

슬라이딩 모드를 이용한 강인한  $H_\infty$  제어기의 설계

박승규, 안호균, 김민찬  
 창원대학교 전기공학과

A Study on the  $H_\infty$  Robust Controller of Sliding Mode

Seung-Kyu Park, Ho-Kyun An, Min-Chan Kim  
 Department of Electrical Engineering, Changwon National University

**Abstract** - A new  $H_\infty$  robust controller is proposed by using Sliding Mode Control(SMC). The combination of  $H_\infty$  with SMC is achieved by proposing a novel sliding surface which has a virtual state. This sliding surface has the nominal dynamics of an original system controlled by  $H_\infty$  controller. Its design is based on the augmented system whose dynamics have one higher order than that of the original system. The reaching phase is removed by setting an initial virtual state which makes the initial sliding function equal to zero.

본 논문에서는 그림 1과 같은 불확실한 파라미터를 갖는 단일 입출력(SISO) 시스템을 고려하기로 한다.

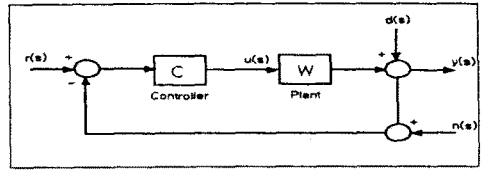


그림 1. 단일 입출력 폐환 제어 시스템

플랜트의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$W = A^{-1}B \tag{1}$$

여기서

$$A = (a_n + \Delta a_n)S^n + (a_{n-1} + \Delta a_{n-1})S^{n-1} + \dots + (a_0 + \Delta a_0)$$

$$B = (b_n + \Delta b_n)S^n + (b_{n-1} + \Delta b_{n-1})S^{n-1} + \dots + (b_0 + \Delta b_0)$$

본 논문에서 시스템의 파라미터가 불확실하므로 제어기 설계의 목적은 다음과 같은 공칭 시스템의 혼합감도함수의 평가함수를 최소화하는 것이다.

$$J_{H_\infty} = \|W_1 S\|_\infty^2 + \|W_2 T\|_\infty^2 \tag{2}$$

여기에서 S는 공칭 시스템의 감도함수, T는 공칭 시스템의 부감도 함수를 나타내며  $W_1, W_2$ 는 하중함수이다.

3. 공칭 시스템의  $H_\infty$  제어기 설계

본논문에서의 제어목적은 파라미터 불확실성이 존재하더라도 공칭 시스템의 혼합감도함수의 평가함수를 최소화할 수 있는 제어입력을 구하는 것으로 공칭 시스템에 대한  $H_\infty$  제어기의 설계를 필요로 한다. 설계과정은 다음과 같다.

공칭 시스템 플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$W_0 = A_0^{-1}B_0 \tag{3}$$

평가함수를 최소화시키기 위해서 다음과 같은 Youla 제어기를 사용한다.

$$C_0 = \frac{N_0 + A_0 K}{M_0 - B_0 K} \tag{4}$$

위의 제어기를 사용하는 경우 감도함수와 부감도 함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$S_0 = (M_0 - B_0 K)A_0 \tag{5}$$

$$T_0 = (N_0 + A_0 K)B_0 \tag{6}$$

2. 문제 설정

제어계통의 강인성 특성향상에 적합한  $H_\infty$  제어 시스템은 다음과 같은 두 가지 방법으로 발전해왔다.

- 상태공간 접근 방식[1][2]
- 다항식 접근 방식[3][4][5]

상태공간 접근방식  $H_\infty$  제어에서는 외란과 그것의 출력에 대한 영향이 상태공간 행렬에 의해서 명확하게 표현되어 있어야 하며 많은 결과들이 이 방법을 이용하여 발전해왔다. 반면에 다항식 접근방식은 Grimbale에 의해서 발전되어 왔으며 감도 함수 (Sensitivity function)와 부감도 함수 (Complementary sensitivity function)의  $H_\infty$  놈의 합을 최소화하는 것이며 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 대한 연구가 필요하다. 본연구에서는 SMC(Silding Mode Control)를 이용하여 파라미터 불확실성에 대한 강인성 문제를 다루고자 한다. SMC는 강인 제어 방법으로써 많은 좋은 결과들과 응용분야가 있지만 근본적인 두가지 문제점이 있다. reaching phase 와 input chattering 이 그것이며 SMC 시스템의 상태 궤적은 실제 시스템 보다 낮은 차수의 슬라이딩 모드 동특성에 의해서 결정되기 때문에 다른 제어기 설계방법들을 사용함에 있어서 융통성이 없다. 이러한 단점들을 극복해야만  $H_\infty$  제어기와 같이 사용할 수 있으므로 본 논문에서는 가상 상태를 제안하여 슬라이딩 평면을 구성함으로써 슬라이딩 모드가 공칭 시스템의 동특성을 가지도록 함으로써 다양한 형태의 제어기와 SMC의 결합형태의 제어기 구성이 가능하도록 한다. 결과적으로 파라미터가 불확실한 시스템에 대해  $H_\infty$  제어기를 구성함에 있어서 SMC의 강인특성을 갖게된다. 또한 초기의 가상 상태를 초기 스위칭 함수를 0으로 만들 수 있도록 선택함으로써 reaching phase도 제거된다.

여기서,  $M_0, N_0$ 는 다음식을 만족한다.

$$A_0 M_0 + B_0 N_0 = N_0 \quad (7)$$

$M_0$ 와  $N_0$ 는 각각  $M_0$ 과  $N_0$ 의 분자다항식이고  $N_0$ 는 분모다항식이다.

### 정리 1.

비용 함수 식(2)를 최소화시키는 제어기 파라미터  $K$ 는 다음과 같다.

$$K = \frac{G_1 Y_{fd}}{B_d Y_{fn} Y_c W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}} \quad (8)$$

여기서  $M_0, N_0$ 는 다음 diophantine 방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} & A_d W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d} F_1 + W_{1d} W_{2d} Y_{fn}^* Y_{cn}^* G_1 s^{-s_1} \\ &= B_d (BA)^* Y_{fd}^* (W_{2d} W_{2d}^* N_{0d} W_{1n} W_{1n}^* A M_{0n} + \\ & W_{1d} W_{1d}^* M_{0d} W_{2n} W_{2n}^* B N_{0n}) s^{-s_1} \end{aligned} \quad (9)$$

증명 : 참고문헌 [6] 참조

## 4. 새로운 슬라이딩 평면을 사용한 $H_\infty$ 강인제어

이제까지 시변 슬라이딩 평면을 포함하여 다양한 형태의 슬라이딩 평면이 제안되어 왔지만 이들은 제어대상 시스템의 차수보다 낮은 차수를 가지기 때문에 SMC가  $H_\infty$  제어를 비롯한 다른 제어기법들과 같이 사용되지 못하였다[10]. 이러한 제한성을 극복하기 위해서 본 논문에서는 새로운 개념의 SMC(Sliding Mode Control)를 제안하여  $H_\infty$  제어와 결합하고자 한다. 제안된 SMC는 reaching phase도 없앨 수가 있다.

식(1)은 다음과 같은 controllable canonical form으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c z(t) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 - \Delta a_1 & -a_2 - \Delta a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C_c = [\beta_1 + \Delta \beta_1 \quad \beta_2 + \Delta \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n + \Delta \beta_n]$ 이다.

새로운 슬라이딩 평면을 구성하기 위해서 본 논문에서는 다음과 같은 실제 시스템에 대한 공칭 시스템을 고려한다.

$$\dot{z}_0(t) = \overline{A}_c z_0(t) + \overline{B}_c u_0(t) \quad (11)$$

여기서,

$$\overline{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

이고  $u_0(t)$ 는  $H_\infty$  제어제어입력이다. 3장에서 설명한 방법에 의한 공칭 시스템에 대한  $H_\infty$  제어기는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$C_0 = \frac{\overline{\beta}_r S^r + \overline{\beta}_{r-1} S^{r-1} + \cdots + \overline{\beta}_0}{\alpha_r S^r + \alpha_{r-1} S^{r-1} + \cdots + \alpha_0} \quad (12)$$

식 (12)을 controllable canonical form으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_0(t) &= \overline{A}_0 p_0(t) + \overline{B}_0 e(t) \\ u_0(t) &= \overline{C}_0 p_0(t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_r \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_0 = [\overline{\beta}_1 \quad \overline{\beta}_2 \quad \cdots \quad \overline{\beta}_r]$$

따라서  $u_0(t)$ 는 다음과 같다.

$$u_0(t) = \overline{\beta}_1 p_1(t) + \overline{\beta}_2 p_2(t) + \cdots + \overline{\beta}_r p_r(t) \quad (14)$$

그리고  $\dot{u}_0(t)$ 는 다음식을 만족한다.

$$\dot{u}_0(t) = \overline{\beta}_1 p_2(t) + \overline{\beta}_2 p_3(t) + \cdots + \overline{\beta}_r p_r'(t) \quad (15)$$

여기서,

$$p_r'(t) = -\overline{\alpha}_1 p_1(t) - \overline{\alpha}_2 p_2(t) - \cdots - \overline{\alpha}_r p_r(t)$$

이므로 식(15)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{u}_0(t) &= -\overline{\beta}_r \overline{\alpha}_1 p_1(t) + (\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_r \overline{\alpha}_2) p_2(t) + \cdots \\ &+ (\overline{\beta}_{r-1} - \overline{\beta}_r \overline{\alpha}_r) p_r(t) \end{aligned}$$

본 논문에서 제안된 새로운 가상 상태  $z_{ov}$ 는  $z_{on}$ 의 미분이며 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{z}_{ov}(t) = -\alpha_n z_{ov}(t) \cdots -\alpha_2 z_{ov}(t) - \alpha_1 z_{ov}(t) + \dot{u}_0(t) \quad (16)$$

위의 식으로부터, 가상 상태  $z_v$ 는 실제 상태  $z$ 를 가진 공칭 상태  $z_0$ 를 대체함으로써 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{z}_v(t) = \alpha_n z_v(t) \cdots -\alpha_2 z_3(t) - \alpha_1 z_2(t) + \dot{u}_0(t) \quad (17)$$

가상상태를 포함하는 augmented system은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c u(t) \\ \dot{z}_v(t) &= \alpha_n z_v(t) \cdots + \alpha_2 z_3(t) + \alpha_1 z_2(t) + \dot{u}_0(t) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $u(t)$ 는 슬라이딩 모드를 보장하는 가변입력이다.

다.

위의 augmented system에 대해서 새로운 슬라이딩 평면은 다음과 같이 정의된다.

$$s(z, z_v) = z_v(t) + \alpha_n z_n(t) \cdots + \alpha_1 z_1(t) - u_o(t) = 0 \quad (19)$$

그리고 reaching phase 는 가상상태의 초기값을 다음과 같이 결정함으로써 쉽게 얻을 수가 있다.

$$z_v(t_0) = -\alpha_n z_n(t_0) \cdots - \alpha_1 z_1(t_0) - u_o(t_0) \quad (20)$$

여기서 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

### 정리 2.

새로운 슬라이딩 모드 평면  $s(z, z_v)$  는 공칭 제어 입력에 의해서 제어되는 식(11)의 공칭 시스템과 같은 동특성을 갖는다.

(증명)  $z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}, z_{ov}$  가 슬라이딩 평면상에 있다고 가정하자.

$$\text{여기서 } \begin{bmatrix} z_{o1} \\ z_{o2} \\ \vdots \\ z_{on} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ \vdots \\ x_{on} \end{bmatrix}$$

그러면 다음과 같은 방정식이 만족된다.

$$z_{ov}(t) + \alpha_n z_{on}(t) \cdots + \alpha_1 z_{o1}(t) - u_o(t) = 0 \quad (21)$$

여기서 다음과 같이 상태를 정의하면

$$z_{o2} = \dot{z}_{o1}, \dots, z_{on} = \dot{z}_{o(n-1)} \quad (22)$$

식 (21) 을 미분함으로써 다음식이 얻어진다.

$$\dot{z}_{ov}(t) - \alpha_n \dot{z}_{on}(t) \cdots - \alpha_1 \dot{z}_{o2}(t) - \dot{u}_o(t) = 0 \quad (23)$$

식(18)에 의해서  $z_{ov}$  는 다음과 같은 동특성을 갖는다.

$$\dot{z}_{ov}(t) = \alpha_n z_{ov}(t) \cdots + \alpha_2 z_{o2}(t) + \alpha_1 z_{o2}(t) + \dot{u}_o(t) \quad (24)$$

식 (23)와 식 (24)에서 다음식이 성립됨을 알 수 있다.

$$z_{ov} = \dot{z}_{on}$$

그리고 식 (21)로부터 다음식을 만족한다.

$$\dot{z}_{on}(t) = \alpha_n z_{on}(t) \cdots + \alpha_2 z_{o2}(t) + \alpha_1 z_{o1}(t) + u_o(t) \quad (25)$$

식 (22),(25)는 공칭 시스템의 canonical form이며  $x_o(t) = P^{-1} z_o(t)$  변환에 의해서 식(11)로 변환된다. 그러므로 새로운 슬라이딩 모드 평면은 공칭 시스템과 같은 동특성을 갖는다.

증명 끝.

정리 2과 SMC 이론으로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

### 정리 3

SMC 입력  $u(t)$ 가 슬라이딩 평면  $s(z, z_v)$  위에 시스템

의 상태들이 있도록 하면 상태들  $z(t)$ 는  $H_\infty$  제어입력  $u_o(t)$ 에 의해서 제어되는 공칭 시스템의 궤적을 따라가게 된다.

(증명) 정리 2과 SMC 이론으로부터 명백하다.

본 논문에서는 제시된 공칭 제어 입력  $u_o(t)$ 를  $H_\infty$  제어입력을 사용함으로써 파라미터 불확실성을 가지는 계통에 대하여 건설한  $H_\infty$ 제어기 구성하였지만 이입력은 어떠한 제어형태이든지 사용할 수 있으므로 SMC가 다양한 형태의 제어기와 같이 사용되어지는 것을 가능하게 해준다.

## 5. 결론

새로운 슬라이딩 평면의 설계방법을 제안함으로써 슬라이딩 평면이  $H_\infty$ 제어기에 의해서 제어되어 공칭 시스템의 동특성을 가질 수 있도록 함으로써 파라미터 불확실성이 존재하는 계통에 대하여 강한  $H_\infty$  제어기로 구성하였다.

## 6. Reference

- [1] D. S. Bernstein, W.M. Haddad, "LQG Control with an  $H_\infty$  Performance Bound : A Riccati Equation Approach." IEEE AC-34, pp.293-305, 1989
- [2] D. Mustafa, "Relation Between Maximum - entropy/ $H_\infty$  Control and Combined  $H_\infty$ /LQG Control." Systems and Control Lett., 12, pp.193 - 203, 1989
- [3] M. J. Grimble, "Robust controller for self - tuning control application", Int.J. Control, 1987
- [4] M. J. Grimble, "Robust controller for self - turning control application Part 2. Self-turning and Robustness", Int.J. Control, pp.117-156, 1987
- [5] M. J. Grimble, "Robust industrial control-optimal design approach for polynomial systems", Prentice-Hall, 1994
- [6] Seung-Kyu Park, Min-Chan Kim, " A study on the  $H_\infty$  Robust Controller of Induction Motors", Proceeding of the Korea Automatic Control Conference, vol.2, pp.1448-1451, 1997
- [7] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J.C. : 'Variable structure control : A survey,' IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1, pp.2-22, 1993
- [8] UTKIN, V. I. 'Sliding modes and their application in variable structure systems' ( Moscow, Mir Publishers, 1978)
- [9] ITKIS, U., 'Control systems of variable structure' (JOHNWILLY & SONS, New York, 1976)
- [10] ROY, R. G., OLGAC, N. 'Robust nonlinear control via moving sliding surfaces - n-th order Case', 1997 CDC, December 1997