

방사 기저 함수 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 제어

°김근범\*, 최윤호\*\*, 박진배\*

\* 연세대학교 전기공학과, \*\* 경기대학교 전자공학과

Control of Chaotic Nonlinear Systems Using Radial Basis Function Networks

°Keun Bum Kim\*, Yoon Ho Choi\*\*, Jin Bae Park\*

Dept. of Electrical Eng., Yonsei Univ., Dept. of Electronic Eng., Kyonggi Univ.

**Abstract** - In this paper, a new method of controlling chaotic nonlinear systems is proposed. Firstly, the dynamics of a chaotic nonlinear system is separated into a linear part and a nonlinear part. Secondly, the nonlinear part is approximated using a radial basis function network (RBFN) and canceled from the controlled system. Then, the resulting system has only the linear part added with very weak nonlinearity. Finally, a simple linear state feedback control law is designed for the linear part. In the meanwhile, a theorem justifying this concept is presented and proved. Comparing with the feedback linearization, the proposed method can be applied regardless of the functional form of the controlled dynamics. The proposed method is applied by simulation to the Duffing system and the Lorenz system and satisfactory results are obtained.

2.2 비선형 상쇄를 통한 시스템의 선형 제어

식 (2)의  $f_N(x)$ 에 대한 근사치를  $\hat{f}_N(x)$ 로 정의하고 이를 식 (2)로부터 빼주면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\dot{x} = Ax + f_N(x) - \hat{f}_N(x) \tag{4}$$

$$= Ax + \tilde{f}_N(x) \tag{5}$$

여기서  $\tilde{f}_N(x)$ 는  $f_N(x)$ 에 대한 근사 오차이다. 만일 적절한 방법을 통해 근사 오차가 0이 되었다고 가정하면 식 (5)는 완전 선형 시스템이 되므로 다음과 같이 간단한 상태 궤환 제어를 설계할 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu(t) \tag{6}$$

여기서  $B$ 는 시스템의 가제어성을 만족하는 입력 행렬,  $u(t)$ 는 다음과 같은 상태 궤환 제어 신호이다.

$$u(t) = -kx + v(t) \tag{7}$$

여기서  $k$ 는 궤환 이득,  $v(t)$ 는 시스템의 외부 입력이다. 식 (7)에 의해 식 (6)은 다음과 같은 폐루프(closed-loop) 시스템으로 표현된다.

$$\dot{x} = A_c(x) + Bv(t) \tag{8}$$

여기서  $A_c(= A - Bk)$ 는 폐루프 시스템의 안정 행렬이다. 이제 시스템의 평형점을 원점이라고 가정하면 다음과 같은 정리가 얻어진다.

**정리:** 식 (8)의 평형점인 원점이 점근적으로 안정하기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\|x\| \rightarrow 0 \text{ 일 때, } \frac{\|\tilde{f}_N(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \tag{9}$$

**증명:** 다음과 같은 Lyapunov 함수를 선정하자.

$$V = x^T P x \tag{10}$$

여기서  $P$ 는 대칭 양안정 행렬이다. 식 (10)을 시간에 대해 미분하면,

$$\dot{V} = x^T \{A_c^T P + P A_c\} x + 2x^T P \tilde{f}_N(x). \tag{11}$$

$A_c$ 가 안정 행렬이므로 다음의 Lyapunov 방정식을 만족하는 대칭 양안정 행렬  $Q$ 가 존재한다.

$$A_c^T P + P A_c = -Q \tag{12}$$

따라서,

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P \tilde{f}_N(x). \tag{13}$$

식 (13)에서 우변의 첫 번째 항은 음한정이지만 두 번째 항은 부정(indefinite)이다. 여기서 식 (9)의 조건이 만족되면 어떤  $\gamma > 0$ 에 대해, 다음의 조건을 만족하는  $r > 0$ 이 존재한다.

$$\|\tilde{f}_N(x)\| < \gamma \|x\|, \quad \forall \|x\| < r. \tag{14}$$

따라서 다음의 식이 유도된다.

$$\dot{V} < -x^T Q x + 2\gamma \|P\| \|x\|^2, \quad \forall \|x\| < r. \tag{15}$$

1 서론

혼돈 현상은 비선형 동역학 시스템이 지니는 특성으로서 확실적 요소가 없는 결정론적 시스템으로부터 발생함에도 불구하고 외부적으로는 마치 잡음과 같은 불규칙한 동태를 보인다. 또한 혼돈 현상은 초기 조건에 매우 민감하므로 장기적인 예측이 불가능하다[1]. 이러한 특성으로 인해 시스템에 혼돈 현상이 발생할 경우, 시스템이 불안정해지거나 성능이 저하되기 쉽다[2]. 따라서 대부분의 경우, 혼돈 현상은 제어 혹은 역계의 대상으로 인식되고 있다[3]. 본 논문에서는 이러한 혼돈 현상을 제어하기 위한 새로운 방법을 제시한다. 제시된 제어 방법은 첫째, 혼돈 시스템의 동역학을 선형 부분과 비선형 부분으로 분리한다. 둘째, 분리된 비선형 부분을 신경 회로망의 한 종류인 방사 기저 함수 회로망(radial basis function network; RBFN)[4,5]을 이용하여 근사화한 후, 이를 시스템으로부터 상쇄시킨다. RBFN이 비선형 부분을 정확히 근사화했을 경우, 결과로서 얻어지는 시스템은 완전 선형 시스템이 된다. 따라서 마지막으로, 선형 부분에 대해 간단한 상태 궤환 제어기[6]를 설계함으로써 시스템에 대한 안정화나 추적 제어를 행한다. 또한 이러한 제어 기법의 타당성을 보이는 정리가 주어지고 증명된다. 마지막으로, 제안된 제어 기법을 대표적인 연속 시간 혼돈 비선형 시스템인 Duffing 시스템과 Lorenz 시스템에 적용한 모의 실험 결과를 제시한다.

2 RBFN 근사기를 이용한 비선형 혼돈 시스템의 선형 제어

2.1 시스템 동력학의 분리

일반적인 비선형 시스템은, 시스템의 상태를  $x$ 로 정의할 경우 다음과 같은 비선형 상태 방정식으로 표현된다.

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

또한 식 (1)은 간단한 대수적 연산을 통해 다음과 같이 선형 부분과 비선형 부분으로 분리된다.

$$\dot{x} = f_L(x) + f_N(x) \tag{2}$$

$$= Ax + f_N(x) \tag{3}$$

여기서  $f_L(x)$ ,  $f_N(x)$ 는 각각 선형 부분과 비선형 부분을 나타내고  $A$ 는 선형 부분에 대한 시스템 행렬이다. 여기서 제안된 제어 기법의 전개를 위해 분리된 시스템에 대해 다음의 두 가지 가정을 세운다.

- (i) 시스템의 상태는 모든 시간에 대해 접근 가능하다.
- (ii) 비선형 부분의 입력과 출력의 정확한 측정이 가능하다.

한편  $Q$ 의 최소 고유치  $\lambda_{\min}(Q)$ 는 양의 실수이고

$$x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 \quad (16)$$

이므로  $\forall \|x\| < r$ 에 대해 다음의 식이 만족된다.

$$\dot{V} < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P\|] \|x\|^2 \quad (17)$$

이때,  $\gamma < \lambda_{\min}(Q)/2\|P\|$ 를 만족하면  $\dot{V}$ 는 음함정이 되고, Lyapunov의 안정 이론[7]에 의해 원점은 점근적으로 안정하다. ■

이 정리는 시스템의 상태가 시간이 지남에 따라 원점으로 수렴하도록 식 (7)의 제어 입력을 적절히 설정하고 식 (5)의 근사 오차 또한 적절한 방법을 통해 시간이 지남에 따라 작아지도록 하면 원하는 제어 결과를 얻을 수 있음을 뜻한다.

### 2.3 방사 기저 함수 회로망을 이용한 비선형 근사화

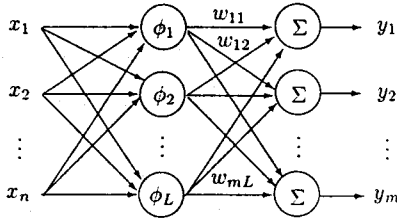


그림 1: 일반적인 RBFN의 구조

본 논문에서는 비선형 부분( $f_N(x)$ )의 근사화를 위해 RBFN을 사용한다. RBFN은 신경 회로망의 일종으로서 은닉층의 비선형 함수로 방사 기저 함수를 사용한다. 이는 기존의 다층 전향 신경 회로망에 비해 최적적으로 수렴 속도가 빠르고 우수한 함수 근사화 기능을 지닌다. 그림 1은 일반적인 RBFN의 구조를 나타낸다. 그림 1에서 입력( $x$ )의 차원은  $N$ , 출력( $y$ )의 차원은  $M$ , 은닉층의 노드의 개수는  $L$ 이고,  $\phi$ 는 방사 기저 함수를 나타낸다.  $k$ 번째 출력 노드는 다음과 같이 표현된다.

$$y_k = \sum_{i=1}^L w_{ki} \phi_i(\|x - c_i\|) \quad (18)$$

여기서  $c_i$ 는  $i$ 번째 은닉층 노드의 중심,  $w_{ki}$ 는  $k$ 번째 출력 노드와  $i$ 번째 은닉층 노드 사이의 연결 강도이다. 본 논문에서는 방사 기저 함수로서 일반적인 Gaussian 함수를 사용하며 이때, 식 (18)은 다음과 같이 표현된다.

$$y_k = \sum_{i=1}^L w_{ki} \exp\left(-\frac{\|x - c_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (19)$$

여기서  $\sigma_i$ 는  $i$ 번째 은닉층 노드의 폭이다. RBFN의 중심( $c$ ), 폭( $\sigma$ ), 연결 강도( $w$ )는 조정 가능한 매개 변수로서 각각에 대해 여러 가지 학습 방법이 개발되었다. 본 논문에서는 중심에 대해  $k$ -means clustering, 폭에 대해  $k$ -nearest neighbors, 연결 강도에 대해 경사 하강법(gradient-descent)을 사용한다[8]. 비선형 부분의 근사화를 위해 RBFN을 사용한 경우, 식 (4)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = Ax + f_N(x) - \sum_{k=1}^M y_k \quad (20)$$

$$= Ax + f_N(x) - \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^L w_{ki} \exp\left(-\frac{\|x - c_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (21)$$

### 3 모의 실험 및 결과 고찰

본 논문에서 제안한 제어 기법을 대표적인 연속 시간 비선형 혼돈 시스템인 Duffing 시스템[9]과 Lorenz 시스템[1]에 적용한다. Duffing 시스템과 Lorenz 시스템은 각각 다음과 같은 상태 방정식으로 표현된다.

Duffing :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -0.4x_2 + 1.1x_2 - x_1^3 + 1.8 \cos(1.8t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Lorenz :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10x_1 + 10x_2 \\ 28x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

간단한 대수 연산을 통해 각각의 방정식은 다음과 같이 선형 부분과 비선형 부분으로 분리된다.

Duffing :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f_N(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.1 & -0.4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^3 + 1.8 \cos(1.8t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Lorenz :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f_N(x) \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

각각의 시스템에 대해 적절히 설계된 RBFN을 이용하여 off-line으로 비선형 부분을 근사화한 후 이를 시스템에 연결한다. 또한 선형 부분에 대해 상태 궤환 제어기를 설계하여 안정화나 추적 제어를 행한다.

#### 3.1 Duffing 시스템

Duffing 시스템의 비선형 부분 근사화를 위해 사용된 RBFN이 표 1에 정리되어 있다. 선형 제어기의 설계를 위해  $B = [1 \ 1]^T$ 의 입력 행렬을 선택하고 폐루프 시스템의 고유치를  $-2, -2$ 로 선택했을 경우 다음과 같은 제어 신호가 설계된다.

$$u(t) = -kx + v(t) = -[5.1 \ 3.6]x + v(t) \quad (26)$$

Duffing 시스템의 초기치는 모든 경우에 대해  $x_0 = [3 \ 3]^T$ 로 가정하였다.

##### 3.1.1 안정화 ( $v(t) = 0$ )

그림 2는 Duffing 시스템의 안정화에 대한 결과이다. 마지막 200번의 iteration에 대한 평균 제곱 오차는  $x_1$ 이 0.0014,  $x_2$ 가 0.0012로서 시스템의 두 상태가 모두 0 근처로 수렴함을 보이고 있다.

##### 3.1.2 추적 제어

Duffing 시스템의 추적 제어를 위해 400번의 time step을 주기로 하고 크기가 3인 사각 함수를 기준 입력으로 사용하였고 시스템의 출력  $y(t)$ 는 다음과 같이 설정하였다.

$$y(t) = Cx(t) = [1 \ 0]x(t) \quad (27)$$

이때 시스템의 외부 입력  $v(t)$ 는 다음과 같이 얻어진다[6].

$$v(t) = H^{-1}(0)y_d(t) = 4y_d(t) \quad (28)$$

여기서  $H(s) = C(sI - A + Bk)^{-1}B$ 이고  $y_d(t)$ 는 기준 입력이다. Duffing 시스템의 추적 제어 결과는 그림 3과 같다. 시스템의 출력이 원하는 기준 입력을 유사하게 추적함을 알 수 있다.

#### 3.2 Lorenz 시스템

Lorenz 시스템의 비선형 부분 근사화를 위해 사용된 RBFN은 표 2와 같다. Lorenz 시스템에 대한 모의 실험에서 시스템의 가제어성을 만족하는 입력 행렬을  $B = [1 \ 0 \ 1]^T$ 로 설정한다. 또한 시스템의 초기치는 모두  $x_0 = [1 \ 1 \ -1]^T$ 로 가정한다.

표 1: Duffing 시스템에 대한 RBFN의 구조

은닉층 노드의 개수	30
입력/출력의 개수	2/2
Clustering sample의 개수	1000
연결 강도의 학습률	0.01
Off-line 학습 회수	15000

표 2: Lorenz 시스템에 대한 RBFN의 구조

은닉층의 노드의 개수	100
입력/출력의 개수	3/3
Clustering sample의 개수	5000
연결 강도의 학습률	0.01
Off-line 학습 회수	15000

3.2.1 안정화 ( $v(t) = 0$ )

첫째로 Lorenz 시스템의 안정화에 대한 모의 실험을 수행한다. 페루프 시스템의 고유치를  $-1, -2, -3$ 으로 선택했을 경우 다음과 같은 제어 신호가 설계된다.

$$u(t) = -kx = [7.6554 \quad -9.9924 \quad 0.0013]x \quad (29)$$

표 2의 RBFN과 식 (29)의 제어 신호에 의한 안정화 결과는 그림 4와 같다. 그림 4에서 마지막 200번의 상태에 대한 평균 제곱 오차는 각각  $x_1$ 이  $2.51 \times 10^{-7}$ ,  $x_2$ 가  $3.88 \times 10^{-5}$ ,  $x_3$ 가 0.0026으로서 모든 상태가 거의 0에 가까운 값으로 수렴하였음을 알 수 있다.

3.2.2 추적 제어

Lorenz 시스템의 추적 제어를 위해 400번의 time step을 주기로 하고 크기가 5인 사각 함수를 사용하였다. 시스템이 추적 제어에 필요한 빠른 응답을 지니도록 하기 위해 페루프 시스템의 고유치를 모두  $-10$ 으로 설정하였고 이때 얻어지는 제어 신호는 다음과 같다.

$$u(t) = -kx + v(t) \\ = -[17.6829 \quad 17.5241 \quad -1.3496]x + v(t) \quad (30)$$

여기서  $v(t) = H^{-1}(0)y_d(t) = 13.3929y_d(t)$ 이다. Lorenz 시스템의 추적 제어 결과는 그림 5와 같다. 시스템의 출력이 원하는 기준 입력을 잘 추적하고 있음을 알 수 있다.

4 결론

본 논문에서는 혼돈 비선형 시스템의 제어를 위한 새로운 제어 기법을 제안하였다. 시스템의 동력학을 선형 부분과 비선형 부분으로 분리하였고 비선형 부분을 RBFN을 이용하여 근사화한 후 상쇄시켰으며 나머지 선형 부분에 대해 상태 궤환 제어기를 설계하여 원하는 제어 결과를 얻을 수 있게 하였다. 제안된 제어 방법의 타당성을 보이는 정리가 주어졌고 이를 Duffing 시스템과 Lorenz 시스템에 적용하여 만족할만한 결과를 얻었다.

[참고 문헌]

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [2] G. Chen and X. Dong, "From Chaos to Order - Perspectives and Methodologies in Controlling Chaotic Nonlinear Dynamical Systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 3, No. 6, pp. 1363-1409, 1993.
- [3] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Controlling Chaos," *Physical Review Letters*, Vol 64, No. 11, pp. 1196-1199, 12 March 1990.
- [4] orthogonal S. Chen, C. F. N. Cowan, and P. M. Grant, "Orthogonal Least Squares Learning Algorithm for Radial Basis Function Networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol. 2, No. 2, pp. 302-309, March 1991.
- [5] J. Moody and C. J. Darken, "Fast Learning in Networks of Locally-Tuned Processing Units," *Neural Computation*, Vol. 1, pp. 281-294, 1989.
- [6] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [7] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [8] J.-S. R. Jang, C.-T. Sun, and E. Mizutani, *Neuro-Fuzzy and Soft Computing*, Prentice-Hall, 1997.
- [9] G. Chen and X. Dong, "On Feedback Control of Chaotic Continuous-Time Systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 40, No. 9, pp. 591-601, September 1993.

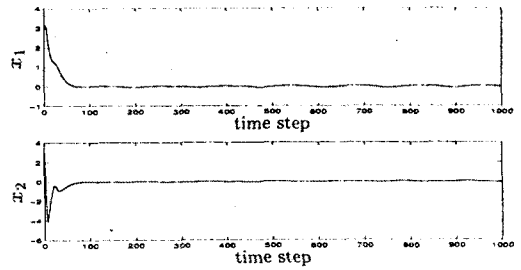


그림 2: Duffing 시스템의 안정화

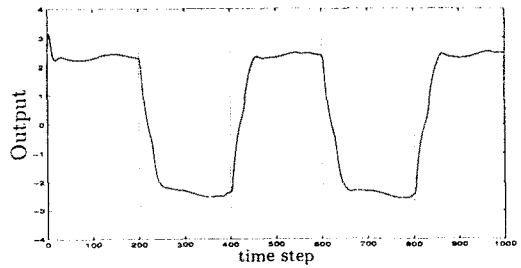


그림 3: Duffing 시스템의 추적 제어 (점선: 기준 입력, 실선: 시스템 출력)

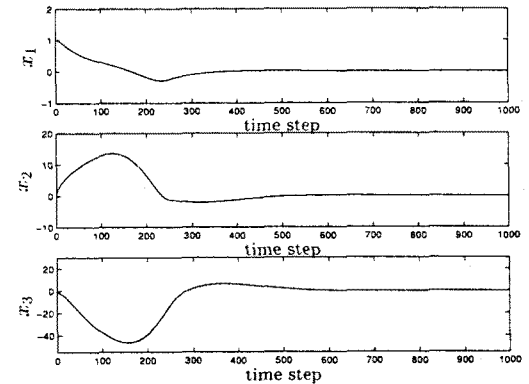


그림 4: Lorenz 시스템의 안정화

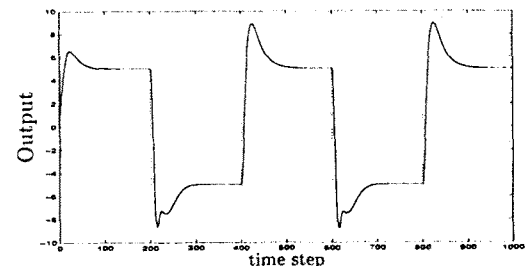


그림 5: Lorenz 시스템의 추적 제어 (점선: 기준 입력, 실선: 시스템 출력)