

직교함수를 이용한 시스템의 제어

안두수

성균관대학교 전기·전자·컴퓨터공학부

System Control Using Orthogonal Function

Doo-Soo Ahn

Dept. of Electrical & Computer Engineering, Sung Kyun Kwan University

Abstract - We have studied system identification model reduction method, optimal control by orthogonal functions. This paper presents the easy method that solves algebra equations instead of differential equations using Walsh, Haar, Block pulse function of orthogonal functions in state equation. The proposed algorithm is verified through some examples.

1. 서 론

본 논문에서는 직교함수를 이용하여 미분방정식으로 표현된 시스템을 적분방정식으로 변환하여 적분연산행렬을 도입하면 그 시스템의 특성을 간단한 대수 연립방식으로 시스템을 식별할 수 있는 알고리즘을 제시하였으며, 또한 모델 축소방법 중 최적 응답 방법을 응용하여 고차 시스템의 출력인 주기 안에서의 이산치 값과 저차의 출력의 이산치 값과의 자승오차를 최소화는 저차 모델의 파라미터 값들을 시행착오법에 의해 구하는 대신 고차 시스템의 출력을 직교함수 전개하여 출력에 대한 직교함수의 급수의 계수를 구하고 그 계수 값을 임의로 가정한 축소 전달함수의 출력계수로 대입하여 축소모델의 미지 파라미터를 구하는 축소모델을 얻는 방법을 제시하였다. 제시된 방법들의 유용성은 몇 가지 예를 통하여 검증하였다.

2. 직교함수

실수 또는 복소수 값을 갖는 연속(continuous)함수의 집합 $\{\phi_i(t)\}$ ($i=0, 1, 2, \dots$)가 정의구간 $[t_0, t_0+T]$ 에서 다음 식과 같은 직교특성을 가질 때, 이를 직교함수집합(orthogonal function set)이라고 한다.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} k, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

여기서 첨자 i 와 j 는 양의 정수이고, 가중치(weight) k 는 양의 정수 또는 한정된(fixed) 함수이다.

만약 k 가 1이면 정규(normalized)직교라고 하며, 그렇지 않은 경우에는 비정규(non-normalized)직교라고 한다.

정의구간 $[t_0, t_0+T]$ 에서 적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 그것의 급수 전개된 근사값 $\hat{f}(t)$ 와 사이의 평균자승오차(mean-square error)를 최소로 할 때에 다음과 같이 급수로 전개될 수 있다.

$$f(t) \approx \hat{f}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \phi_i(t) \quad (2.2)$$

2.1 윌쉬함수

이진배열의 윌쉬함수는 Rademacher함수에 의해 식(2.1.1)과 같이 표현된다.

$$Pal(n, t) = \prod_{i=1}^n Rad(i, t)^{b_i} \quad (2.1.1)$$

여기서, b_i 는 n 을 2진수로 표현할 때의 각 자리수 값이다. 적분연산자 P 는 식(2.1.2)과 같다.

$$P_{(m, n)} = \begin{bmatrix} P_{\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} & \dots & -\frac{1}{2m} I_{\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2m} I_{\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} & \dots & 0_{\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

$$P_{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

2.2 하알함수

하알함수는 다음과 같이 정의된다.

$$Har(2^p + m, t) = \begin{cases} \sqrt{2^p}, & \frac{m}{2^p} \leq t < \frac{(m+1)/2}{2^p} \\ -\sqrt{2^p}, & \frac{(m+1)/2}{2^p} \leq t < \frac{(m+1)}{2^p} \\ 0, & \text{그외 구간} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

여기서 $p = 0, 1, 2, \dots, \log_2 \frac{m}{2}$, $m = 0, 1, 2, \dots, 2^p - 1$ 이다.

하알 함수의 적분연산자 P 는 식(2.2.2)와 같다.

$$P_{(m, n)} = \begin{bmatrix} P_{\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} & -\frac{1}{\sqrt{2}} m^{-\frac{1}{2}} Har\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} m^{-\frac{1}{2}} Har\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) & 0_{\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

$$P_{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 블럭펄스함수

블럭펄스함수는 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

$$Bpf_i(\lambda) = \begin{cases} 1, & \frac{i}{m} \leq \lambda < \frac{i+1}{m} \\ 0, & \text{그외 구간} \end{cases}, \lambda \in [0,1] \quad (2.3.1)$$

블럭펄스함수의 적분연산자 P 는 식(2.3.2)과 같다.

$$P = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

3. 시스템의 제어 및 해석

3.1 파라미터 추정

n 차 미분방정식으로 표현되는 시스템은 다음과 같다.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} \quad (3.1.1)$$

미지의 파라미터인 a_k 와 b_k 를 추정하기 위하여 모든 초기조건은 0이 라고 하고 식(3.1.1)을 $\tau = t/t_f$ 로 스케일링하면 식(3.1.2)와 같다.

$$\frac{d^n}{d\tau^n} y(\tau) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t_f^{n-k} \frac{d^k}{d\tau^k} y(\tau) = \sum_{k=0}^n b_k t_f^{n-k} \frac{d^k}{d\tau^k} u(\tau) \quad (3.1.2)$$

식(3.1.2)의 양변에 n 회 적분을 취하면 다음과 같다.

$$y(\tau) + a_{n-1} t_f^1 y'(\tau) + \dots + a_0 t_f^n y^{(n)}(\tau) = b_{r-1} t_f^{n-1} u^{(n-1)}(\tau) + \dots + b_0 t_f^n u^{(n)}(\tau) \quad (3.1.3)$$

직교함수를 이용하여 각각의 벡터를 나타내면 다음과 같다.

$$u(\tau) = U^T \phi(\tau) \quad (3.1.4)$$

$$y(\tau) = Y^T \phi(\tau) \quad (3.1.5)$$

$$\text{여기서, } U = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{m-1} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{m-1} \end{bmatrix}, \phi(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_0(\tau) \\ \phi_1(\tau) \\ \vdots \\ \phi_{m-1}(\tau) \end{bmatrix}$$

적분연산을 이용하여 k 번째 적분을 표현하면 다음과 같다.

$$y^k(\tau) = Y^T P^k \phi(\tau) \quad (3.1.6)$$

$$u^k(\tau) = U^T P^k \phi(\tau) \quad (3.1.7)$$

식(3.1.4)~(3.1.7)의 관계를 식(3.1.3)에 적용하면

$$Y^T \phi(\tau) + a_{n-1} t_f^1 Y^T P \phi(\tau) + \dots + a_0 t_f^n Y^T P^n \phi(\tau) = b_{r-1} t_f^{n-1} U^T P^{n-1} \phi(\tau) + \dots + b_0 t_f^n U^T P^n \phi(\tau) \quad (3.1.8)$$

이고, 양변의 $\phi(\tau)$ 를 소거하고, 미지 파라미터에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$[t_f^1 P^T Y, t_f^2 (P^2)^T Y, \dots, t_f^n (P^n)^T Y - t_f^{n-1} (P^{n-1})^T U, \dots, -t_f^n (P^n)^T U] \theta = -Y \quad (3.1.9)$$

여기서 θ 가 구하고자 하는 미지의 파라미터이며 다음과 같다.

$$\theta^T = [a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0, b_{r-1}, \dots, b_0] \quad (3.1.10)$$

이를 간단히 벡터 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$F \theta = h \quad (3.1.11)$$

$$F = [t_f^1 P^T Y, t_f^2 (P^2)^T Y, \dots, t_f^n (P^n)^T Y, -t_f^{n-1} (P^{n-1})^T U, \dots, -t_f^n (P^n)^T U] \quad (3.1.12)$$

$$h = -Y \quad (3.1.13)$$

식(3.1.11)에서 θ 는 결정해야 할 $n+r+1$ 개의 미지 파라미터로 구성된 벡터이며 F 는 $m \times (n+r+1)$ 차 행렬이다. 그러므로 식(3.1.11)이 선형독립이라면 즉 $n+r+1$ 개의 파라미터를 결정할 수 있으려면 전개항수는 다음과 같은 식(3.1.14)를 만족하여야 한다.

$$m \geq n+r+1 \quad (3.1.14)$$

이때 θ 는 최소 자승법에 의하여 좌모의 역행렬(left pseudoinverse)을 이용하여 구하며 그 결과는 다음과 같다.

$$\theta = [F^T F]^{-1} F^T h \quad (3.1.15)$$

<적용예>

식(3.1.16)의 2차 미분방정식으로 표현되는 시스템에 입력이 단위계 단함수일때 측정된 출력데이터를 가지고 월쉬함수와 블럭펄스함수를 적용하여 미지의 파라미터를 추정해 보자.

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \quad (3.1.16)$$

표 1 월쉬함수, 블럭펄스함수를 적용한 수치 비교

	파라미터	월쉬함수	블럭펄스함수	실제값
m=4	a_1	2.66889	2.9962	3
	a_0	2.18655	1.9087	2
	b_1	0.01607	0.0149	0
	b_0	0.94256	0.9802	1
m=8	a_1	3.01251	2.9967	3
	a_0	1.96415	1.9787	2
	b_1	0.00094	0.0038	0
	b_0	0.99856	0.9947	1

초기조건은 0으로 간주하고 1/8 sec마다 측정된 출력데이터를 가지고 전개항수 m 이 4일 경우와 8일 경우를 구하면 표 1과 같다.

3.2 모델축소

다음과 같은 n 차의 선형시불변전달함수로 표현되는 시스템을 축소하자.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.2.1)$$

식(3.2.1)을 미분방정식 형태로 나타낸 후, 월쉬함수를 적용하기 위해 시간 스케일링하여 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{d^n}{d\tau^n} y(\tau) + a_{n-1} t_f \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} y(\tau) + \dots + a_0 t_f^n y(\tau) = b_{n-1} t_f \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} u(\tau) + b_{n-2} t_f^2 \frac{d^{n-2}}{d\tau^{n-2}} u(\tau) + \dots + b_0 t_f^n u(\tau) \quad (3.2.2)$$

식(3.2.2) 양변을 n 회 적분하여 적분방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$y(\tau) + a_{n-1} t_f y^{(1)}(\tau) + a_{n-2} t_f^2 y^{(2)}(\tau) + \dots + a_0 t_f^n y^{(n)}(\tau) = b_{n-1} t_f u^{(n-1)}(\tau) + b_{n-2} t_f^2 u^{(n-2)}(\tau) + \dots + b_0 t_f^n u^{(n)}(\tau) \quad (3.2.3)$$

식(3.2.3)에 월쉬함수를 도입한 후 월쉬벡터를 소거하면 다음과 같다.

$$C + a_{n-1} t_f P^T C + a_{n-2} t_f^2 (P^2)^T C + \dots + a_0 t_f^n (P^n)^T C = b_{n-1} t_f P^T U + b_{n-2} t_f^2 (P^2)^T U + \dots + b_0 t_f^n (P^n)^T U \quad (3.2.4)$$

축소하고자 모델의 전달함수를 다음과 같이 가정하자.

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{r-1}s^{r-1} + \beta_{r-2}s^{r-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^r + \alpha_{r-1}s^{r-1} + \alpha_{r-2}s^{r-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad r < n \quad (3.2.5)$$

식(3.2.4)을 얻는 과정과 동일하게 이를 월쉬함수 유한급수전개하면 다음과 같다.

$$C_r + \alpha_{r-1} t_f P^T C_r + \alpha_{r-2} t_f^2 (P^2)^T C_r + \dots + \alpha_0 t_f^r (P^r)^T C_r = \beta_{r-1} t_f P^T U + \beta_{r-2} t_f^2 (P^2)^T U + \dots + \beta_0 t_f^r (P^r)^T U \quad (3.2.7)$$

여기서 C_r 는 축소된 모델의 출력계수벡터이다.

$C = Cr$ 일 때 J 가 최소가 되므로 고차의 출력계수벡터 C 를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$C_r + \alpha_{r-1} t_f P^T C_r + \alpha_{r-2} t_f^2 (P^2)^T C_r + \dots + \alpha_0 t_f^r (P^r)^T C_r = \beta_{r-1} t_f P^T U + \beta_{r-2} t_f^2 (P^2)^T U + \dots + \beta_0 t_f^r (P^r)^T U \quad (3.2.8)$$

식(3.2.8)을 행렬로 표시하여 다음과 같다.

$$C_r = QR \quad (3.2.9)$$

여기서 R 은 미지 파라미터벡터, Q 는 $m \times 2r$ 행렬로써 각각 다음과 같다.

$$R = [\alpha_{r-1} \alpha_{r-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 \beta_{r-1} \beta_{r-2} \dots \beta_1 \beta_0]^T \quad (3.2.10)$$

$$Q = [-t_f P^T C_r, -t_f^2 (P^2)^T C_r, \dots, -t_f^{r-1} (P^{r-1})^T C_r, -t_f^r (P^r)^T C_r, t_f P^T U, t_f^2 (P^2)^T U, \dots, t_f^{r-1} (P^{r-1})^T U, t_f^r (P^r)^T U] \quad (3.2.11)$$

$$R = [Q^T Q]^{-1} Q^T C_r \quad (3.2.12)$$

이산계에서의 모델 축소 방법 역시 위와 같은 과정과 유사하게 수행 될 수 있다.

<적용예>

식(3.2.13)과 같은 3차 시스템을 식(3.2.14)과 같이 축소하자.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (3.2.13)$$

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (3.2.14)$$

전개항수 $m=8$ 로 하고 스케일 요소 (scale factor)를 $t_f=6$ 으로 하고 입력은 unit step 입력을 사용해 고차의 출력과 월쉬 함수와 블럭 펄스 함수에 의한 축소 모델의 출력파형을 비교하면 그림 1와 같이 축소모델 전달함수는 표 2와 같다.

표 2 축소모델의 전달함수

Walsh 함수	$\frac{Y_i(s)}{U(s)} = \frac{-0.0170771s + 1.1346518}{s^2 + 2.6573863s + 1.7019777}$
Block Pulse 함수	$\frac{Y_i(s)}{U(s)} = \frac{-0.0867s + 1.3266}{s^2 + 3s + 2}$

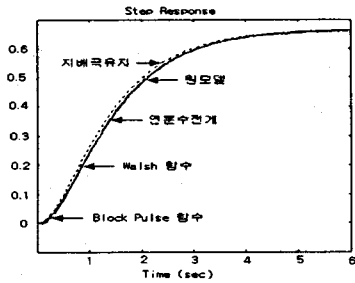


그림 1 축소모델의 출력과형

3.3 최적제어

식(3.31)과 같이 표현되는 상태방정식의 최적제어문제를 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.31)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3.32)$$

최적제어 벡터는 다음과 같다.

$$u(t) = -R^{-1} B^T(t) K(t) x(t) = -G(t)x(t) \quad (3.4)$$

여기서 $K(t) = \phi_{21}(t)\phi_{11}^{-1}(t)$ 이다.

월쉬함수 단일항 전개를 이용하기 위하여 식(3.31)을 $\tau = t/t_f$ 로 스케일링하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(\tau) = t_f A(\tau)x(\tau) + t_f B(\tau)u(\tau) \quad (3.35)$$

식(3.34)을 식(3.35)에 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(\tau) = t_f [A(\tau) - B(\tau)G(\tau)]x(\tau) \quad (3.36)$$

그러므로 식(3.36)의 해를 구함으로써 최적제어벡터 및 상태벡터를 결정할 수 있다. 식(3.36)을 $\tau = t/m$, ($0 \leq t < 1$ 일 때 $0 \leq \tau < 1/m$)로 치환하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \frac{t_f}{m} [A(t) - B(t)G(t)]x(t), \quad x(t=0) = x_0 \quad (3.37)$$

식(3.37)의 $\dot{x}(t)$ 를 월쉬함수 단일항으로 전개하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = S_i \phi_0(t) \quad (3.38)$$

그러므로 다음의 과정으로부터 최적제어벡터 및 상태벡터를 구할 수 있다.

$$S_i = [I - \frac{t_f}{2m} \bar{A}_i]^{-1} \frac{t_f}{m} \bar{A}_i x(i-1) \quad (3.39)$$

$$X_i = \frac{1}{2} S_i + x(i-1) \quad (3.310)$$

$$x(i) = S_i + x(i-1) \quad (3.311)$$

$$U_i = -G_{m+1-i} X_i \quad (3.312)$$

여기서 $\bar{A}_i = A_i - B_i G_{m+1-i}$ 이다. ($i = 1, 2, \dots, m$)

블러펄스 함수를 이용하기 위해서 식(3.34)을 식(3.31)에 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}B^T(t)K(t)]x(t) \quad (3.313)$$

최적제어벡터 및 상태벡터는 식(3.313)의 해를 구함으로써 결정할 수 있고 블러펄스 함수를 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$X_1 = (I - \frac{t_f}{2m} F_1)^{-1} X(0) \quad (3.314)$$

$$X_{k+1} = [(I - \frac{t_f}{2m} F_{k+1})]^{-1} (I + \frac{t_f}{2m} F_k) X_k \quad (3.315)$$

(단, $k = 1, 2, \dots, m-1$)

여기서 $F_k = A_k - B_k R^{-1} B_k^T K_k$

$$K_k = \phi_{21k} \phi_{11k}^{-1}$$

$$U_k = R^{-1} B_k^T K_k X_k \text{ 이다.}$$

<적용예>

식(3.316)과 같은 시스템에서 식(3.317)로 표시되는 평가함수를 고려하자.

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.316)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{15} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3.317)$$

초기조건은 $x(0) = [-3 \ 4]^T$ 이고

가중행렬은 $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 0.5$ 이다.

그림 2a와 그림 2b는 전개항수가 16일때의 최적제어 입력과 상태벡터를 나타내는데 월쉬함수 단일항전개와 블러펄스함수를 이용하였을 때 똑같은 결과가 나타남을 알 수 있다.

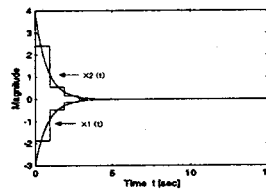


그림 2.a 최적 상태벡터

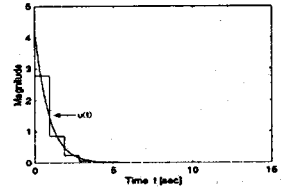


그림 2.b 최적 제어입력

4. 결 론

본 논문은 제어이론 중 시스템의 파라미터 추정, 모델축소, 최적제어에 대해 직교함수를 이용하여 해를 구하는 알고리즘을 제시하였다. 시스템 이론이나 제어이론에 있어 월쉬함수, 블러펄스함수와 같은 직교함수를 이용할 때의 이점은 미분방정식으로 표현된 시스템의 해를 적분연산행렬 P를 통해 간략화된 대수방정식으로부터 얻을 수 있다는 점에 있다. 전개항수가 늘어날수록 실제상태에 근접함을 알 수 있지만 월쉬함수나 하할함수에서는 적분연산행렬의 차수가 커지는 단점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 고속월쉬 변환방법 및 월쉬함수 단일항전개 방법 그리고 블러펄스 전개방법이 많이 사용되고 있다.

[참고 문헌]

- [1] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "A state-space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems", Int. J. Systems Sci., VOL. 6, NO. 9, pp.833-858, 1975.
- [2] Ning Show Hsu and Bing Cheng, "Analysis and Control of Time Varying Linear Systems via Block Pulse Functions", Int. J. Control, Vol.33, NO. 6, pp. 1107-1122, 1981
- [3] F. L. Lewis and D. W. Fountain, "Walsh Function Analysis of Linear and Bilinear Discrete Time Systems", Int. J. Control, Vol.53, No.4, pp.847-853, 1985
- [4] 안두수 의 "Haar 함수를 이용한 시스템동정에 관한 연구", 대한전기학회논문지. vol.36, NO.4, pp.287-292, 1987.
- [5] 안두수 "선형계의 차수 및 파라미터 추정을 위한 Walsh 함수 접근에 관한 연구". 대한전기학회논문지. vol-38. NO2. pp.137-143, 1989.
- [6] 안두수 "제어시스템 해석을 위한 직교함수와 응용" 북두출판사, 1997