

시스템 식별을 위한 웨이브릿 이론 연구

김동욱* 이영석** 권재철* 서보혁***

*경북대 전기공학과 **영진전문대 전기과 ***경북대 전기전자공학부

A Study of Wavelet Theory for System Identifications

Dong-ok Kim*, Young-seog Lee**, Jae-cheol Kwon*, Bo-hyeok Seo***

*Dept. of Electrical Eng. K.N.U., **Young-jin junior college, ***School of Electronic and Electrical Eng. K.N.U.

Abstract - Based on wavelet theory, the new notion of wavelet networks is proposed as alternative to feedforward neural networks for approximating arbitrary nonlinear functions. An algorithm presented in this paper trains coefficients of wavelet, i.e., translations and scaling, and then learns weights with the wavelet coefficients. And experimental results are reported.

1. 서 론

입력/출력 데이터가 주워졌을 때, 비선형 함수를 이용하여 그 입출력에 대한 시스템 식별에 대한 연구는 최근 까지 꾸준히 진행되어 오고 있다. 그리고 [1],[2]등에서 볼 수 있는 것과 같이 시스템 식별의 한 가지 방법으로써 신경망의 적용은 확고한 위치를 차지하고 있다. 그러나 신경망의 크기를 결정하는 것은 어려운 일이며, 이에 대한 연구도 진행되고 있다[8].

이 논문에서는 최근 활발히 연구 되고 있는 웨이브릿 이론을 시스템 식별에 접목시키려는 시도이다. 이전에도, 웨이브릿을 시스템 식별에 적용한 사례도 [3],[4]등에서 확인할 수 있다. 그러나 적절하지 않은 아기웨이브릿 [4][3]으로 선택한 경우, 원하지 않는 부분에 대해 학습이 이뤄지고 그것을 만회하기 위해 네트워크가 거대하여 진다. 다우베치나 헬렌스등은 간결한 형태의 웨이브릿에 대한 연구를 해 오고 있다[5][6][7].

웨이브릿 이론을 신경망에 접목시킨 형태인 웨이브릿-네트워크에서도 적절한 아기웨이브릿을 선택하는 것과 적절한 크기의 네트워크를 선택하는 등에 어려움이 있다. 이 논문에서는 선택된 아기웨이브릿을 적용 규칙에 의해 학습, 처리하고자 하는 신호에 적합한 형태의 아기웨이브릿을 얻을 수 있음을 보였다.

이 논문은 웨이브릿에 대한 이론 소개와 그것을 이용한 웨이브릿 네트워크에 대해서 소개하였다. 그리고 사례연구를 통하여, 제시된 방법으로 구성한 네트워크를 보였다. 마지막으로 결론과 참고문헌을 소개하였다.

2. 본 론

2.1 웨이브릿 이론

웨이브릿 이론의 바탕은, 데이터를 분석할 때 스케일을 이용하는 것이다. 그리고 웨이브릿은 어떤 특정의 수학적인 조건을 만족하고 데이터나 다른 함수를 나타내기 위해서 사용되는 함수를 지칭한다. 그러나 웨이브릿에서 이용하는 개념은 새로운 것은 아니다. 함수의 중첩

의 원리를 이용하여 근사화하는 것은, 퓨리에가 정현함수와 비정현함수로 다른 함수를 표현하기 시작한 1800년 대부터이다.

퓨리에의 아이디어에, 웨이브릿 이론은 스케일링이라는 중요한 특성을 이용한다. 따라서 웨이브릿 알고리즘은 다른 스케일 또는 해상도를 가지고 데이터처리를 할 수 있다. 만일 우리가 큰 “원도우”를 가지고 신호를 본다면, 우리는 그것은 덩어리진 특성을 파악할 수 있다. 마찬가지로 작은 “원도우”를 가지고 신호를 처리한다면, 신호의 세세한 특성을 파악할 수 있다. 결과적으로 웨이브릿을 이용한 데이터처리는 “나무”와 “숲”을 함께 볼 수 있는 장점이 있다.

웨이브릿을 이용한 분석과정에서 선택되는 함수의 원형을 분석 웨이브릿(analyzing wavelet) 또는 어미 웨이브릿(mother wavelet)이라 한다. 이 원형의 함수가 높은 주파수 성분을 가지고 있다면, 낮은 주파수의 성분은, 스케일링에 의해 어미 웨이브릿을 팽창시켜줌으로써 해석 할 수 있다.

웨이브릿변환을 정의하기 전에 허용함수를 정의하여야 한다. 어미웨이브릿이 되기 위한 하나의 $L^2(R)$ 함수 g 는 다음 조건을 만족하는 허용함수이다

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (1)$$

여기서 $G(w)$ 는 g 의 퓨리에변환이다.

웨이브릿 g 에 대한 웨이브릿 변환 연산자를 Φ_g 로 정의 한다. 허용함수 웨이브릿 g 로 가질 때, 스케일 값 a 와 천이 값 t 를 계수로 갖는 웨이브릿 영역을 가지고, 임의의 신호 $y(t)$ 의 웨이브릿변환은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Phi_g y(a, t) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int y(t) * g\left(\frac{t-t}{a}\right) dt \\ &= \langle y(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-t}{a}\right) \rangle \\ &= \langle y(t), g_{a,t} \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 내적을 나타낸다. 웨이브릿요소 $g_{a,t}$ 는 $g(t)$ 가 축적(scale)파라미터 a 에 의해서 축적되고 천이(translation)파라미터 t 에 의해서 이동된 형태이다. 이것은 임의 (a, t) 에서 웨이브릿계수가 넓은 범위에 대해서 잘 비교되거나 결합되도록 한다. 특정한 응용 분야에서 최적의 동작을 위해서 자유롭게 아기/어미 웨이브릿을 선택할 수 있게 한다.

웨이브릿의 역변환식은 식(2)에서 설명된 웨이브릿변환으로부터 유도된다.

$y(t)$ 와 $g(t)$ 가 유한 에너지 함수이고, $g(t)$ 가 허용 웨

이브릿이면 웨이브릿 역변환 W_b^{-1} 는 축적-병진 평면 $\phi(a, \tau)$ 에서의 1차원의 시간 또는 공간평면으로 대응시킨다.

축적-천이 평면이 어미 웨이브릿 g 또 $\phi(a, \tau) = \phi_g y(a, \tau)$ 에 대한 $y(t)$ 의 웨이브릿 변환인 경우에 다음과 같이 된다.

$$\phi_g^{-1} : \phi_g(a, \tau) \rightarrow y(t) \quad (3)$$

$$y(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_g(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \frac{da d\tau}{a^2} \quad (4)$$

역변환은 축적되고 이동된 형태의 어미웨이브릿이 적절하게 가중된 합에 의해서 원래의 신호를 생성한다. 가중치는 웨이브릿 계수 $\phi_g y(a, \tau)$ 이다. 역변환은 2차원 축적 천이 공간에서 공간에 대한 합이다. 시간과 공간 평면에서 공간 평면함수는 웨이브릿 평면 계수 $\phi_g y(a, \tau)$ 와 어미 웨이브릿 g 로부터 생성된다.

지금까지 유도된 연속 웨이브릿변환은 이산(discrete) 형태로 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$DWT_x(m, n) = \sum_k x(k) \psi_{m, n}(k) \quad (5)$$

$$\psi_{m, n}(k) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{k-n b_0 a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (6)$$

식(5)는 이산(discrete-time) 신호 $x(n)$ 에 대한 이산 웨이브릿변환을 나타내는 일반식이다. $\psi(k)$ 는 어미 웨이브릿이 천이 값과 축적 값을 나타내는 m 과 n , a_0 와 b_0 에 따라 팽창 이동한다.

2.2 웨이브릿 네트워크

미지의 시스템 $f(\cdot)$ 을 식별하는 구성도는 그림 1처럼 표현 할 수 있다. 이 경우, $f: R^m \rightarrow R^n$, $m, n < \infty$ 이다. 즉,

$$data = \{(x^i, y^i) : y^i = f(x^i); x^i \in R^m, y^i \in R^n, i=1, \dots, K, K < \infty\} \quad (7)$$

여기서 data를 학습집합(training set)이라 한다.

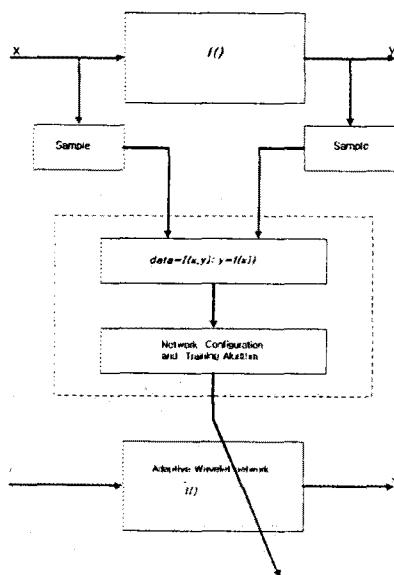


그림 1. 웨이브릿 네트워크를 이용한 함수의 근사화

Fig. 1. Functional approximation using adaptive Wavelet networks

근사화된 함수를 $\hat{f}(\cdot)$ 로 표현할 수 있다. 그리고, 이식은 다시

$$\hat{g}(x) = \sum_{k=0}^N w_{l,k} \phi(a, \tau, x) \quad (8)$$

여기서, $\hat{g}(x)$ 는 MIMO시스템의 1번째 출력이다. 그리고, m 은 웨이브릿 네트워크의 크기를 결정하는 상수이다. $\hat{f}(\cdot) = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 이다. $w_{l,k}$ 는 웨이브릿 네트워크의 가중치이다.

그리고 실제 시스템의 출력은 식(9)와 같이 주워진다.

$$f(\cdot) = [d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)] \quad (9)$$

따라서, 근사 값은 실제 값에 가깝게 하기 위하여 성능지수를 (10)처럼 들 수 있다.

$$J = \|f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|d_i(x) - \hat{g}_i(x)\|^2 \quad (10)$$

신호에 대해서 적절한 천이/축적 값을 갖는 네트워크는 임의의 천이와 축적 값을 갖는 네트워크보다 우수한 성능을 보일 것이다.

그러나, 적절한 천이/축적 값을 얻는 것이 어렵다. 따라서, [9] 등에서 소개된 적용 규칙을 적용하여, 웨이브릿 네트워크의 가중치를 비롯하여, 축적과 천이 값을 구할 수 있다. 성능지수 J 를 임의의 변수 벡터 θ 의 함수라 할 때, θ 에 대한 적용 규칙을 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} sign(e) \quad (11)$$

식(9)을 적용하여, 네트워크의 형태와 가중치를 결정할 수 있다.

3. 사례 연구와 검토

알고리즘을 설명하기 위해, 편의상 SISO에 해당하는 함수[3]를 사용하였다. 이 함수는 식(11)과 같은 비선형 시변의 함수이다.

$$f(x) = \begin{cases} -2.186x - 12.864 & \text{if } -10 \leq x < -2 \\ 4.246x & \text{if } -2 \leq x < 0 \\ 10e^{-0.05x-0.5} & \text{if } 0 \leq x \leq 10 \\ \cdot \sin[(0.03x+0.7)x] & \text{if } x > 10 \end{cases} \quad (12)$$

이 논문의 사례연구를 위하여 사용한 어미 웨이브릿은 (12)식으로 주어지는 가우시안의 이계미분 꼴이다[10].

$$\phi(t) = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (13)$$

제시된 알고리즘으로 (12)식으로 표현되는 어미웨이브릿을 가지고 학습하였다.

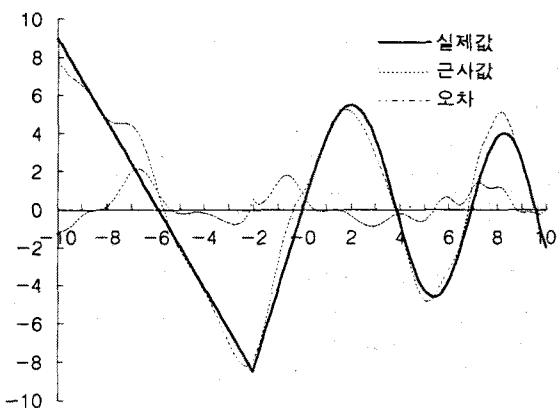


그림 2. 근사화 결과(가중치만 학습)

Fig. 2. Approximation results(only weights learning)

그리고, k 번 반복 학습하여 얻은 근사 함수의 오차를 식(14)처럼 표현할 수 있다. 그리고 그것을 x 에 대하-

여. 에너지함수를 $E_{e,k}$ 를 식(14)으로 표현 할 수 있다.

$$e_k(\cdot) = f(\cdot) - \hat{f}_k(\cdot) \quad (14)$$

$$E_{e,k} = \int |e_k(x)|^2 dx \quad (15)$$

그림 2와 그림 3은. 28개의 웨이브론이 임의의 천이값과 축적값을 갖는 경우 웨이브릿 네트워크의 가중치만을 학습한 경우를 보였다.

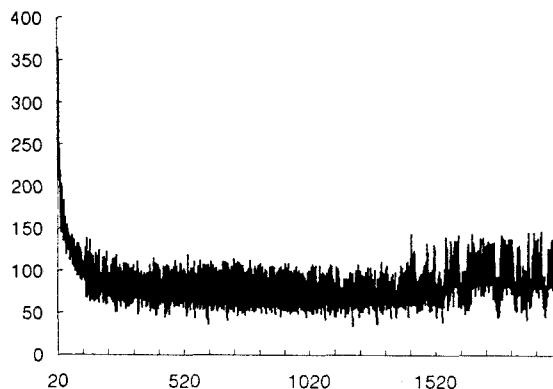


그림 3. 학습에 따른 에너지 함수의 변화(가중치만 학습)

Fig. 3. Energy function variations on learning(only weights learning)

그림 4와 5는 가중치와 더불어 천이값과 축적값을 학습한 형태이다. 가중치 학습이전에, 천이값과 축적값을 학습하고, 가중치가 학습되면서, 천이값과 축적값도 학습하였다.

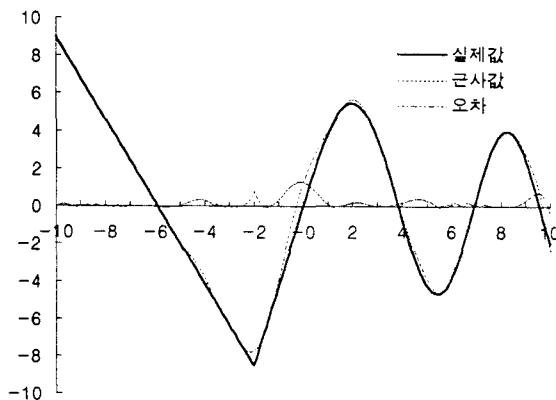


그림 3. 근사 결과(가중치, 천이 · 축적값 학습)

Fig. 3. Approximation results(weights, translations · scaling learning)

그림 4에서. 축적·천이를 학습한 이후, 가중치와 천이·축적값을 학습하면, 매우 빠르게 실제 값에 수렴함을 확인 할 수 있다.

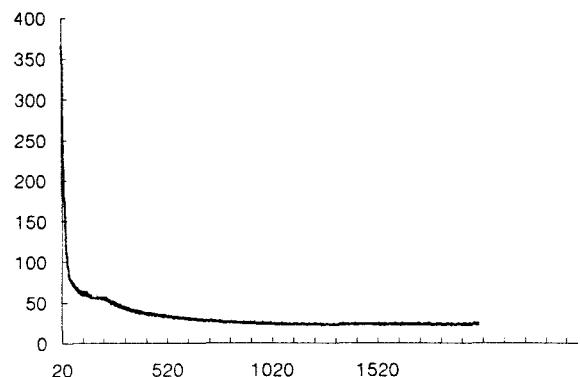


그림 3 학습에 따른 에너지 함수의 변화

Fig. 3 Energy function variations on learning
4. 결 론

이 논문에서는 네트워크의 구조라 할 수 있는 아기웨이브릿의 분포와 모양을 학습함으로써 보다 나은 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 그림3의 에너지 함수를 통하여 알 수 있는 것과 같이, 학습단계의 초기에 네트워크의 구조를 학습함으로써, 실제값에 매우 빠르게 수렴 함을 확인 할 수 있다. 웨이브릿 네트워크의 가중치와 더불어 네트워크의 구조를 학습하면, 더 나은 결과를 얻을 수 있었다. 사용되지 않은 웨이브론에 것은 향후의 과제로 남겨둔다.

(참 고 문 헌)

- [1] K. S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and control of dynamical systems using neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 1, pp. 4-27, Mar. 1990.
- [2] Haykin S, *Adaptive filter theory*. 3rd, Prentice-hall international, Inc. 1996.
- [3] Qinghua Zhang and Albert Benveniste, "Wavelet Networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, NO. 6, Nov. 1992.
- [4] Y. C. Pati and P. S. Krishnaprasad, "Analysis and synthesis of feedforward neural networks using discrete affine wavelet transformations," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.4, No. 1, Jan. 1993.
- [5] Wim Sweldens, "The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets," <http://netlib.bell-labs.com/cm/ms/who/wim/home.html>
- [6] Wim Sweldens, "The lifting scheme: a construction of second generation wavelets," <http://netlib.bell-labs.com/cm/ms/who/wim/home.html>
- [7] I. Daubechies, "The wavelet Transform, Time-frequency localization and signal analysis," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 36, No. 5, Sep. 1990.
- [8] J. O. Moody and P. J. Antsaklis, "The dependence identification neural network construction algorithm," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 7 Jan. 1996.
- [9] K. J. Åström and B. Wittenmark, "Adaptive control, 2nd," Addison-Wesley Publishing Company. 1995.
- [10] Y. T. Chan, *Wavelet basics*, Kluwer academic publishers. 1995.