향을 결정하였다[3]. 상태변수 구속조건은 상태변수가 설계변수의 변화에 의하여 바뀌므로 설계변수에 관한 함수로서 표현할 수 있다.

$$g_1(A(p)) = C_1 \quad (7)$$

여기서  $g_1$ 은 상태변수 구속조건을 나타내는 함수이며,  $C_1$ 은 임의의 상수이다. 위 식(7)로부터 상태변수 구속조건을 나타내는 함수는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\frac{\partial g_1}{\partial [p]^T} = \frac{\partial g_1}{\partial [A]^T} \frac{\partial [A]}{\partial [p]^T} \quad (8)$$

위 식(8)의 우변의 첫 항을 계산하기 위하여 다음의 보조변수식을 도입하였다.

$$[K]^T[\lambda] = \frac{\partial g_1}{\partial [A]} \quad (9)$$

위 식(9)의 보조변수식을 계산한 후, 식(8)에 대입하여 정리하면 상태변수 구속조건을 나타내는 함수는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\frac{\partial g_1}{\partial [p]^T} = [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]^T} ([Q] - [K][\tilde{A}]) \quad (10)$$

따라서 위 식(10)을 계산하면 상태변수 구속조건을 나타내는 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} = \left( \frac{\partial g_1}{\partial p_1}, \frac{\partial g_1}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial g_1}{\partial p_{np}} \right)^T \quad (11)$$

위에서 언급한 상태변수 구속조건을 고려한 최적설계를 찾기 위한 최대경사도 투사법은 다음 식으로 표현된다.

$$p^{i+1} = p^i + \alpha(P \nabla F) \quad (12)$$

여기서  $\nabla F$ 는 최대경사, 즉 위 식(4)의 민감도를 나타내며,  $P = I - N(N^T N)^{-1} N^T$ 으로서 최대경사를 구속조건면으로 투사시키는 투사행렬(projection matrix)

이며,  $N = \nabla g_1 = \frac{\partial g_1}{\partial p}$ , 즉 식(11)과 같은 상태변수 구속조건을 나타내는 함수도 벡터이다. 그러나 본 논문에서 고려한 구속조건을 나타내는 함수는 비선형이므로 경사도 투사법을 이용하여 설계변수의 탐색방향을 결정하더라도 그림 1에서와 같이 설계변수의 탐색방향은 구속조건면에서 벗어나게 된다. 따라서 구속조건을 오차값이 매우 적어질 때까지 설계변수를 보정(restoration move)해주는 과정이 필요하므로 다음 식을 이용하여 설계변수를 보정하였다.

$$\bar{p}^{i+1} = p^{i+1} - N(N^T N)^{-1} g(p^{i+1}) \quad (13)$$

여기서  $p^{i+1}$ 은 위 식(12)의 설계변수이며,  $\bar{p}^{i+1}$ 은 보정해준 후의 설계변수이다.

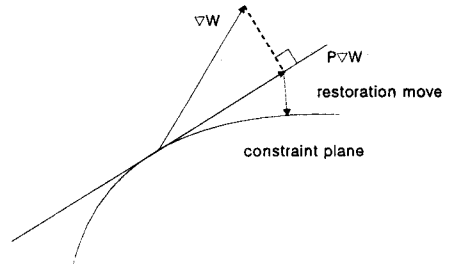


그림 1 설계변수 이동방향

### 4. 수치해석 사례

위에서 제안한 상태변수 구속조건을 고려한 자장시스템의 최적설계 알고리즘을 검증하기 위하여 수치적인 해석모델로 그림 2와 같은 초전도 전자석을 선택하였다. 초전도체의 경우 도체 내에서의 자속밀도와 전류밀도는 임계자속밀도, 임계전류밀도에 의하여 제약된다. 위의 제약조건은 도체의 초전도성을 유지시키기 위하여 반드시 고려해야 하는 제약조건이 된다. 본 논문에서는 상태변수에 의해 정의되는 임계자속밀도를 구속조건으로 설정하였으며 임계자속밀도값은 초기설계에서 유한요소해석을 통하여 얻어지는 자속밀도 중 최대자속밀도값으로 선택하였다. 본 모델에서는 최대자속밀도가 존재하는 요소에서는 자속밀도  $y$ 성분의 영향이 지배적이므로 임계자속밀도를  $y$ 성분의 자속밀도값으로 선택하였다. 그런데 자속밀도는 상태변수의 변화에 따라 바뀌므로 임계자속밀도 구속조건은 상태변수 구속조건으로 표현되며 따라서 상태변수 구속조건을 나타내는 식은 식(6)과 같으며  $C_1$ 은 최대자속밀도의  $y$  성분값으로 대치하여 표현할 수 있다. 본 연구에서는 초전도 전자석의 체적을 일정하게 유지하면서 상태변수 구속조건을 고려하여 초전도 전자석 내부의 자기저장에너지가 최대한 형상을 찾고자 하였다. 설계의 기준이 되는 목적함수는 초전도 전자석 내부의 자기저장에너지로 설정하여 다음 식으로 표현하였다.

$$W = \frac{1}{2} \int A \cdot J d\Omega \quad (14)$$

해석대상모델을 유한요소법으로 이산화하여 해석하면 각 요소에서의 자기벡터포텐셜과 전류밀도를 구할 수 있으므로 위 식(14)는 다음 식으로 표현된다.

$$W = W(p, A(p)) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n [A^e]^T \cdot [J^e] \quad (15)$$

여기서  $W$ 는 초전도 전자석의 자기저장에너지이며,  $p$

는 형상 설계변수벡터이며,  $[A^e]^T$ 는 각 요소에서의 자기벡터포텐셜이며,  $[J^e]$ 는 각 요소에서의 전류밀도이고,  $n$ 은 목적함수영역의 총 요소수이다. 위 식(15), 즉 목적함수의 민감도는 다음의 식으로 표현된다.

$$\frac{dW}{d[\lambda]}^T = \frac{\partial W}{\partial [\lambda]}^T + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [\lambda]}^T \{ [Q] - [K][\bar{A}] \} \quad (16)$$

여기서  $[\lambda]$ 를 구하기 위한 보조변수식은 다음과 같다.

$$[K]^T[\lambda] = \frac{\partial W}{\partial [A]} \quad (17)$$

위 식(17)의 우변의 미분항을 계산하면 식(2)의 우변의 구동벡터의  $\frac{1}{2}$  배가 되므로, 즉  $\frac{1}{2}[Q]$ 가 되므로 보조변수식의 해  $[\lambda]$ 는 아래의 식으로 표현된다.

$$[\lambda] = \frac{1}{2}[A] \quad (18)$$

위 식(18)의  $[\lambda]$ 를 식(16)에 대입하여 정리하면 최종적인 초전도 전자석 내부의 자기저장에너지에 대한 민감도식이 얻어지며 식(16)의 계산을 통하여 민감도를 찾을 수 있다. 본 논문에서 사용한 최적설계법인 경사도 투사법은 상태변수 구속조건과 초전도 전자석의 체적일정 구속조건과 경사도와 위 식(16)에서 계산한 민감도를 식(12)에 대입하여 이용하였다.

그림 2는 본 논문에서 적용한 초전도 전자석의 초기 형상과 설계변수로 지정된 절점을 보이고 있다. 본 모델은 (x,y) 좌표평면상에서 해석하였으며 초전도 전자석에는 직류전류를 인가하였다. 설계변수 지정을 위해 초전도 전자석의 좌측표면을 등간격으로 나누어 10개의 절점을 생성하여 각 절점의 x 좌표값을 설계변수로 지정하였다. 또한 설계변수로 지정된 모든 절점은 x 방향으로만 이동할 수 있도록 하였다. 그림 3은 각 구속조건을 고려하여 형상 최적설계과정을 통하여 최종적으로 찾아진 초전도 전자석의 형상을 보이고 있다. 각 설계과정에서 초전도 전자석의 부피는 일정하게 유지되었으며 최종형상에서도 초기형상과 일치하였다. 최종형상에서 상태변수 구속조건은 약간의 오차가 존재하였다. 그림 4는 각 반복설계과정에서 계산한 초전도 전자석의 자기저장에너지의 변화를 보이고 있다. 여기서 각 설계과정에서 자기저장에너지의 변화를 고찰해보면 최종적으로 자기저장에너지가 수렴하고 있음을 알 수 있었다. 특히 자기저장에너지의 변화를 보면 6번의 최적설계과정만으로도 최종결과값에 거의 수렴하였음을 알 수 있었다.

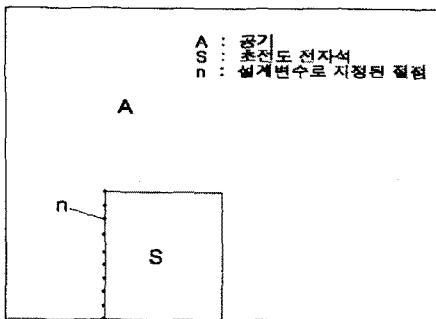


그림 2 초전도 전자석의 초기형상

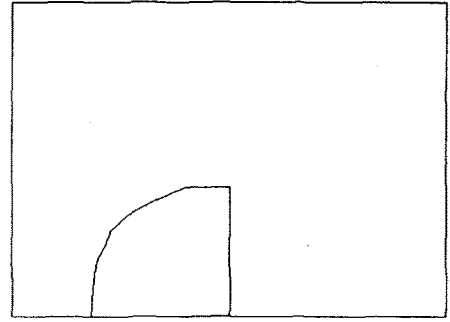


그림 3 최적설계 후의 최종형상

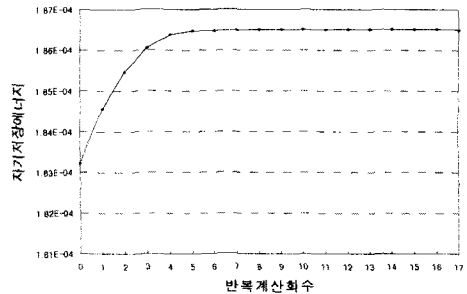


그림 4 설계에 따른 자기저장에너지의 변화

## 5. 결 론

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 상태변수 구속조건을 갖는 형상 최적설계를 초전도 전자석에 적용하였다. 상태변수 구속조건을 고려한 최적설계를 하기 위하여 최적설계 알고리즘으로는 구속조건을 경사도를 이용한 경사도 투사법을 선택하였다. 상태변수 구속조건을 고려한 각 계산과정에서 상태변수 구속조건을 만족스러운 결과를 얻었으며 초전도 전자석의 자기저장에너지는 증가함을 알 수 있었다. 초전도 전자석의 자기저장에너지를 초기형상과 최종형상에서 비교하여보면 최적설계된 초전도 전자석내의 자기저장에너지가 초기형상에 비하여 상당히 증가했음을 알 수 있었다. 최종형상에서 상태변수 구속조건을 만족하는 약간의 오차가 있었으므로 이에 대한 개선이 필요할 것으로 사료된다.

본 논문에서 제안한 상태변수 구속조건을 갖는 자장시스템의 최적설계 알고리즘을 각 설계과정에서 계산한 최대자속밀도와 자기저장에너지의 변화를 통하여 검증할 수 있었다.

## [참 고 문 헌]

- [1] S. Gitosusastro, J.L. Coulomb and J.C. Sabonnadiere, "Performance Derivative Calculations and Optimization Process," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.25, No.4, pp. 2834-2839, July 1989
- [2] T. Ando, T. Isono and H. Tsuji, "Development of a 10 kA-class High-Tc Superconducting Bus Bar," *IEEE Trans. on Applied Superconductivity*, Vol.5, No.2, pp.817-820, June 1995
- [3] R.T. Haftka, Z. Gürdal, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1992
- [4] 박일환, "전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석," 서울대 공학박사 학위논문, 1990