다중 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성

이 희 송, 김 진 훈**
충북대학교 전기공학과*, 충북대학교 제어계측공학과**

Robust Stability of Uncertain Linear Systems with Multiple Time-delayed

Hee-Song Lee*, Jin-Hoon Kim**
Dept. of Electrical Engineering, Chungbuk National Univ.*
Dept. of Control and Instrumentation Engineering, Chungbuk National Univ.**

Abstract - In this paper, we consider the problem of the robust stability of uncertain linear systems with multiple time-varying delays. The considered uncertainties are both the unstructured uncertainty which is only known its norm bound and the structured uncertainty satisfying the matching conditions, respectively. We present conditions that guarantee the robust stability of systems based on Lyapunov stability theorem and H_∞ theory in the time domain. Finally, we show the usefulness of our results by numerical examples.

1. 서 론

시스템의 제어기를 설계할 때에 시간지연과 불확정성은 피할 수 없는 고려 대상 요소이다. 시스템 모델링 과정에서의 오차 및 근사화, 시스템 동작 시에 발생하는 시스템의 변화 또는 외부 노이즈, 외란 등에 의한 불확정성[1],[2]과 대규모 시스템의 수송지연, 센서의 측정 시간, 그리고 컴퓨터상의 처리시간 등에서 기인한 시간지연[3]은 실제 시스템과의 차이를 가져온다. 특히 이들 시간지연과 불확정성이 시변(time-varying)이거나 다중(multiple)일 경우에는 더욱 더 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 경우가 일반적이다. 이러한 이유에서 최근에 시간지연과 불확정성을 갖는 시스템의 안정성을 보장하는 강인 안정성(robust stability)문제의 연구가 계속되고 있다.[4],[6],[7]

시간지연은 그것들이 시변인가 또는 시불변인가에 따라 접근 방법이 다르기 때문에 결과 역시 다르게 된다. 또한 지연의 크기에 대한 정보를 포함하는지의 유무에 따라 시간지연 종속(time-delayed dependent)과 시간지연 독립(time-delayed independent)으로 나뉘고 접근방법 또한 다르다. 지연의 크기에 대한 정보를 포함하는 시간지연 종속은 주로 Razumikhin형 접근법[5]을 통해 안정을 보장하는 지연시간의 상한을 구하게 되고, 지연의 크기에 대한 정보를 포함하지 않는 시간지연 독립은 Lyapunov이론 접근법[7]을 이용한 해석을 통해 지연시간의 크기에 관계없이 시스템의 안정성을 보장하는 조건을 제시한다.

본 논문에서는 다중 시변 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성 문제가 고려되었다. 여기서 지연시간은 지연의 크기를 포함하지 않는 시간지연 독립을 대상으로 하고, 불확정성은 노옴 바운드(norm bound)만이 알려진 경우와 정합조건(matching conditions)형태의 경우에 대해서 각각 해석한다. 주요 결과는 Lyapunov 안정성 이론과 H_∞이론을 바탕으로 시간영역에서 시스템의 강인 안정성을 보장하는 조건이 다. 마지막으로 수치 예제를 통하여 제시된 결과의 유용성을 보인다.

이 논문에서는, $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고 대칭(symmetric)행렬 X에 대하여 $X>0$ 또는 $X\geq 0$는 각각 행렬 X가 양확정(positive definite), 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|_i$는 $i=1,2,\infty$에 대한 벡터 노옴 또는 이의 유사(induced)행렬을 말하며 $\|G(s)\|_\infty = \sup_{w\in R}\sigma_{\max}[G(jw)]$ 이다. 끝으로, I_n은 $n\times n$ 항등(identity)행렬이다.

2. 본 론

2.1 문제 기술

다음으로 기술되는 다중 시간지연을 갖는 불확정성 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = [A+\Delta A(t)]x(t) + \sum_{i=1}^{m}[A_i + \Delta A_i(t)]x(t-\tau_i(t)) \quad (1)$$

여기서 $x(t)\in R^n$는 상태이고, $A\in R^{n\times n}$은 안정한 행렬이며, 시변 시간지연을 나타내는 $\tau_i(t)$ 는 다음을 만족한다.

$$0\leq \tau_i(t) \leq \tau_i < \infty \qquad \forall i,\ i=1,\cdots,m$$
$$\dot{\tau}_i(t) \leq \overline{d}_i < 1 \qquad \overline{d}_i = \max(\dot{\tau}_i(t)) \quad (2)$$

그리고 시변 불확정성을 나타내는 행렬 $\Delta A(t)$, $\Delta A_i(t)$는 다음의 노옴 바운드만이 알려진 경우

$$\|\Delta A(t)\| \leq \eta_0\ ,\quad \|\Delta A_i(t)\| \leq \eta_i, \qquad \forall t>0 \quad (3)$$

또는 정합조건의 형태의 경우

$$\Delta A(t) = FD(t)E_0\ ,\ \Delta A_i(t) = FD(t)E_i,\ \ \forall t>0 \quad (4)$$

를 고려한다. 여기서 η_0, $\eta_i>0$이고 F, E_0, E_i는 알려진 상수 행렬이며, $D(t)$는 $D^T(t)D(t)\leq I_n$ 을 만족시키는 미지의 행렬이다.

이 논문에서는 식(3)과 (4)로 기술되는 시변 불확정성을 가진 시스템(1)의 강인 안정성을 보장하는 조건을 제시한다.

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요 결과의 증명에 사용된다.

<u>보조정리1</u>[8]: 임의의 행렬 X, Y에 대하여 다음이 성립한다.

$$\|XY\|_i \leq \|X\|_i \cdot \|Y\|_i\ ,\ \ i=1,2,\infty\ . \quad (5)$$

<u>보조정리2</u>[8]: 임의의 두 행렬 X, Y와 양의 스칼라 γ에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^TY + Y^TX \leq \gamma X^TX + \frac{1}{\gamma}Y^TY. \quad (6)$$

<u>보조정리3</u>[9]: 행렬 A가 안정할 때, 다음의 Riccati 방정식

$$A^TP + PA + PBB^TP + C^TC = 0 \quad (7)$$

의 해 대칭 행렬 $P \in R^{n \times n} > 0$가 존재 할 필요충분 조건은 다음의 부등식

$$\| C(jwI_n - A)^{-1} B \|_\infty < 1 \qquad (8)$$

을 만족하는 것이다. 여기서 $rank[C^T C] = n$이다.

2.2 강인 안정성 해석

다음의 정리1은 노음 바운드만이 알려진 불확정성(3)을 갖는 다중 시간지연 선형 시스템(1)의 강인 안정성 조건이다.

정리1: 불확정성(3)을 갖는 다중 시변 시간지연 선형 시스템 (1)에서 A는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하는 양의 스칼라 $\varepsilon, \alpha_i (i=1, \cdots, m)$이 존재하면

$$\| (2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma}\eta_0^2 I_n + \varepsilon I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A)^{-1} W_1 \|_\infty < 1 \qquad (9)$$

시스템 (1)은 점근적으로 안정하다.

여기서, $W_1(\alpha_i, \overline{d}_i, \gamma) =: \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} \eta_i^2 I_n + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} A_i A_i^T + \gamma I_n \right]^{\frac{1}{2}}$ 이다.

증명: 정리1의 조건식(9)와 보조정리3에 의하여 다음을 만족하는 $P=P^T>0$가 항상 존재한다.

$$A^T P + PA + P\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} \eta_i^2 I_n + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} A_i A_i^T + \gamma I_n \right] P + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma}\eta_0^2 I_n + \varepsilon I_n = 0 \qquad (10)$$

그리고 시스템(1)의 Lyapunov 후보함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V(x) = x^T(t) P x(t) + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{t-\tau_i}^{t} x^T(s) x(s) ds \qquad (11)$$

여기서 $P=P^T>0$는 식(10)의 해이다.
시스템(1)의 궤적에 따른 이의 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) \le\ & x^T(t)[A^T P + PA + \Delta A^T(t) P + P\Delta A(t)] x(t) \\ & + \sum_{i=1}^{m} x^T(t-\tau_i(t)) A_i^T P x(t) \\ & + \sum_{i=1}^{m} x^T(t-\tau_i(t)) \Delta A_i^T(t) P x(t) \\ & + \sum_{i=1}^{m} x^T(t) P A_i x(t-\tau_i(t)) \\ & + \sum_{i=1}^{m} x^T(t) P \Delta A_i(t) x(t-\tau_i(t)) + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^T(t) x(t) \\ & - 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (1-\dot{\tau}_i(t)) x^T(t-\tau_i(t)) x(t-\tau_i(t)) \end{aligned} \qquad (12)$$

보조정리2를 이용해 다시 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) \le x^T(t) \Big[& A^T P + PA + P\Big\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\dot{\tau}_i(t))} \Delta A_i(t) \Delta A_i^T(t) \\ & + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\dot{\tau}_i(t))} A_i A_i^T + \gamma I_n \Big\} P \\ & + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma} \Delta A^T(t) \Delta A(t) \Big] x(t)\end{aligned}$$

또한 관계식(2)와 불확정성(3) 그리고 관계식(10)을 이용하면 다음이 된다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) \le x^T(t) \Big[& A^T P + PA + P\Big\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} \|\Delta A_i(t)\|^2 I_n \\ & + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} A_i A_i^T + \gamma I_n \Big\} P \\ & + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma} \|\Delta A(t)\|^2 I_n \Big] x(t) \\ \le x^T(t) \Big[& A^T P + PA + P\Big\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} \eta_i^2 I_n \\ & + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} A_i A_i^T + \gamma I_n \Big\} P \\ & + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma} \eta_0^2 I_n \Big] x(t) \\ = -\varepsilon & I_n x^T(t) x(t) < 0, \quad \forall x(t) \ne 0\end{aligned}$$

따라서, Lyapunov 안정성 정리에 의해 조건식(9)를 만족하면 다중 시간지연 시스템(1)은 점근적으로 안정하다. ▲▲▲

따름 정리1: 불확정성(3)을 갖는 시스템(1)에서 시간지연이 $\dot{\tau}_i(t) = 0$ 경우, 즉 시변이 아닌 상수(constant)라 하자. 만약 다음을 만족하는 양의 스칼라 ε이 존재하면

$$\| (2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma}\eta_0^2 I_n + \varepsilon I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A)^{-1} W_2 \|_\infty < 1 \qquad (13)$$

시스템(1)은 점근적으로 안정하다. 여기서,

$W_2(\alpha_i, \gamma) =: \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} \eta_i^2 I_n + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} A_i A_i^T + \gamma I_n \right]^{\frac{1}{2}}$ 이다.

증명: 정리1의 증명과 같은 방법으로 하면 쉽게 되므로 여기서는 생략한다. ▲▲▲

다음에 오는 정리2는 정합조건 형태의 불확정성(4)를 갖는 다중 시간지연 선형 시스템(1)의 강인 안정성 조건이다.

정리2: 불확정성(4)를 갖는 다중 시변 시간지연 선형 시스템 (1)에서 A는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하는 양의 스칼라 $\varepsilon, \alpha_i (i=1, \cdots, m)$이 존재하면

$$\| (2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma} E_0^T E_0 + \varepsilon I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A)^{-1} W_3 \|_\infty < 1 \qquad (14)$$

시스템(1)은 점근적으로 안정하다.

여기서 $W_3(\alpha_i, \overline{d}_i, \gamma) =: \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} FF^T + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} A_i A_i^T + \gamma FF^T \right]^{\frac{1}{2}}$

이고, $\delta =: \sum_{i=1}^{m} \|E_i E_i^T\|$ 이다.

증명: 정리2의 조건식(14)와 보조정리3에 의하여 다음을 만족하는 $P=P^T>0$가 항상 존재한다.

$$A^T P + PA + P\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\delta}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} FF^T + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} A_i A_i^T + \gamma FF^T \right] P + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n + \frac{1}{\gamma} E_0^T E_0 + \varepsilon I_n = 0 \qquad (15)$$

그리고 보조정리2와 불확정성(4)를 이용해 식(12)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) \le x^T(t) \Big[& A^T P + PA + PFD(t) E_0 + E_0^T D^T(t) F_0^T P \\ & + P\Big\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\dot{\tau}_i(t))} FD(t) E_i E_i^T D^T(t) F^T \\ & + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i(1-\dot{\tau}_i(t))} A_i A_i^T \Big\} P + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_n \Big] x(t)\end{aligned}$$

또한 관계식(2)와 보조정리2를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) \le x^T(t) \Big[& A^T P + PA + \gamma PFF^T P + \frac{1}{\gamma} E_0 E_0^T \\ & + P\Big\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta}{\alpha_i(1-\overline{d}_i)} FF^T \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\alpha_i(1-\bar{d}_i)}A_iA_i^T\Big\}P+2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i I_n\Big]x(t)$$

여기서 $\delta =: \sum_{i=1}^{m}\|E_iE_i^T\|$ 이다.

관계식(15)를 이용해 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) \le x^T(t)\Big[A^TP+PA+P\Big\{&\sum_{i=1}^{m}\frac{\delta}{\alpha_i(1-\bar{d}_i)}FF^T \\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\alpha_i(1-\bar{d}_i)}A_iA_i^T+\gamma FF^T\Big\}P \\ &+2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i I_n+\frac{1}{\gamma}E_0^TE_0\Big]x(t) \\ =-\epsilon I_n x^T(t)x(t)<0,\quad &\forall x(t)\neq 0\end{aligned}$$

따라서, Lyapunov 안정성 정리에 의해 조건식(14)를 만족하면 다중 시간지연 시스템(1)은 점근적으로 안정하다. ▲▲▲

따름 정리2: 불확정성(4)를 갖는 시스템(1)에서 시간지연이 $\dot{\tau}_i(t)=0$ 경우, 즉 시변이 아닌 상수라 하자. 만약 다음을 만족하는 양의 스칼라 ϵ이 존재하면

$$\|(2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i I_n+\frac{1}{\gamma}E_0^TE_0+\epsilon I_n)^{\frac{1}{2}}(sI_n-A)^{-1}W_4\|_\infty<1 \quad (16)$$

시스템(1)은 점근적으로 안정하다. 여기서,

$$W_4(\alpha_i,\gamma)=:\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\delta}{\alpha_i}FF^T+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\alpha_i}A_iA_i^T+\gamma FF^T\Big]^{\frac{1}{2}}$$ 이다.

증명: 정리2의 증명과 같은 방법으로 하면 쉽게 되므로 여기서는 생략한다. ▲▲▲

2.3 수치 예제

위의 제시된 결과들의 유용성을 보이기 위해 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&(A+\Delta A(t))x(t)+(A_1+\Delta A_1(t))x(t-\tau_1(t)) \\ &+(A_2+\Delta A_2(t))x(t-\tau_2(t)) \qquad (17)\end{aligned}$$

여기서, $A=\begin{bmatrix}-30 & -20\\ 10 & 0\end{bmatrix}$, $A_1=\begin{bmatrix}1.2 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix}$

$A_2=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}$ 이고, 시간지연 $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\tau_1(t)=\tau_1+0.25\sin(t)$$
$$\tau_2(t)=\tau_2+0.25\cos(t)$$

예제1: 시스템(17)의 불확정성이 다음과 같이 노음 바운드만이 알려진 형태로 표현된다고 생각하자.

$$\|\Delta A(t)\|\le\eta_0,\quad \|\Delta A_i(t)\|\le\eta_i \qquad (18)$$

이 경우 정리1의 조건식(9)를 만족시키기 위한 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$의 최적 값을 MATLAB™의 constr.m을 이용하여 구하고 그에 따른 결과 값이 표.1에 있다.

표.1($\epsilon=1\times10^{-5}$)

η_0	η_1	η_2	α_1	α_2	γ	결과 값
0.5	0.05	0.05	1.0872	0.4549	0.4510	0.6075
1.0	0.01	0.01	1.2826	0.5345	0.7639	0.6991
1.5	0.5	0.2	1.4394	0.5962	1.1062	0.8335

위의 경우 결과 값이 모두 조건식(9)를 만족하므로 불확정성(18)을 갖는 다중 시간지연 선형 시스템(17)은 안정하다.

예제2: 시스템(17)의 불확정성이 다음과 같은 정합조건의 형태로 알려진 경우를 생각하자.

$$\Delta A(t)=FD(t)E_0,\quad \Delta A_i(t)=FD(t)E_i \qquad (19)$$

여기서,

$$E_0=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix},\ E_1=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.01\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}0.05 & 0\\ 0 & 0.05\end{bmatrix}$$

이고, $\delta=:\sum_{i=1}^{m}\|E_iE_i^T\|$ 라 놓자.

이 경우 정리2의 조건식(14)를 만족시키기 위한 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$의 최적 값을 MATLAB™의 constr.m을 이용하여 구하고 그에 따른 결과 값이 표.2에 있다.

표.2($\epsilon=1\times10^{-5}$)

F	α_1	α_2	γ	결과 값
$\begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 0 & 0.25\end{bmatrix}$	1.5540	0.6476	1.2606	0.5371
$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	1.0872	0.4549	0.4510	0.6076
$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$	0.8257	0.3499	0.2977	0.7035

위의 경우 결과 값이 모두 조건식(14)를 만족하므로 불확정성(19)를 갖는 다중 시간지연 선형 시스템(17)은 안정하다.

3. 결 론

이 논문에서는 Lyapunov 안정성 이론과 H_∞ 이론을 이용해 시스템의 불안정과 성능 저하의 주요원인인 다중 시간지연과 불확정성을 갖는 선형 시스템의 안정성을 보장하는 강인 안정성 조건을 제시했다. 고려된 불확정성은 노음 바운드만이 알려진 경우와 정합조건의 경우로 두 가지의 불확정성에 대해 각각 해석하였다. 마지막으로 수치예제를 통해 주어진 결과의 유용성을 보였다.

[참 고 문 헌]

[1]P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and K. Zhou, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H_∞ Control Theory", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.35, pp.356-361. 1990.

[2]C. Marsh and H. Wei, "Robustness Bounds for Systems with Parametric Uncertainty", *Automatica*, vol.32, no.10, pp.1447-1453, 1996

[3]J. Chen, D. Xu and B. Shafai, "On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.40, pp.1675-1680, 1995

[4]H. Trinh and M. Aldeen, "Stability robustness bounded for linear systems with delayed perturbations", *IEE. Proc-Control Theory Appl.*, vol.142, No.4, July, pp.345-350. 1995.

[5]B. Xu and Y. Liu,"An Improved Razumikhin -Type Theorem and Its Applications", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.39, pp.839-841, 1994.

[6]M. S. Mahmoud and N. F. Al-Muthairi. "Quadratic Stabilization of Continuous Time Systems with State-Delay and Norm-Bounded Time-Varying Uncertainties". *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.39, pp.2135-2139. 1994.

[7]J-H Kim, "Robust stability of linear systems with delayed perturbations", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.41, pp.1820-1822, 1996.

[8]A. Wienmann, *"Uncertain Models and Robust Control"*, Springer-Verlag, 1991.

[9]M. Green, D. Limebeer, *"Linear Robust Control"*, Prentice Hall, 1995.