

백스텝핑 기법을 이용한 적응 비선형 제어기 설계에 관한 연구

김민수*, 현근호**, 이형찬***, 양해원*

*한양대학교 전기공학과, **신성대학 전기과, ***대진대학교 전기공학과

A Study on the Design of Adaptive Nonlinear Controller using Backstepping Technique

Min - Soo Kim*, Keun - Ho Hyun**, Hyung - Chan Lee***, Hai - Won Yang*

*Dept. of Elec. Eng. Hanyang Univ. **Dept. of Elec. Eng. Shinsung Col. ***Dept. of Elec. Eng. Dailin Univ.

Abstract - In this paper, we present a robust adaptive backstepping output feedback controller for nonlinear systems perturbed by unmodelled dynamics and disturbances. Especially, backstepping technique with modular approach is used to separately design controller and identifier. The design of identifier is based on the observer-based scheme which possesses a strict passivity property of observer error system. We will use "Switching- σ modification" at the update law and the modified control law to attenuate the effects of undodelled dynamics and disturbances for nonlinear systems.

1. 서 론

최근, 적응 제어의 기법으로서 출력 피드백 제어에 대하여 Adaptive Backstepping 기법을 이용한 적응 제어기의 설계에 대한 연구가 흥미있는 분야로 부상하고 있다. [1] 특히, 제어 대상 플랜트에 비모형화 특성과 외란이 존재하는 경우 Adaptive Backstepping 기법을 이용한 제어기를 어떻게 설계할 것인가에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

본 논문에서는 플랜트의 출력만 아는 것으로 가정하여 Marino-Tomei Filter[3]를 사용하여 적응 관측기 형태로 변환시켜 제어기 설계시 따르는 제약사항을 해결하였다. 또한, 비모형화 특성과 외란이 존재하는 플랜트에 대해 Adaptive Backstepping 기법을 이용해 적응 제어기를 설계하면서 강인성 향상을 위해 사용된 기존의 "Switching- σ Modification"을 적용칙에 이용하였고 제어칙에는 제어 입력의 유계성을 보장시켜 주기위해 Normalizing Signal을 첨가하였다. [2]

그리고, 제어기와 식별기를 분리 설계하는 모듈라 설계(Modular Design)기법을 Backstepping Algorithm에 적용함으로써 해서 식별기 설계시 X-Passive Scheme 또는 Observer-Based Scheme 이라고 하는 파라미터 추정 알고리즘을 사용하였다. [1], [4]

모의 실험에서는 기존의 제어기와 본 논문에서 제시된 제어기의 성능을 비교하였다.

2. 플랜트 제시 및 관측기-제어기 설계

2.1 제어 대상 및 제어 목적

제어대상 비선형시스템은 n 차의 동특성 방정식과 r 차의 특이섭동(Singular Perturbation) 및 외란 d 가 포함된 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \phi(y) + \Phi(y)a & x \in R^n \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \sigma(y)u + A_1 \zeta + d \\ \mu \dot{\zeta} &= A_2 \zeta + A_3 x + B_1 u & \zeta \in R^r \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $a = [a_1, \dots, a_q]^T \in R^q$,

$b = [b_m, \dots, b_0]^T \in R^{m+1}$ 는 미지 파라미터이고,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} \phi_{0,1} \\ \vdots \\ \phi_{0,n} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \dots & \phi_{q,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{1,n} & \dots & \phi_{q,n} \end{bmatrix} \text{이며 다음과 같이 가정한다.}$$

가정 1 : 다항식 $B(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$ 는 Hurwitz이고, $\sigma(y) \neq 0$ 이고 b_m 의 부호는 알고 있다.

가정 2 : 기준모델의 출력 $y_r(t)$ 와 이의 ρ' (상대차수) 번째 도함수까지는 모두 알고 있으며 유한하다.

가정 3 : $\det(sI - A_2) = 0$ 의 해는 모두 복소 평면의 좌반면에 있으며 $0 < \mu \ll 1$ 이다.

제어 목적은 제어 대상 비선형 시스템의 출력 $y(t)$ 가 기준모델의 출력 $y_r(t)$ 를 추종하고, 전체 폐루프 시스템의 모든 신호가 유한한 것이다.

2.2 관측기 설계

2.2.1 적응 관측기 형태로의 변환

식 (1)에서 특이 섭동에 관한 식을 다음과 같은 변수로 치환한다.

$$\bar{\zeta} = \zeta + L(\mu)x \quad (2)$$

여기서, $L(\mu)$ 는 다음과 같은 대수방정식을 만족하는 행렬이다.

$$A_3 - A_2 L + \mu L A - \mu L A_1 L = 0 \quad (3)$$

식 (2)의 변수로 식 (1)을 나타내면

$$\dot{x} = (A - A_1 L)x + \phi(y) + \Phi(y)a + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \sigma(y)u$$

$$+ A_1 \bar{\zeta} + d$$

$$\mu \dot{\bar{\zeta}} = (A_2 + \mu L A_1) \bar{\zeta} + (B_1 + \mu L \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \sigma(y))u$$

$$+ \mu L (\phi(y) + \Phi(y)a)$$

$$y = x_1 \quad (4)$$

와 같이 된다. 따라서, 특이섭동에 관한 식 즉, ζ 에 관한 동특성 방정식에서 상태 x 의 계수는 없어지게 된다. 식 (4)에서 $A_1 \bar{\zeta} + d - A_1 Lx = \zeta$, 라고 간단히 표현하기로 한다.

식 (4)를 적응관측기형태로 만들기 위하여 상태 x 에 대한 동특성 방정식을 다음과 같은 형태로 변환한다.[3]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \phi(y) + F(y, u)^T \theta + \zeta, \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{여기서, } \theta = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

$F(y, u)^T = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ \rho_{-1} \times (m+1) \\ \dots \\ I_{m+1} \end{array} \right] \sigma(y)u, \Phi(y)$ 이다. 이제 다음과 같은 필터를 구성하기로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_1 \xi + B_1 \phi(y) & \xi \in R^{n-1} \\ \dot{\Omega} &= A_1 \Omega + B_1 F(y, u)^T & \Omega \in R^{(n-1) \times q} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{여기서, } A_1 = \begin{bmatrix} -\bar{l} & I_{n-2} \\ & 0 \end{bmatrix}, B_1 = [-\bar{l}, I_{n-1}] \text{ 이고}$$

다항식 $L(s) = s^{n-1} + l_1 s^{n-2} + \dots + l_{n-1}$ 은 Hurwitz 이며 $l = [l_1 \dots l_{n-1}]^T = [l \ \bar{l}^T]^T$ 이다.

식 (5)의 상태 방정식을

$$X = x - \begin{bmatrix} 0 \\ \xi + \Omega^T \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

와 같은 새로운 변수 X 에 의하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{X} = AX + l(\omega_0 + \omega^T \theta) + \zeta, \quad (8)$$

여기서, $\omega_0 = \phi_{0,1} + \xi_1$, $\omega = F_{(1)} + \Omega_{(1)}$ 이며 $F_{(1)}$, $\Omega_{(1)}$ 은 각각 행렬 F, Ω 의 첫 번째 열벡터이다. 식 (8)에서 ζ 를 제외하고, $\omega_0 + \omega^T \theta$ 를 입력으로 한다면

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{\omega_0 + \omega^T \theta} &= \frac{e_1^T X}{\omega_0 + \omega^T \theta} = e_1^T (sI - A)^{-1} l \\ &= \frac{s^{n-1} + l_1 s^{n-2} + \dots + l_{n-1}}{s^n} \end{aligned}$$

가 되어 상대차수가 1인 최소위상 시스템이 된다. 이러한 상대차수의 감소는 적응관측기 설계시 Passivity를 보장할 수 있게 하며 식 (8)을 적응관측기 형태라 한다.

앞서 식 (6)에서 설계된 필터 중 Ω 필터는 다음과 같이 분리 설계함으로써 상태 방정식의 차수를 줄일 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_1 \xi + B_1 \Phi(y) \\ \dot{\lambda} &= A_1 \lambda + l_{n-1} \sigma(y)u \\ v_j &= A_1^j \lambda \quad j=0, \dots, m \\ \Omega^T &= [v_m, \dots, v_1, v_0, \xi] \end{aligned} \quad (9)$$

2.2.2 적응 관측기 구성

식 (8)에서 ζ 는 특이섭동항에 의해 부가된 항으로서 이를 제외하고 관측기를 구성하면 다음과 같다.

$$\dot{\hat{X}} = A \hat{X} + K_0 (y - \hat{X}_1) + l(\omega_0 + \omega^T \hat{\theta}) \quad (10)$$

여기서, $K_0 = (A + c_0 I)l$ 이고 $A_0 = A - K_0 e_1^T$ 이라 하면 $\det(sI - A_0) = (s + c_0)L(s)$, 즉,

$$e_1^T (sI - A_0)^{-1} l = \frac{1}{s + c_0} \quad (11)$$

을 만족한다. 관측 오차를 $\varepsilon = X - \hat{X}$ 라고 한다면

$$\dot{\varepsilon} = A_0 \varepsilon + l \omega^T \hat{\theta} + \zeta, \quad (12)$$

가 되어 ζ 를 제외한다면 관측오차의 첫번째 항인 ε_1

은 $\varepsilon_1 = e_1^T \varepsilon = \frac{1}{s + c_0} [\omega^T \hat{\theta}]$ 가 되어 Strictly

Passive 전달함수로 구성된다.

관측오차의 유계성을 보장하기 위해 식 (10)의 적응 관측기에 다음과 같은 비선형항을 추가시킨다.[4]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= A \hat{X} + K_0 (y - \hat{X}_1) \\ &\quad + K_0 |\omega|^2 l (y - \hat{X}_1) + l(\omega_0 + \omega^T \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (13)$$

그러면 식 (12)의 관측 오차 상태 방정식은

$$\dot{\varepsilon} = (A_0 - K_0 |\omega|^2 l e_1^T) \varepsilon + l \omega^T \hat{\theta} + \zeta, \quad (14)$$

가 되며, $A_0^T P_0 + P_0 A_0 \leq -q_0 I$, $P_0 l = e_1$ 인 P_0 가 존재하고 ζ 를 제외한다면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (|\varepsilon|^2 P_0) &\leq -q_0 |\varepsilon|^2 - 2K_0 |\omega|^2 \varepsilon^T P_0 l e_1^T \varepsilon \\ &\quad + 2\varepsilon^T P_0 l \omega^T \hat{\theta} \\ &= -q_0 |\varepsilon|^2 - 2K_0 |\omega|^2 \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \omega^T \hat{\theta} \\ &\leq -q_0 |\varepsilon|^2 + \frac{1}{2K_0} |\hat{\theta}|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

의 부등식이 성립되어 관측오차 ε 의 유계성이 보장된다.

2.3 제어기 설계

적응 제어기는 Adaptive Backstepping 기법을 이용한 Modular Design 기법으로 설계한다. 이 기법은 오차 변수 z 의 유계성이 보장되도록 안정화 함수 α 를 매 단계마다 만들 때 비선형 제동 함수 s_i 를 포함하게 하는 방식이다.[4]

$$z_1 = y - y_r, \quad (16)$$

$$z_i = v_{m,i-1} - \frac{1}{b_m} y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1} \quad i=2, \dots, \rho' \quad (17)$$

$$\alpha_1 = -\frac{\text{sgn}(b_m)}{\rho} (c_1 + s_1) z_1 + \frac{1}{b_m} \bar{a}_1 \quad (18.1)$$

$$\bar{a}_1 = -\hat{X}_2 - w_0 - w^T \hat{\theta} \quad (18.2)$$

$$\alpha_i = -z_{i-1} - (c_i + s_i) z_i + \beta_i \quad i=2, \dots, \rho' \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (\hat{X}_2 + w_0 + w^T \hat{\theta}) + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \xi} (A_1 \xi + B_1 \phi) \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \xi} (A_1 \xi + B_1 \Phi) + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{X}} [A \hat{X} \\ &\quad + K_0 (y - \hat{X}_1) + k_0 |\omega|^2 l (y - \hat{X}_1) + l(\omega_0 + \omega^T \hat{\theta})] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} + k_i v_{m,1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m+i-2} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \lambda_j} (-k_j \lambda_1 + \lambda_{j+1}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} s_i &= d_i \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right)^2 + k_i \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \omega \right|^2 \\ &\quad + g_i \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} - \frac{1}{b_m} y_r^{(i-1)} e_1 \right|^2 \end{aligned} \quad (21)$$

이제, $|b_m| \geq \rho$ 인 양수 ρ 가 존재한다고 가정하면 상대 차수인 ρ' 번째에서 제어칙은 다음과 같다.

$$u = \frac{1}{\sigma(y)} (\alpha_{\rho'} - v_{m,\rho'} + \frac{1}{b_m} y_r^{(\rho')}) \quad (22)$$

그리고, 식(14)의 관측 오차 상태 방정식의 strict passivity를 이용해서 적응칙을 구하면 다음과 같다.[1],[4]

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma w \varepsilon_1 \quad (23)$$

이상과 같은 설계 단계를 모두 마치게 되면 새로 정의된

오차 변수 z 는 다음과 같은 상태 방정식으로 된다.

$$\dot{z} = A_z(z, t)z + W_\varepsilon(z, t)\varepsilon_2 + W_\theta(z, t)^T \hat{\theta} + D(z, t) \hat{\theta} \quad (24)$$

$z \in R^{\rho}$

여기서, $A_z(z, t), W_\varepsilon(z, t), W_\theta(z, t), D(z, t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$A_z = \begin{bmatrix} -\frac{|b_m|}{\rho}(c_1 + s_1) & b_m & 0 & \dots & 0 \\ -b_m & -(c_2 + s_2) & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -(c_\rho + s_\rho) \end{bmatrix}$$

$$W_\varepsilon(z, t) = [1, -\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \dots, -\frac{\partial \alpha_{\rho-1}}{\partial y}]^T$$

$$W_\theta^T = W_\varepsilon \omega^T + \left[\frac{a_1}{b_m} e_1^T, z_1 e_1^T, 0, \dots, 0 \right]^T$$

$$D = \left[0, -\frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta}, \dots, -\frac{\partial \alpha_{\rho-1}}{\partial \theta} \right]^T$$

한편, 특이섭동 관련항인 ζ 의 영향을 상쇄하기 위해 "Switching- σ Modification"을 식 (23)에 적용하면 다음과 같다.

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma w \varepsilon_1 - \Gamma \sigma \hat{\theta} \quad (25)$$

여기서, σ 는 다음과 같이 결정되는 상수이다.

$$\sigma = \begin{cases} 0 & ; |\theta(t)| < M_0 \\ \sigma_0 \left(\frac{|\theta(t)|}{M_0} - 1 \right) & ; M_0 \leq |\theta(t)| \leq 2M_0 \\ \sigma_0 & ; |\theta(t)| > 2M_0 \end{cases} \quad (26)$$

σ_0 는 양의 상수이고 M_0 는 $|\theta^*|$ 의 상한을 의미하는 설계 파라미터이다.

또한, 식 (22)과 같이 정의된 제어입력에서 비모형화 특성과 외란에 대하여 미지 파라미터의 수렴성을 보장해 주기 위해 다음과 같이 제어칙을 수정한다.

$$u = \frac{1}{\alpha(y)} \left(\alpha_\rho - v_{m,\rho} + \frac{1}{b_m} y_r^{(\rho)} \right) - \beta m(t) z(t) \quad (27)$$

여기서, $z(t) = \frac{\varepsilon_1}{1 + |\varepsilon_1|}$ 이고, $m(t)$ 는 다음과 같은 미분방정식에 의해 발생하는 신호이다.

$$\dot{m} = -\delta_0 m + \delta_1 (|u| + |y| + 1) \quad (28)$$

3. 모의실험

다음과 같은 비모형화 특성과 외란을 갖는 플랜트에 대하여 모의실험을 수행하였다.

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta x_1^3 + d$$

$$\dot{x}_2 = u + \zeta$$

$$\mu \dot{\zeta} = -\zeta + x_1 + u$$

$$y = x_1 \quad (29)$$

제어목적은 출력 y 가 영으로 수렴하는 것이며 제어기 설계에 필요한 설계 파라미터들은 다음과 같이 설정하였고, 외란 d 는 $0.5 \sin 10t$ 로 하였다.

$$\mu = 0.2, \theta = c_2 = 2,$$

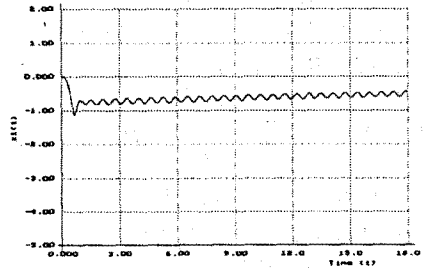
$$c_1 = d_2 = 1 = \nu = \delta_0 = \delta_1 = 1,$$

$$d_1 = 0.5, \gamma = 10, \beta = 4$$

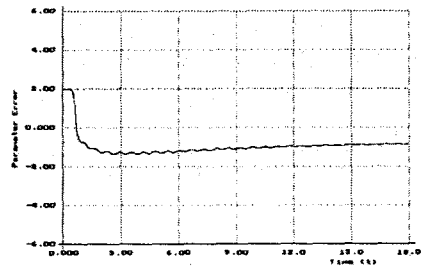
페루프 시스템내의 초기값은 $x_1(0) = \hat{x}_1(0) = 0.8$ 을 제외하고는 모두 영으로 하였다. 그림 1은 제어칙과 적응을 기존의 알고리즘 즉, 식 (22), 식 (23)을 적용한 경우이며 그림 2는 본 논문에서 제안된 식 (25), 식

(27)을 동일한 설계 파라미터에 대해 적용한 경우이다.

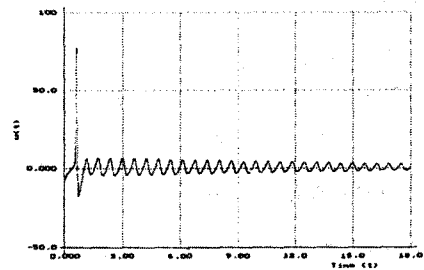
(a), (b), (c)는 각각 오차 변수 $z_1(t)$, 파라미터 오차 $\hat{\theta}(t)$, 그리고 제어 입력 $u(t)$ 를 나타내며 모두 가능한 한 빠른 시간 내에 영으로 수렴해야 한다. 그 결과 그림 2가 그림 1보다 빠른 시간 내에 영으로 수렴함을 알 수 있으며 과도 특성도 우수함을 알 수 있다.



(a) 오차 변수 $z_1(t)$



(b) 파라미터 오차 $\hat{\theta}(t)$



(c) 제어 입력 $u(t)$

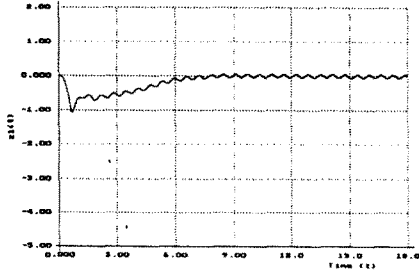
그림 1. 참고 문헌(1)의 제어기를 사용한 경우

4. 결 론

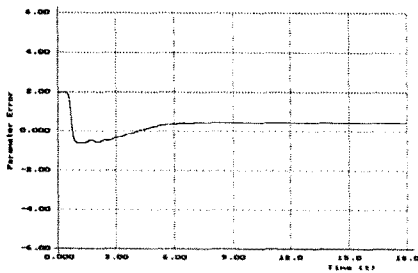
본 논문에서는 플랜트 자체에 비모형화 특성과 외란이 포함된 비선형 시스템에 대해 Adaptive Backstepping 기법을 적용할 경우 시스템 전체가 불안정 해지거나 제어 목적의 달성이 어려운 경우에 대비해 적용칙에는 "Switching- σ Modification"을 이용하였고 제어칙에는 Normalizing Signal을 첨가하였다. 그리고 제어기와 식별기를 분리 설계하는 모듈라 설계기법을 Backstepping Algorithm에 적용함으로써 해서 식별기 설계시 X-Passive Scheme 또는 Observer-Based Scheme 이라고 하는 파라미터 추정 알고리즘을 사용하였다. 또한 MT Filter를 사용해 주어진 플랜트를 적응 관측기 형태로 변환시켜 줌으로써 해서 제어기 설계시 따르는 제약사항을 해결하였다. 그리고, 모의실험을 통해 본 논문에서 제안된 제어기의 성능의 우수함을 보였다. 앞으로, 제어기의 부담을 보다 줄일 수 있는 Backstepping 알고리즘 연구가 필요하다.

(참 고 문 헌)

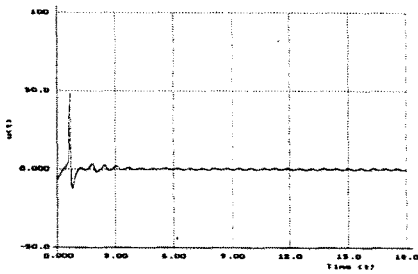
- [1] M. Krstic, P. V. Kokotovic, "Adaptive Nonlinear Output-Feedback Schemes with Marino-Tomei Controller", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 41, pp.274-280, 1996
- [2] P. A. Ioannou, J. Sun, "Robust Adaptive Control", Prentice Hall, 1996
- [3] R. Marino, P. Tomei, "Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear Systems, Part I: Linear Parameterization", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 38, pp.17-32, 1993
- [4] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Design", John Wiley & Sons, 1995



(a)오차 변수 $z_1(t)$



(b)파라미터 오차 $\bar{\theta}(t)$



(c)제어 입력 $u(t)$

그림2. 본 논문에서 제시된 제어기를 사용한 경우