

# Fuzzy를 이용한 Rotary Inverted Pendulum의 제어에 관한 연구

최 승규, 고 재호, 유 창완, 임 화영  
광운대학교 제어계측공학과

## A Study on The Control of A Rotary Inverted Pendulum Using Fuzzy

Seung-Gyu Choi, Jae-Ho Ko, Chang-Wan Ryu, Wha-Yeong Yim  
Dept. of Control and Instrumentation Eng. Kwangwoon Univ.

**Abstract** - This paper consider fuzzy control of a single-inverted pendulum attached to the tip end of a rotating arm driven by a direct driven motor. Control objectives stabilization of the pendulum at the upright position and regulation of the arm at an arbitrary specified position. Fuzzy control is an effective method to achieve multiple control objectives in control of nonlinear systems. In this paper, fuzzy logic control is proposed to obtain increased control performance and stability.

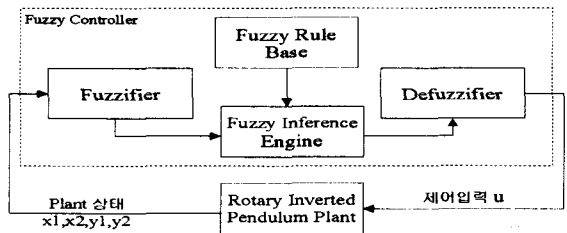
과를 낼 수도 있는 단점을 안고 있다. 그러나 전문가의 지식, 경험을 기반으로 구성된 Fuzzy Set을 기초로 하는 Fuzzy Control은 Inverted Pendulum 과 같은 비선형 시스템을 제어하기 위한 효과적인 방법이다. [5]

### 1. 서 론

Fuzzy 제어시스템은 소속함수와 규칙을 기반으로 비선형성이 강하고 불확실하며 복잡한 시스템을 비교적 쉽게 제어 할 수 있는 장점을 가지고 있다. [5] 도입진자는 제어기 성능평가의 대상으로 많이 사용 되어 왔다. 여러종류의 도입진자중 선형 트랙형 도입진자는 트랙의 길이의 제한이 있으나 본 논문에서는 3차원 강체운동의 비선형 동특성을 가지며 무한한 궤도를 갖는 수평 회전형 도입진자 (Rotary Inverted Pendulum)를 대상으로 하여 Pendulum의 각도와 Arm의 각도를 제어하기 위한 적응퍼지제어기를 설계하였고, Matlab Simulation 과 실제 Plant에 적용하여 성능을 검증하였다.

### 2.1 Fuzzy System

그림 1에서 보는 바와 같이 Real-valued variable 을 Fuzzy Set으로 변환하는 Fuzzifier, Fuzzy Set을 Real-valued variable로 변환하는 Defuzzifier, If-Then 규칙의 집합으로 구성된 Fuzzy Rule Base, 입력의 Fuzzy Set으로부터 출력의 Fuzzy Set으로의 Mapping의 역할을 하는 Fuzzy Inference Engine으로 구성된다. 많은 종류가 있지만 일반적으로 Singleton Fuzzifier, Product Inference Engine, Center Average Defuzzifier등이 주로 사용된다. [1]



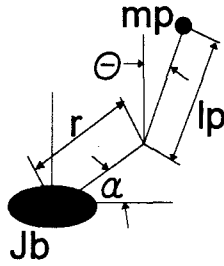
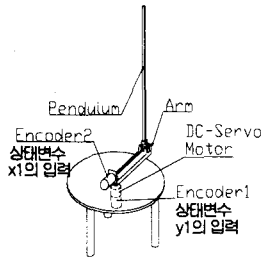
<그림1>수평회전형 도입진자와 Fuzzy System

### 2. 본 론

Pendulum System은 잘 알려진 바와 같이 비선형성이 강하고 게다가 Rotary Inverted의 경우는 Cart And Pole보다도 더 강한 비선형성을 가지고 있다. 고전제어에서는 Process의 비선형적인 요소들을 선형화에 기법에 의해 Modeling하고 선형제어기를 설계하여 제어를 하기 때문에 복잡한 시스템의 경우 수식적 표현의 어려움이 있고 불확실성 및 환경의 변화 등이 있을 경우 전혀 예상치 못한 결

### 2.2 수평회전형 도입진자 Model

수평회전형 도입진자(Rotate Inverted Pendulum)는 <그림2>와 같이 회전하는 Arm의 끝 부분에 도입진자(Pendulum)가 얹어져 있는 형상을 갖고 있다. 수평회전형 도입진자의 제어의 목적은 진자를 도입한 상태로 Arm을 원하는 각도로 위치하게 하는 것이다. 따라서 Rotary Inverted Pendulum은 둘 이상의 제어목적(multiple control objectives)을 가지고 있고 비선형성도 다른 Pendulum보다 큰 model이다.[5] <그림2>의 Rotary Inverted



<그림 2 > Rotating Arm With Inverted Pendulum

<그림 3>도립진자의 간단한 모델화

Pendulum의 모델을 간단히 표현하면 <그림3>과 같다. 여기서 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같다.[4]

$$PE_{pen} = m_p l_p \cos(\theta)$$

$$KE_{pen} = 0.5 m_p [(\dot{r} + \dot{\theta} l_p \cos(\theta))^2 + (\dot{\theta} l_p \sin(\theta))^2]$$

$$KE_{base} = 0.5 J_b \dot{\alpha}^2$$

위의 식들을 이용하여 Lagrangian Formulation을 이용하면 우리는 다음의 식을 유도 할 수 있다.

$$(m_p r^2 + J_b) \ddot{\alpha} + m_p r \dot{\theta} l_p \cos(\theta) - m_p r \dot{\theta}^2 l_p \sin(\theta) = u$$

$$m_p l_p \cos(\theta) \ddot{r} - m_p l_p \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{r} + m_p \dot{\theta} l_p^2 - m_p l_p \sin(\theta) \dot{\theta} = 0$$

위의 식들로부터 상태변수를 정의하고 상태 방정식을 유도하면 다음의 식이 유도된다.[4]

$$A = m_p r l_p \cos(x_1)$$

$$B = m_p r l_p \sin(x_1)$$

$$C = m_p r^2 + J_b$$

$$D = m_p r l_p^2$$

$$E = m_p r l_p g \sin(x_1)$$

라면

$$\dot{x}_1 = \theta$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{A^2 - CD} (AB \dot{x}_1^2 - BC \dot{x}_1 \dot{y}_1 - EC + Au)$$

$$\dot{y}_1 = \alpha$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{CD - A^2} (BD \dot{x}_1^2 - AB \dot{x}_1 \dot{y}_1 - AE + Du)$$

여기서

- $x_1$ : 진자의각도 ( $\theta$  deg ree)
- $x_2$ : 진자의각속도 ( $\dot{\theta}$  deg ree/sec)
- $y_1$ : Arm의각도 ( $\alpha$  deg ree)
- $y_2$ : Arm의각속도 ( $\dot{\alpha}$  deg ree/sec)
- $u$ : 제어입력 (N)
- $r$ : Arm의길이 (0.145m)
- $J_b$ : Arm의관성모멘트 (0.0570Kg $m^2$ )
- $l_p$ : 진자로부터무게중심간거리 (0.305m)
- $m_p$ : 진자의질량 (0.071710Kg)

## 2.3 Fuzzy Controller Design

본 논문에서는 먼저 Fuzzy Controller를 설계한후 Matlab Simulation을 통한 Trial Error로 어느정도 Error를 줄인후 최종적으로 적용 Fuzzy의 여러방법 중 Gradient Descent법을 써서 Error를 줄였다.

### 2.3.1 If Then Rule Base

Fuzzy Control System구성의 첫 단계는 먼저 입

력변수와 출력변수를 정하고 Rule, Membership Function을 만드는 것이 되겠다. 입력변수는 <그림 1>에서처럼 Plant의 상태  $x_1, x_2, y_1, y_2$ 이고 출력변수는 Plant의 제어입력인  $u$ 로 정했다. 정의된 입력변수들은 매 Sampling Time(본 논문에서는 0.0149)마다 Fuzzy 규칙에 따른 출력을 결정하여 제어입력  $u$ 가 만들어진다. If Then Rules는 다음과 같다.

$$\text{If } x_1 \text{ is } A_i', x_2 \text{ is } B_i', y_1 \text{ is } C_i', \text{ and } y_2 \text{ is } D_i' \text{ then } u \text{ is } y'$$

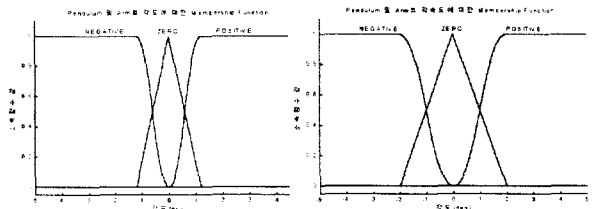
윗 식에서 A, B, C, D,  $y'$ 은 다음 <표1>과 같다.

룰	A	B	C	D	$y'$	룰	A	B	C	D	$y'$
1	P	P	P	P	PL	18	.	N	Z	N	N
2	P	P	P	N	PLL	19	Z	.	P	P	PSSSS
3	P	P	N	P	P	20	Z	.	P	N	Z
4	P	P	N	N	PL	21	Z	.	N	P	Z
5	P	N	P	P	PS	22	Z	.	N	N	NSSSS
6	P	N	P	N	PSSS	23	Z	Z	Z	Z	Z
7	P	N	N	P	PSS	24	P	Z	Z	Z	P
8	P	N	N	N	PSS	25	N	Z	Z	Z	N
9	N	P	P	P	NSS	26	P	Z	P	P	P
10	N	P	P	N	NSS	27	N	Z	N	N	N
11	N	P	N	P	NSSS	28	Z	Z	P	Z	PSS
12	N	P	N	N	NS	29	Z	Z	N	Z	NSS
13	N	N	P	P	NL	30	P	P	Z	Z	PL
14	N	N	P	N	N	31	N	N	Z	Z	NL
15	N	N	N	P	NLL	32	Z	Z	Z	P	NL
16	N	N	N	N	NL	33	Z	Z	Z	N	PL
17	.	P	Z	P	P						

<표1> If-Then Rule Table

### 2.3.2 Membership Function

소속함수인 Membership Function (줄여서 MF)은 If-Part에 대한 각각의 상태변수에 대하여 3개씩 사용하였고 Then-Part에 대하여서는 총 33개를 사용하였다. If-Part와 Then-Part에 대한 MF은 <그림4>와 같다.



진자와 Arm의 각도      진자 Arm의 각속도

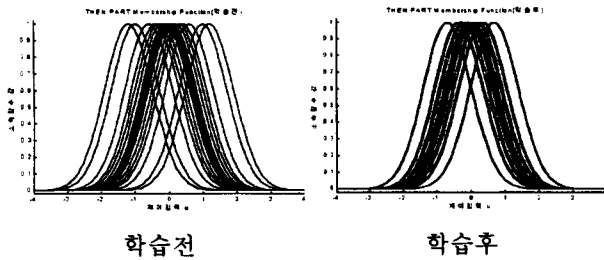
<그림4> If-Part에 대한 Membership Function

Then-part에 대해서 Gradient Descent를 사용하기 위하여 Error Measure는 다음과 같이 정하였다.

$$E = \sum_{k=1}^m |x_1(k) - 0|^2 + \lambda \sum_{k=1}^{m-1} |u(k)|^2 \quad (\text{적당한 } \lambda = 10)$$

여기서 m은 Sampling의 갯수이다. 이식을 출력  $y'$ 에 대하여 편미분 시행 하여 새로운 MF을 얻은 것이 <그림5>의 우측 그림이다.[2] 좌측은 학습전,

우측은 학습후의 Then-Part의 MF이다.



<그림5> Then-Part의 MF

### 2.3.3 Fuzzy Controller

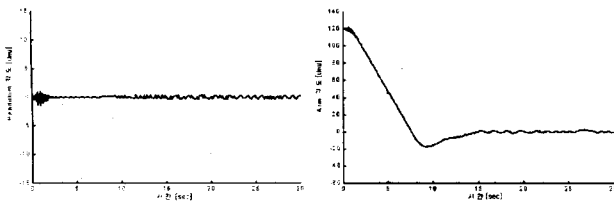
Singleton Fuzzifier, Center Average Defuzzifier, Product Inference Engine을 이용하여 Controller에 대한 출력을 구하면 다음과 같다.[1]

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n y_i' (\prod_{j=1}^m \mu_{A_j}(x_j))}{\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^m \mu_{A_j}(x_j))} \quad (\text{여기서 } n=3\sim4 \text{ } \langle \text{표1} \rangle \text{ 참조})$$

### 2.4 Simulation 결과

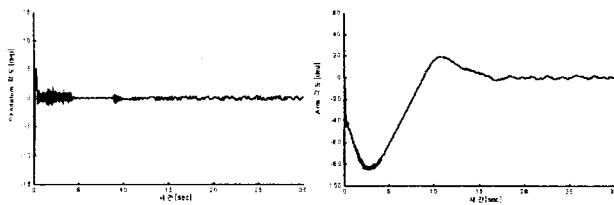
다음의 경우에 대하여 Simulation을 시행하였다.

경우	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
1	0	0	120 [deg]	0
2	-10 [deg]	0	0	0
3	5 [deg]	0	-10 [deg]	0



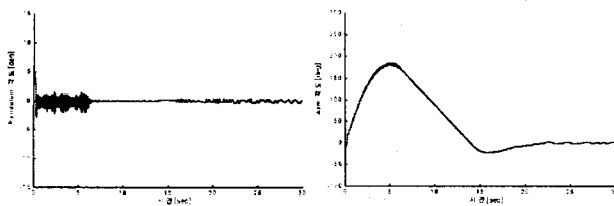
경우1의 진자의 각도

경우1의 Arm의 각도



경우2의 진자의 각도

경우2의 Arm의 각도



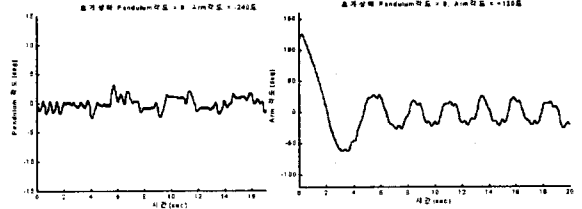
경우3의 진자의 각도

경우3의 Arm의 각도

### 2.5 실험 결과

다음의 경우에 대하여 Simulation을 시행하였다.

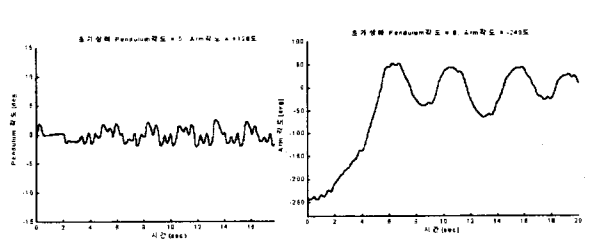
초기상태 : 진자의 각도 0, Arm의 각도 120도



진자의 각도

Arm의 각도

초기상태 : 진자의 각도 0, Arm의 각도 -240도



진자의 각도

Arm의 각도

### 3. 결 론

Simulation과 실험Data를 비교 하였을때 진자의 각도는  $\pm 2$  도 Arm의 각도는  $\pm 20$ 도 정도의 차이를 보였다. 이는 Simulation에서 고려치 않았던 마찰, Sampling Time, 응답의 지연, 외란 등의 영향이라고 생각된다. 향후 과제는 이러한 오차를 줄이는 것이라 하겠다.

#### [참 고 문 헌]

- [1] Li-Xin Wang, "A Course in Fuzzy Systems and Control", Prentice Hall, 1997.
- [2] Li-Xin Wang, "Adaptive Fuzzy Systems And Control", Prentice Hall, 1994.
- [3] L.F.Tsoukalas, Robert E. Uhrig, "Fuzzy And Neural Approaches In Engineering", Prentice Hall, 1994.
- [4] Jacob Apkarian, "A Comprehensive And Modular Laboratory For Control Systems Design And Implementation", Quanser Consulting, Page RP1-RP2, 1995.
- [5] Masayoshi Tomizuka, Young-Kyun Ha "Fuzzy Global And Local Motion Control Of An Inverted Pendulum Using Multiple Rule Bases", ACC, 27-30, 1994.
- [6] Li-xin Wang, "Design and Analysis of Fuzzy Identifiers of Nonlinear Dynamic Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 1, January, page 11-23, 1995.