

간접경계적분법에 의한 3차원 운동도체 문제에서의 속도항 모델링

김 동 훈, 박 진 수
LG전자(주) 리빙시스템연구소

Modeling of Velocity Term in 3D Moving Conductor Problems by the Indirect BIEM

Dong-Hun Kim, Jin-Soo Park
LG Electronics Inc. Living System Lab.

Abstract - This paper presents the indirect boundary integral equation method(BIEM) to analyze 3D moving conductor problem. Instead of an artificial upwind algorithm, the proposed method uses a fundamental Green's function which is a particular solution of diffusion equation. Therefore, this method yields a stable and accurate solution regardless of the Peclet number. The indirect BIEM is compared with 3D upwind FEM for a numerical model which has analytic solutions.

1. 서 론

운동하는 도체를 포함한 전자장 지배방정식에 대한 갤러킨 유한요소법(Galerkin FEM)에 의한 해석은 속도항(velocity term)에 해당하는 일계미분항의 계수가 커짐에 따라 해의 가진동(spurious oscillation)을 경험하게 된다. 유한요소법에서는 1970년대 후반부터 수치해에서 발생하는 가진동을 억제하기 위하여 유동 및 열 해석 시 사용되는 upwind법을 도입하여 운동체를 포함한 2차원 전자기장 해석을 수행해 왔다. 최근에는 이러한 풍상유한요소법(upwind finite element method)을 이용하여 운동하는 도체를 포함한 3차원 전자기장 해석을 시도한 몇몇 논문들이 발표되었다[1-3]. 그러나 이 논문들에서 사용한 3차원 upwind법은 속도항에 대한 기존의 1차원적 upwind 모델링의 단순한 공간의 확장 개념에 불과하여 3차원에서 전자기장의 확산(diffusion) 현상을 수치해에 제대로 반영하기 어렵다.

이에 본 논문에서는 간접경계적분법(indirect boundary integral equation method)을 도입하여 운동체를 포함한 3차원 전자기장 해석을 시도하였다. 간접경계적분법은 운동체를 포함한 전자장 지배방정식의 해를 fundamental Green's function으로 사용하여 도체의 운동에 기인한 3차원 공간상의 자기 확산현상을 직접 수치해에 반영하므로 풍상유한요소법에 비해 더욱 안정되고 정밀한 해를 얻을 수 있다. 또한 최소개수의 미지변수와 Green's func-

tion의 특이성질(singular property)로부터 3차원 전자기장 해석 시 요구되는 계산기의 계산용량 및 계산시간을 풍상유한요소법에 비해 크게 단축 할 수 있다.

본 논문에서는 해석해를 가지고 있는 수치모델에 대하여 풍상유한요소법과 간접경계적분법에 의해 3차원 자계세기를 계산하고 비교하였다.

2. 본 론

도체가 고정좌표계의 x 방향으로 등속운동을 하고 있다는 가정 하에 도체에 유기되는 와전류에 대한 미분형태의 전자장 지배방정식을 자계세기 H에 대해 기술하면

$$\nabla^2 \mathbf{H} - 2\omega \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$2\omega = \mu\sigma v_x \quad \mu : \text{자기투자율}$$

$$\sigma : \text{전기전도율} \quad v_x : \text{x 방향 속도}$$

와 같다.

2.1 3D Upwind법

식 (1)에 대해 1차원에서 길이가 h인 등간격요소망의 i 번째 정점에 해당하는 엄밀해와 요소해 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

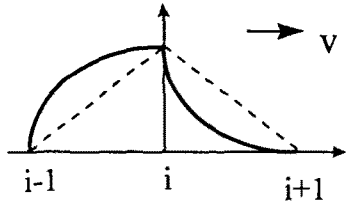
$$(e^{2P})^i \approx \left(\frac{1+P}{1-P}\right)^i \quad \text{if } P < 1 \quad (2)$$

여기서 P는 요소 Peclet수로 요소길이 h와 ω 의 적으로 정의된다. 식 (2)에서 알 수 있듯이 요소 Peclet수가 1보다 크게 되면 요소해에 가진동이 포함된다. 이를 억제하기 위해 사용되는 upwind법으로는 그림 1의 (a)와 같이 편향된 가중함수를 사용하거나 (b)에서처럼 Gauss 적분 시 적분점을 이동하는 방법이 사용되어 왔다.

최근에는 속도항에 대한 이러한 1차원적 upwind 모델링 기법들의 단순한 공간의 확장개념을 도입하여 유한요소법에 의한 3차원 전자기장해석이 시도되고 있다. 3D upwind법으로는 국부좌표계 (ξ, η, ζ)

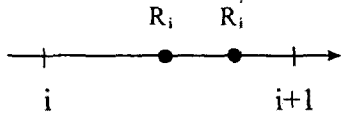
에서 가중함수 W_i 를

$$W_i(\xi, \eta, \zeta) = [N_i(\xi) \pm \alpha F(\xi)][N_i(\eta)][N_i(\zeta)] \quad (3)$$



$$W_i = N_i \pm \alpha F(x)$$

(a) Biased weighting function



$$R_i - R_i' = \alpha \frac{h}{2}$$

(b) Displaced sampling point

그림 1. 1D upwind 기법 ($\alpha = \coth(P/2) - 2/P$)

와 같이 정의하여 사용하거나 그림 2에서와 같이 직육면체요소에서 Gauss 적분법을 운동방향으로 이동하여 3차원 유한요소해석을 수행하고 있다.

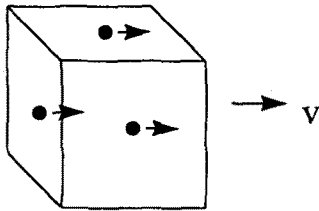


그림 2. 3D upwind 기법 중 직육면체요소에서 적분점의 이동

그러나 위에서 설명한 3D upwind법으로는 운동 도체에 의한 전자기장의 확산현상을 3차원 공간에서 정확히 구현할 수 없다. 또한 풍상유한요소법에서는 일반적으로 요소 Peclet수가 증가함에 따라 발생하는 수치 에러의 증가를 방지하고 skin effect의 고려를 위해서 비교적 질이 우수한 3차원 요소들을 필요로 한다. 이는 유한요소법에 의한 3차원 전자기장 해석 시 계산기의 막대한 계산시간 및 용량을 요구하게 된다.

2.2 간접경계적분법

간접경계적분법에 의한 운동하는 도체를 포함한 3차원 전자기 계에 대한 지배적분방정식은 등자기 표면전류밀도 K_m , 등자기표면전하밀도 σ_m 와 이들에 대한 Green's function들로 표현된다.

$$\frac{1}{2} K_m(\mathbf{r}_o) + \int_s \mathbf{n} \times [K_m(\mathbf{r}_s) \times \nabla G^+] ds - \int_s \sigma_m(\mathbf{r}_s) \times [\mathbf{n} \times \nabla G^-] ds = -\mathbf{n} \times H_a(\mathbf{r}_o) \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \sigma_m(\mathbf{r}_o) + \int_s \sigma_m(\mathbf{r}_s) [\mathbf{n} \cdot \nabla G^-] ds + \frac{\mu}{\mu_o} \int_s \mathbf{n} \cdot [K_m(\mathbf{r}_s) \times \nabla G^+] ds = -\mathbf{n} \cdot H_a(\mathbf{r}_o) \quad (5)$$

여기서,

H_a : 외부인가 자계세기 \mathbf{n} : 경계면의 법선벡터

$$G^- = 1/4\pi |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|$$

식 (4)와 (5)에서 위 첨자 \pm 는 각각 도체 내·외부를 아래 첨자 o 와 s 는 관측점 및 소오스점을 의미한다.

2.2.1 Fundamental Green's function

간접경계적분방정식에서 사용되는 Green's function G^+ 는 3차원에서 식 (1)의 확산방정식을 만족하는 해로써

$$G^+ = \exp[\omega x - \omega r]/4\pi r \quad (6)$$

$$x = x_o - x_s, \quad r = |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|$$

와 같은 형태를 갖는다[4]. 그림 3에서는 원점에 위치한 unit source가 50 m/s로 x 방향으로 운동하고 있을 때 식 (6)의 함수 G^+ 에 대한 등포텐셜을 x-y 평면에 도시하였다.

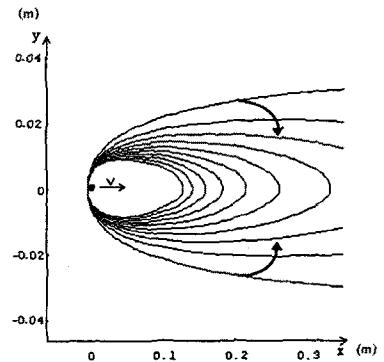


그림 3. Green's function G^+ 의 등포텐셜

2.2.2 요소행렬식

일반적으로 경계요소법에 의해 생성된 요소행렬식은 구성성분이 모두 0이 아닌 값을 갖지만 운동체를 포함한 경우에는 요소행렬식에 0인 성분을 많이 포함된다. 이는 그림 3에서와 같은 Green's function G^+ 의 특이성질에서 기인한다. 삼각형 일정요소를 사용하여 식 (4)와 (5)를 이산화하면 다음의 요소행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{A}_{ij} & \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{B}_{ij} & \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{C}_{ij} \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_{ij} & \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_{ij} & \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{C}_{ij} \\ \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_{ij} & \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{b}_{ij} & \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c}_{ij} \end{bmatrix} \text{ if } i \neq j \quad (7)$$

여기서,

$$\mathbf{a}_{ij} = \int_s [\mathbf{u}_j \times \nabla G^+]_{ij} ds_j, \quad \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{n}_i \times \mathbf{a}_{ij}$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \int_s [\mathbf{v}_j \times \nabla G^+_{ij}] ds_j, \quad \mathbf{B}_{ij} = \mathbf{n}_i \times \mathbf{b}_{ij}$$

$$\mathbf{c}_{ij} = \int_s [\nabla G^-_{ij}] ds_j, \quad \mathbf{C}_{ij} = \mathbf{n}_i \times \mathbf{c}_{ij}$$

여기서 \mathbf{u} , \mathbf{v} 는 각 경계요소에서의 두 개의 기준 벡터에 해당한다. 도체의 운동속도가 증가함에 따라 행렬식 (7)의 첫 번째와 두 번째 열에 있는 구성성분들은 대부분 0이 된다.

3. Indirect BIEM과 upwind FEM의 비교

그림 4와 같이 전도율 3.82×10^7 moh/m, 두께 10 mm의 도체판 위를 운동하는 직사각형 코일을 해석 모델로 설정하여 간접경계적분법과 풍상유한요소법에 의한 자계세기에 대한 3차원 해석을 수행하였다. 진행방향을 긴 변으로 설정하여 100 mm×80 mm 크기의 코일에는 30 kA에 해당하는 직류전류가 흐르고 코일은 도체판으로부터 20 mm의 높이에서 -x 방향으로 30 m/s의 속도로 운동하고 있다고 가정한다. 설정된 해석모델은 자계세기에 대한 해석해를 가지고 있다[5].

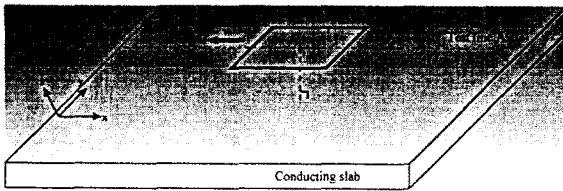


그림 4. 해석모델

그림 5와 6에서는 그림 4에 표시된 Test line 상에서 도체판에 유기된 와전류에 의해 발생하는 자계세기를 각각 두 수치기법을 통해 계산하여 해석해와 비교하였다. 특히 코일 주변에서 풍상유한요소법에 의한 해석결과는 수치에러를 많이 포함하고 있는 반면 간접경계적분법에 의한 해석결과는 비교적 해석해에 근접함을 볼 수 있다.

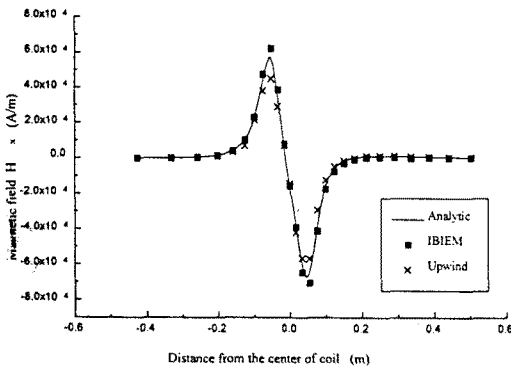


그림 5. Test line에서 자계세기의 x 성분 비교

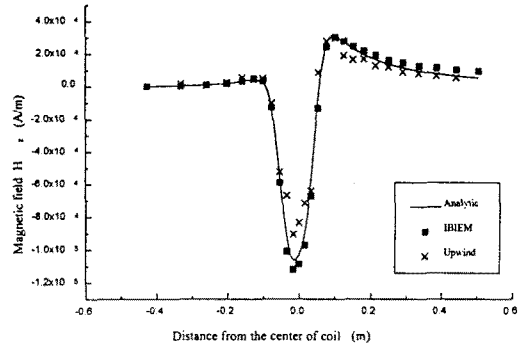


그림 6. Test line에서 자계세기의 z 성분 비교

표 1은 그림 5와 6의 자계세기를 계산할 때 두 수치기법에서 사용한 조건 및 계산결과를 비교하였다. 계산에 HP C160 work station이 사용되었다.

표 1. 두 수치기법의 비교

	Indirect BIEM	Upwind FEM
요 소	삼각형	직육면체
미 지 수	K_m, σ_m	A, ϕ
요 소 개 수	1,136	5,292
절 점 개 수	618	6,300
미 지 수 개 수	3,408	20,580
Peclet 수 범위	24~310	7.2~216
계 산 용 량	60 M bite	150 M bite
계 산 시 간	95 min.	120 min.
에 러 범 위	~9.6 %	~28 %

4. 결 론

운동하는 도체를 포함한 3차원 전자장 해석에 있어서 본 논문에서 제안한 방법은 기존의 3차원 풍상유한요소법에 비해 정밀한 해를 얻을 수 있고 더불어 계산에 필요한 계산기의 용량 및 계산시간 등도 단축할 수 있다.

(참 고 문 헌)

- [1]D. Rodger, et al., A formulation for 3D moving conductor eddy current problems, *IEEE. Trans. Magn.*, Vol. 25, No. 5, pp. 4147-4149, 1989.
- [2]Hong Song and Nathan Ida, Modelling of velocity terms in 3D eddy current problems, *IEEE. Trans. Magn.*, Vol. 28, No. 2, pp. 1178-1181, 1992.
- [3]H. T. Yu, et al., Upwind-linear edge elements for 3D moving conductor eddy current problems, *IEEE. Trans. Magn.*, Vol. 32, No. 3, pp. 760-763, 1996.
- [4]Jean-Luc Boulnois, et al., The fundamental solution in the theory of eddy currents and forces for conductor in steady motion, *J. Appl. Phys.*, Vol. 49, pp. 2241-2249, April 1987.
- [5]John R. Reitz, et al., Force on a rectangular coil moving above a conducting slab, *J. Appl. Phys.*, Vol. 43, No. 4, pp. 1547-1553, 1972.