

푸리에 변환과 주파수 민감도를 이용한
시변자장 시스템에서의 과도상태 해석

최명준¹, 김창현, **박일한
송실대학교 전기공학과, **성균관대학교 전기전자컴퓨터공학부

Transient Analysis of Magnetodynamic Systems
Using Fourier Transform and Frequency Sensitivity

Myung-jun Choi¹, Chang-hyun Kim, Il-han Park
Dept. of Electrical Eng. Soongsil Univ, **Dept. of Electrical Eng. Sungkyunkwan Univ

Abstract - This paper presents a new efficient method for transient analysis in magnetodynamic systems of linear eddy current problems. This method employs the Fourier transform and the high-order frequency sensitivity of harmonic finite element method. By taking into account the time-constant of magnetodynamic system, the Fourier integral of continuous frequency is converted into the Fourier series of discrete frequency. And with the results of Fourier series expansion of converted input wave form, the responses of each sinusoids is superposed to give the total response of the magnetodynamic systems. But, if the frequency band of input wave form is broad, it takes long computational time since all responses for each sinusoids must be calculated. Therefore, the high-order frequency sensitivity method is employed to estimate the response variation to frequency. The proposed algorithm is applied to an induction heating system to validate its numerical efficiency.

1. 서 론

시변자장 시스템의 과도현상은 일반적으로 전원이 시스템에 연결된 후 짧은 시간동안 나타나고, 때때로 이런 현상들은 시스템의 성능에 중요한 영향을 끼친다. 시변자장 시스템의 과도특성을 해석하기 위해서는, 지금까지는 시간의 영역에서 주로 시간차분 유한요소법을 사용해 왔다. 그러나 시간차분 유한요소법은 각 시간마다 한번의 해석을 함으로써 많은 계산시간이 요구되어 진다. 그래서 본 논문에서는 과도상태 해석에 대한 효율적인 계산 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘은 유한시간동안의 임의적인 입력 형태를 가진 모든 과도상태 해석에 적용될 수 있다. 이 방법은 푸리에 적분을 푸리에 급수로의 전환이 요구되며 고차주파수 민감도와 테일러 급수가 사용된다. 푸리에 적분을 푸리에 급수로의 전환은 비주기적인 입력을 주기적인 입력으로 변화시키는 것이고, 이것은 시스템 응답의 시정수를 고려하여 허용될 수 있는 오차범위를 가짐으로써 가능하다. 비주기적인 입력의 푸리에 변환은 주파수의 연속적인 함수이지만, 위치럼 얻어진 주기적인 입력은 푸리에 급수 전개를 사용함으로써 정현적인 이산주파수들로 표현된다. 시스템의 전체응답은 각 정현적인 주파수에서의 응답을 중첩함으로써 구할 수 있다. 그러나 푸리에 변환이 넓은 폭의 많은 주파수를 생성한다면 모든 주파수들에 대한 응답은 많은 계산 시간을 요구한다. 그러므로 본 논문에서는 주파수 변화에 대한 상태변수의 효율적인 변화를 측정하기 위하여 주파수 민감도를 사용한다[2]. 즉, 주파수 민감도의 사용은 각기 다른 주파수에서의 모든 응답을 직접적으로 구하지 않기 때문에 많은 계산시간을 줄일 수 있다.

그러므로, 본 논문에서는 우선 푸리에 급수 전환, 주파수 민감도와 테일러 급수를 이용한 시변자장 시스템의 효율적인 해석 알고리즘을 설명하고, 다음으로는 이 해석 알고리즘을 유도가열 모델에 적용하여, 각기 다른 두 종류의 입력형태에 따른 시간차분 유한요소법으로 이용하여 얻어진 결과와 비교 검토하였다.

2. 시변자장 시스템에 대한 푸리에 변환

입력파형이 시간의 주기적인 함수가 아니라면, 그것의 푸리에 변환은 무한구간에 대한 푸리에 적분을 요구하며, 다음과 같은 식(1)과 같이 주파수의 연속적인 함수로 표현된다.

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V'(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1)$$

여기서 $V'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-j\omega t} dt$ 이다.

따라서 이 변환은 무한구간 적분 및 연속적인 주파수 함수의 표현과 같은 수치적인 문제들을 초래한다. 그러나 시변자장 시스템을 전기적인 등가회로로 표현하면, 저항과 인덕턴스의 직렬회로로 된다. 물론 시변자장 시스템의 저항과 인덕턴스는 구동 주파수에 따라 변화한다. RL회로의 시정수는 $\tau = L/R$ 이고, 과도상태는 시정수가 어느정도 지나면 사라지게 되고, 시스템의 응답은 정상상태에 도달하게 된다. 시정수의 이와 같은 특성에 근거하여, 식 (1)의 푸리에 적분은 다음식 (2)와 같이 이산적인 주파수에 의한 푸리에 급수로 변환된다.

$$V'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\pi t/L} \quad (2)$$

여기서 $C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L V(t) e^{-jn\pi t/L} dt$ 이며 $2L$ 은 함수의 주기이다.

임의적인 함수 $f(t)$ 가 모든 $t > 0$ 일 때 그림 1(a)처럼 나타나는 입력파형을 고려해보자. 여기서 우리가 관심을 갖는 부분은 시스템의 초기상태를 나타내는 초기시간 T_1 이므로, 지속되는 뒷부분은 고려하지 않아도 될 것이다. 그러므로 그림 1(a)과 같은 입력파형을 그림 1(b)와 같이 변환을 하면, $0 < t < T_1$ 의 응답은 T_2 의 시간을 길게 취하므로써, 다른 입력들에 대하여 거의 영향을 받지 않기 때문에 그림 1(a)의 $0 < t < T_1$ 응답과 같을 것이다. 위와 같은 이론적인 배경에 근거하여 비주기적인 입력파형을 주기적인 입력파형으로 변환을 할 수 있다. 이와 같이 비주기적인 입력파형을 주기적인 입력파형으로의 변환은 무한구간에서의 푸리에 적분을 유한구간에 대한 푸리에 급수로 대체될 수 있으며, 푸리에 급수 전개를 이용하면 이산적인 주파수들의 함수로 표현이 되므로 시스템의 초기상태를 해석 할 수 있다.

4. 수치 해석 적용 사례

제안된 알고리즘의 효율을 검증하기 위하여 유도가열 모델에 적용하였다. 수치 모델은 그림 2와 같고 구리판 위에 여자코일이 전압원으로 구동된다. 첫 번째의 전압원은 그림 3(a)처럼 초기시간 0부터 정현적인 형태이며, 이 입력의 실효값은 380[V]이고, 주파수는 1000[Hz]이다. 1000[Hz]에서의 등가회로로 구한 시정수는 5.735×10^{-3} [sec]이며 구리판의 표피효과는 대략 2[mm]이다. 시정수는 입력전압과 출력전류를 비교함으로써 계산하였다. 그림 3(a)의 입력전압은 푸리에 적분을 이산적인 주파수의 푸리에 급수로 변화시키기 위하여 그림 3(b)처럼 변환하였다. 그리고 T_1 은 시정수의 대략 2배 정도이다. 주파수 민감도는 넓은 주파수 폭과 수치 오차를 줄이기 위하여 주파수 영역에서 5군데에서 3차까지의 민감도 정보를 계산하였다. 그림 4에서, 시간차분 유한요소 방법에 의한 출력전류와 본 논문에서 제안한 방법으로 구해진 출력전류를 비교하였다. 그림 4에서 알 수 있듯이 출력전류가 거의 일치한다는 것을 알 수 있다. 그리고 두 출력전류 사이의 차이는 다음 식(9)와 같이 구하였다.

$$E_{error} = \left[\int_0^{T_1} (i_t - i_h)^2 dt / \int_0^{T_1} i_t^2 dt \right] \times 100\% \quad (9)$$

여기서 i_t 는 시간차분 유한요소법으로 구해진 전류이고, i_h 는 제안된 방법으로 구해진 전류이다. 오차는 T_2 의 주기와 푸리에 급수에 의해 취해진 최고고조파에서 평가하였다. $T_2 = T_1, T_2 = 2T_1, T_2 = 3T_1$ 의 세 가지 경우에서, 모든 오차는 0.5% 이내였다. $T_2 = T_1$ 의 경우에 있어서, 최고주파수 선택에 대한 오차의 경향은 그림 5처럼 나타나며, 65고조파까지 사용하면 오차가 0.5%내에서 수렴한다는 것을 알 수 있다. $T_2 = 2T_1, T_2 = 3T_1$ 의 경우에도 또한 0.5%내에서 오차가 수렴한다. 그러므로 본 논문에서는 65고조파까지 사용하였다.

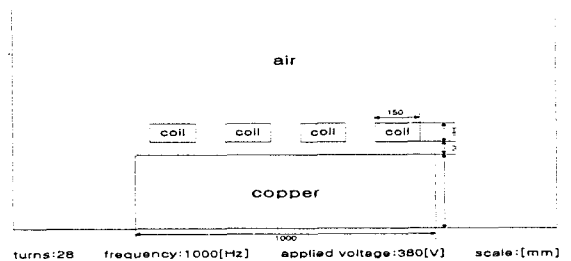
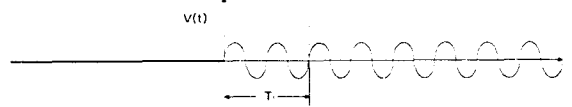
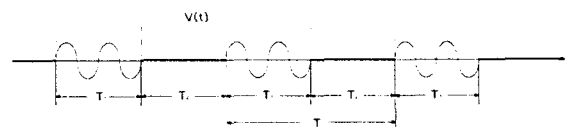


그림 2 유도가열 모델

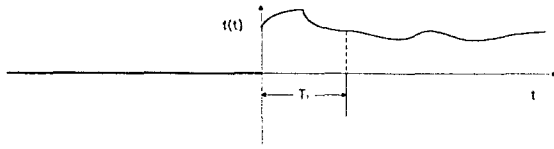


(a) 초기의 입력파형

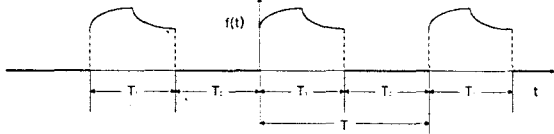


(b) 변형된 입력파형

그림 3 정현적인 입력파형 ($t > 0$)



(a) 초기의 입력파형



(b) 변형된 입력파형

그림 1 입력파형의 변환 ($f(t), t > 0$)

3. 시간고조 유한요소법과 주파수 민감도

정현적인 전원에 의해 구동되는 시변자장 시스템에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 A + j\omega \sigma A = J_s \quad (3)$$

여기서 A는 복소수 자기벡터포텐셜이고, μ 는 투자율, σ 는 전도율, J_s 는 전류전류, ω 는 각속도이다. 전압원에 의해 구동되는 시스템 방정식을 구성하기 위해서는 다음과 같은 회로방정식이 필요하다.

$$V = j\omega \lambda + (R_c + j\omega L_c) I \quad (4)$$

여기서 V는 전압전압, λ 는 쇄교자속, R_c 는 코일저항, L_c 는 외부회로의 인덕턴스이다. 식(3)과(4)를 이용하여 전압원으로 구동되는 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$[K][X] = [Q] \quad (5)$$

여기서 [Q]는 전압원벡터, [X]는 자기벡터포텐셜과 전류벡터이고, 시스템행렬[K]는 다음과 같이 표현된다.

$$[K] = [S] + \omega [T] \quad (6)$$

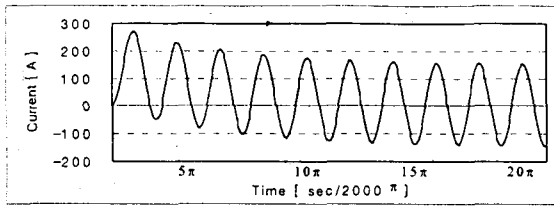
여기서 [S]는 [K]의 실수항들이고, [T]는 [K]의 허수항들이다. 주파수에 대한 상태변수의 변화율인 주파수 민감도는 식(5)의 시스템행렬을 조작함으로써 얻어질 수 있다. n차의 민감도는 다음과 같이 유도된다.

$$[K] \left[\frac{d^n X}{d\omega^n} \right] = -n [T] \left[\frac{d^{n-1} X}{d\omega^{n-1}} \right] \quad (7)$$

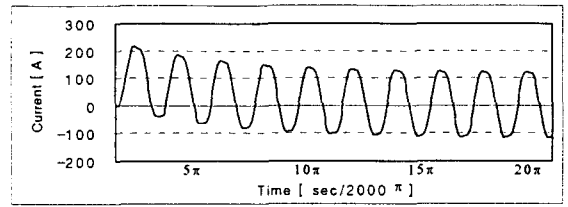
여기서 n 차의 민감도는 (n-1)차의 민감도를 구동항으로 함으로써 순차적으로 계산된다. 위 과정에서 구해진 주파수 민감도 정보는 다른 주파수에 대한 상태변수값을 알기 위하여 다음과 같은 테일러 급수에 적용된다.

$$X(\omega) \approx \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{d^k X(\omega_0)}{d\omega^k} (\omega - \omega_0)^k \quad (8)$$

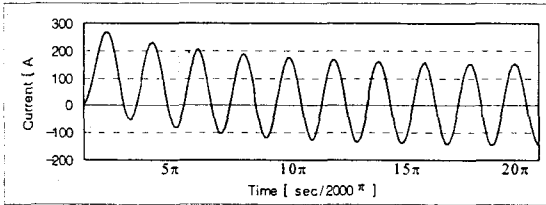
식(8)의 오차를 줄이기 위하여 $(\omega - \omega_0)$ 가 너무 크지 않아야 하며 적절한 m을 선택해야 한다.



(a) 시간차분 유한요소법

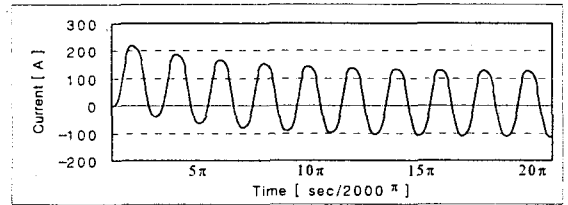


(a) 시간차분 유한요소법



(b) 제안된 방법

그림 4 두 방법에 의한 출력전류의 비교



(b) 제안된 방법

그림 7 두 방법에 의한 출력전류의 비교

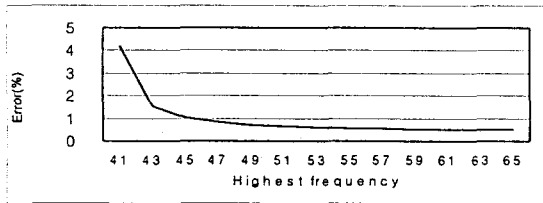
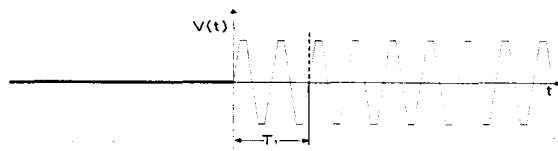


그림 5 최고주파수에 따른 오차 수렴

두 번째 전압원은 그림 6(a)처럼 초기시간 0부터 사다리꼴 형태이다. 이것도 첫 번째 경우와 같은 이유로 그림 6(b)으로 변환된다. 다른 조건들도 첫 번째 경우와 비슷하기 때문에, 두 방법으로부터의 출력전류들은 그림 7(a),(b)처럼 비교된다. 이 출력전류들이 거의 비슷하며 오차범위는 1%이내이다. 오차의 이 약간의 증가는 사다리꼴 형태의 입력전원은 정현적인 입력전원보다 더 큰 고조파 항들을 포함한다는 사실로부터 초래된다고 생각된다.

두 해석방법에 의한 계산시간의 비교는 표.1에 비교하였으며, 시간차분 유한요소법은 400회의 시스템 행렬을 풀었지만 제안된 방법은 단지 20회만 풀었다. (5군데에서 3차 주파수 민감도)



(a) 초기의 입력파형



(b) 변환된 입력파형

그림 6 사다리꼴 입력파형 ($t > 0$)

표.1 계산시간의 비교

방법	시스템 행렬을 풀 횟수
시간차분 유한요소법	400
제안된 방법	20

5. 결 론

본 논문에서는 선형 시변자장 시스템의 과도상태 해석에 대한 효율적인 알고리즘이 제안되었다. 이 알고리즘에서는, 연속적인 주파수의 푸리에 적분을 시스템의 시정수를 고려한 푸리에 급수로 변환하였다. 즉, 비주기적인 입력형태를 허용할 수 있는 여러 범위를 갖는 주기적인 형태로 변환을 하고, 변환된 형태의 주기는 과도상태가 거의 0으로 감소할 정도로 충분히 길게 취하였다. 푸리에 급수를 전개함에 따라서, 각각의 정현적인 주파수에서의 응답들은 시스템의 전체적인 응답을 얻기 위해서 중첩되었다.

알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 유도가열 시스템에 적용하였으며, 제안된 방법에 의한 결과를 시간차분 유한요소법을 이용하여 얻은 결과와 비교하였다. 정현적인 입력형태와 비정현적인 입력에 대하여, 본 논문에서 제안한 방법과 시간차분 유한요소법에 의해 얻은 결과가 거의 일치한다는 것을 알 수 있으며, 제안된 방법이 시간차분 유한요소법에 비하여 계산시간이 상당히 감소된다는 것을 알 수 있다.

(참 고 문 헌)

- [1] P.Petin, J.L. Coulomb and Ph. Conraux, "High Derivatives for Fast Sensitivity Analysis Linear Electromagnetic," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.33, No.2, 1997, pp1149-1154
- [2] Seaway Jan and Zoltan Cendes, "Fast Transient Simulation of Eddy Current Interconnection Effects Using Reduced Order Model," *Proceedings of COMPUMAG/RIO*, PH3-6, 1997
- [3] Il-han Park and Myung-jun Choi, "High-Order Frequency Sensitivity for Nonsinusoidal Steady state Analysis in Linear Magnetodynamic," *Proceedings of COMPUMAG/RIO*, PH3-5, 1997