부정 내적 공간에서의 준최적 분산 H^∞ 상태 추정기 설계

°나원상*, 진승희*, 박진배*, 윤태성**, 최윤호***
*연세대학교 전기공학과, **창원대학교 전기공학과, ***경기대학교 전자공학과

Design of Decentralized H^∞ State Estimator in Indefinite Inner Product Spaces

Won-Sang Ra, Seung-Hee Jin, Jin-Bae Park, Tae-Sung Yoon, Yoon-Ho Choe
*Department of Electrical Engineering, Yonsei University
**Department of Electrical Engineering, Changwon National University
***Department of Electronic Engineeing, Kyonggi University

Abstract - In this paper, we propose a centralized H^∞ state estimator for the multi state estimation problem using the re- sult suboptimal H^∞ filter is a special form of Ka filter whose state equations are defined in ind inner product spaces. Con- ventional decentr filters are based on Kalman filter assumes processes and measurements noises are w Gaussian noise. Therefore, Kalman based decent filter design hasn't robust performance in situation. Simulation results show that de- cent H^∞ filter has robust perfotmance in worst case sensor fault situation.

1. 서 론

상태 추정 문제에 있어서 최적 추정기로 알려진 칼만 필터는 노이즈 프로세스가 *Gaussian*이라는 가정하에서 최적 추정치를 제공하지만, 시스템의 상태 변수가 많아지는 다중 센서 융합 문제에 칼만 필터를 적용할 경우, 계산량의 증가로 인한 프로세스 시간의 증가와 높은 데이터 전송률로 인한 문제점을 안고 있는 것으로 알려져 있다. 또한 구조적으로 고장에 강인하지 못한 경우가 많다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 근래에 *Speyer*, *Willsky*, *Hassimipour* 등에 의해 분산 상태 추정 기법이 제안되었다.[1,2] 이들이 제안한 분산 상태 추정 기법은 표준 칼만 필터를 지역 필터로 하고, 이들로 얻어진 추정치로부터 전역 추정치를 얻어내는 방법을 취하고 있다. 즉, 각각의 지역 필터에 의해서 지역 최적 추정치를 얻고, 중앙 융합 필터에 의해서 이들 지역 추정치로부터 시스템의 상태 벡터의 전역 최적 추정치를 얻어내므로 고장에 강인하고, 데이터 전송율과 대역폭을 줄일 수 있어 실시간 응용에 적합하다. 그러나 칼만 필터에 기반한 기존의 분산 상태 추정기는 실제 응용시, 시스템 모델링에 오차가 있거나, 외부 잡음에 대한 사전 정보가 부족할 경우 칼만 필터가 더 이상 최적 추정치를 주지 못하므로 추정 오차가 발생할 소지가 크다. 따라서 최근에는 이러한 문제에 강인하게 대처할 수 있는 분산 상태 추정기 설계에 대한 요구가 증가하고 있다.

본 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 H^∞ 놈 개념을 도입한 H^∞ 필터를 이용하여 분산 상태 추정 기법을 제안한다. 칼만 필터를 지역, 중앙 필터로 사용한 기존의 분산 상태 추정기법이 H^2 관점에서 최적 추정을 하는 반면, 제안되는 분산 H^∞ 상태 추정 기법에서는 각각의 지역 필터와 중앙 융합 필터가 H^∞ 관점에서 준최적이다. 즉, 제안되는 분산 H^∞ 상태 추정기는 지역 필터와 중앙 융합 필터가 외란으로부터 상태추정 오차로의 최대 에너지 이득을 γ^2이하로 제한할 수 있으므로 기존의 분산 상태 추정 기법에 비하여 강인한 성능을 갖는다. 제안된 분산 H^∞ 상태 추정 기법의 개발을 위해 본 논문에서는 준최적 H^∞ 상태 추정 문제가 특정한 스칼라 이차 함수의 최소화를 통한 부정 내적 공간 상에서의 일반적인 칼만 필터 문제와 같아진다는 사실에 근거하여 필터 이득 방정식의 계산을 위해 기존의 칼만 이득 방정식의 계산방법을 응용, 변형된 H^∞ 필터 이득 방정식을 제안한다.[3,4] 마지막 절에서는 제안된 분산 H^∞ 상태 추정 기법과 기존의 칼만 필터를 이용한 분산 상태 추정기의 성능을 예제를 통하여 비교한다.

2. 준최적 분산 H^∞ 상태 추정 문제 설정

일반적인 분산 상태 추정 문제에서 지역 모델과 전역 모델의 동역학은 동일한 가정하에 있다. 이러한 가정하에서 주어지는 상태 모델은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i \\ y_i^k = C_i^k x_i + v_i^k \\ z_i = L_i x_i \end{cases} \tag{1}$$

여기에서, $k=1,\cdots,N$은 k번째 지역 시스템을 나타낸다. F_i, G_i, C_i는 적당한 차원을 갖는 알려진 행렬이고, $u^k, v^k \in l^2$은 각각 프로세스 잡음, 관측 잡음 신호로 통계적 특성을 알지 못하는 *energy-boundea* 신호이다. z_i는 분산 H^∞ 상태 추정 문제에서 추정되어야 할 상태 추정 벡터이다.

추정 기법을 $\mathcal{T}$라고 하면, 시간 0에서 i까지의 관측치로부터의 추정치는 $\hat{z}_{di} = \mathcal{T}(y_0, \cdots, y_i)$이고, 따라서 필터링 오차는 다음과 같이 주어진다.

$$e_{f,i} = \hat{z}_{di} - L_i x_i \tag{2}$$

2.1 준최적 분산 H^∞ 상태 추정 문제

시변 상태 방정식 (1)과 필터링 오차 (2)에 대하여 $\gamma > 0$이 주어졌을 때, $\|T_i(\mathcal{T})\|_\infty < \gamma$ 인 준최적 분산 H^∞ 상태 추정 기법을 찾는다. 이때, $\|T_i(\mathcal{T})\|_\infty$는 외란에서 오차 신호로의 *infinite*놈이다.

$$\sup_{x_0,\,u,\,v}\frac{\sum_{i=0}^{N}e_{f,i}^{*}e_{f,i}}{(x_0-\hat{x}_0)^{*}\Pi_0^{-1}(x_0-\hat{x}_0)+\sum_{i=0}^{N}u_i^{*}u_i+\sum_{i=0}^{N}v_i^{*}} \tag{3}$$

여기에서 $\Pi_0>0$은 x_0와 $\hat{x}_0$의 근접성을 반영하는 행렬이고, γ는 외란의 감쇄 정도를 나타내는 값이다. 만일 각각의 지역, 중앙 필터가 *unbiasea*라면, 필터 초기치에 영향을 받지 않으므로 $\hat{x}_0=$ㅣ이라고 해도 일반성을 잃지 않는다. 따라서 위의 식 (3)을 다음과 같이 스칼라 이차함수 형태의 성능 지수 함수로 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned}&J_{f,N}(x_0,u_0,\cdots,u_N,y_0,\cdots,y_N)\\&=x_0^{*}\Pi_0^{-1}x_0+\sum_{i=0}^{N}u_i^{*}u_i+\sum_{i=0}^{N}(y_i-H_ix_i)^{*}(y_i-H_ix_i)\\&\quad-\gamma^{-2}\sum_{i=0}^{N}(\hat{z}_{fi}-L_ix_i)^{*}(\hat{z}_{fi}-L_ix_i)\\&=x_0^{*}\Pi_0^{-1}x_0+\sum_{i=0}^{N}u_i^{*}u_i\\&\quad+\sum_{i=0}^{N}\left(\begin{bmatrix}y_i\\\hat{z}_{fi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H_i\\L_i\end{bmatrix}x_i\right)^{*}\begin{bmatrix}I&0\\0&-\gamma^{-2}I\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}y_i\\\hat{z}_{fi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H\\L\end{bmatrix}\right.\end{aligned} \tag{4}$$

즉,

$$\min_{\{x_0,\,u_0,\cdots,u_N\}}J_{f,N}(x_0,u_0,\cdots,u_N,y_0,\cdots y_N$$

이면 준최적 H^{∞} 상태 추정 문제를 만족하는 추정 기법을 찾을 수 있다.

2.2 상태 공간에서의 스칼라 이차 함수의 최소화

다음과 같은 일반적인 시변 상태 방정식을 생각해보자.

$$\begin{cases}x_{i+1}=F_ix_i+G\\y_i=H_ix_i+v_i\end{cases} \tag{5}$$

식 (5)에서의 관측치 $\{y_i\}_{i=(}^{N}$를 알고 있을 때, x_0와 $\{u_i\}_{i=1}^{N}$에 대하여 다음과 같은 스칼라 이차 함수가 주어진다.

$$J(x_0,u,y)=x_0^{*}\Pi_0^{-1}x_0+\sum_{i=0}^{N}\begin{bmatrix}u_i^{*}&v_i^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_i&S_i\\S_i^{*}&R_i\end{bmatrix}^{-} \tag{6}$$

여기에서 $Q_i, S_i, R_i,$ 는 식 (6)에 대하여, $\langle\ ,\ \rangle$를 상태 공간에서의 *Gramia*ㄴ (*Hilbert* 공간에서의 공분산) 이라고 할 때, 다음 식을 만족한다.

$$\left\langle\begin{bmatrix}x_0\\u_i\\v_i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_0\\u_i\\v_i\end{bmatrix}\right\rangle=\begin{bmatrix}\Pi_0&0&0\\0&Q_i&S_i\\0&S_i^{*}&R\end{bmatrix} \tag{7}$$

이제, 식 (4)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}&J_{f,N}(x_0,u_0,\cdots,u_N,y_0,\cdots,y_N)\\&=x_0^{*}\Pi_0^{-1}x_0+\sum_{i=0}^{N}u_i^{*}u_i\\&\quad+\sum_{i=0}^{N}\left(\begin{bmatrix}y_i\\\hat{z}_{fi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H_i\\L_i\end{bmatrix}x_i\right)^{*}\begin{bmatrix}I&0\\0&-\gamma^{-2}I\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}y_i\\\hat{z}_{fi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H\\L\end{bmatrix}\right.\\&=x_0^{*}\Pi_0^{-1}x_0\\&\quad+\sum_{i=0}^{N}\left[u_i^{*}\left(\begin{bmatrix}y_i\\\hat{z}_{fi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H_i\\L_i\end{bmatrix}x_i\right)^{*}\right]\\&\quad\times\begin{bmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&0&-\gamma^{-2}I\end{bmatrix}\left[u_i\left(\begin{bmatrix}y_i\\\hat{z}_{fi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H_i\\L_i\end{bmatrix}x\right.\right.\end{aligned} \tag{8}$$

식 (8)에서, 일반적인 시변 상태 방정식에 대한 스칼라 이차 함수식 (6)과 준최적 H^{∞} 상태 추정 문제에서의 스칼라 이차 함수식 (4) 사이의 대응관계를 살펴보면,

$$Q_i=I,S_i=0,R_i=\begin{bmatrix}I&\\0&-\end{bmatrix} \tag{9}$$

임을 알 수 있다. 여기에서 R_i는 부정 행렬 (*Indefinite Matrix*)이다. 식(5),(6)의 관계로부터 준최적 H^{∞} 상태 추정 문제를 다음과 같은 일반적인 상태 방정식 형태로 쓸수 있다.

$$\begin{cases}x_{i+1}=F_ix_i+G_iu_i\\\begin{bmatrix}y_i\\\hat{z}_{fi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_i\\L_i\end{bmatrix}x_i+v_i\end{cases} \tag{10}$$

따라서 위와 같이 변형된 준최적 H^{∞} 추정 문제에 대한 상태 방정식의 이차 성능 지수 함수인 *error Gramia*ㄴ은 칼만 필터에서 처럼 *Hilbert* 공간이 아닌 부정 내적 공간에서 다루어져야 한다. (6),(7)의 관계로부터 준최적 H^{∞} 상태 추정 문제의 부정 내적 공간에서의 *Gramia*ㄴ $\langle\ ,\ \rangle$은 다음과 같이 정의된다.

$$\left\langle\begin{bmatrix}x_0\\u_i\\v_i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_0\\u_i\\v_i\end{bmatrix}\right\rangle=\begin{bmatrix}\Pi_0&0&0&0\\0&I\delta_{ik}&0&0\\0&0&I\delta_{ik}&0\\0&0&0&-\gamma^{-2}I\delta\end{bmatrix}$$

2.3 부정 내적 공간에서의 칼만 필터

식 (5)와 같은 상태 방정식을 갖는 시스템에 대한 칼만 필터 게인은 다음과 같이 주어진다.[5]

$$K_{f,i}=P_iH_i^{*}(R_i+H_iP_iH_i^{*}) \tag{11}$$

이때, P_i는 예측된 추정치와의 오차 공분산으로, 다음 순환식으로부터 구할 수 있다.

$$P_{i+1}=F_iP_iF_i^{*}-K_{p,i}R_{e,i}K_{p,i}^{*}+G_iG \tag{12}$$

여기에서,

$$\begin{aligned}R_{e,i}&=\langle e_i,e_i\rangle=R_i+H_iP_iH_i^{*}\\K_{p,i}&=(F_iP_iH_i^{*}+G_iS_i)R_{e,i}^{-}\\e_i&=y_i-H_i\hat{x}_i\end{aligned}$$

이제, 필터링된 상태 추정치와의 오차 공분산을 P_{fi}라고 하면, 다음 *Information Form Matrix* 식을 얻는다.

$$P_{fi}^{-1}=P_i^{-1}+H_i^{*}R_i^{-} \tag{13}$$

식 (13)을 이용하여, *Matrix Inversion Lemma*에 의해 식 (11)을 전개해나가면, 다음 식을 결과식으로 얻는다.

$$K_{A,i} = P_{fi} H_i^* R_i^- \tag{14}$$

2.4 부정 내적 공간에서의 준최적 H^∞ 필터

부정 내적 공간에서의 준최적 H^∞ 상태 추정 문제는 2.2절에서 보인바와 같이 (10)의 상태 방정식을 갖는다. 따라서 동일한 형태를 갖는 상태 방정식 (5),(10)를 비교하여 (5)의 상태 방정식을 기본으로 2.3 절에서 전개된 부정 내적 공간에서의 칼만 필터 식을 적용하면, 부정 내적 공간에서의 준최적 H^∞ 필터 *Information Form Matrix*와 필터 게인을 얻을 수 있다.[1,2]

즉, 식 (5)와 (10)을 비교하면, $H_i \rightarrow \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix}$이고, 식 (9)에서 $R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix}$ 이므로,

$$\begin{aligned} P_{fi}^{-1} &= P_i + \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \\ &= P_i^{-1} + H_i^* H_i - \gamma^{-2} L_i^* * L_i \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} K_{A,i} &= K_{f,i} \\ &= P_i H_i^* (R_i + H_i P_i H_i^*)^{-1} \\ &= (P_i^{-1} + H_i^* H_i)^{-1} H_i \\ &= (P_{fi}^{-1} - H_i^* H_i + \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i + H_i^* H_i) \\ &= (P_{fi}^{-1} + \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i)^{-1} H_i \\ &= (I + \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i P_{fi})^{-1} P_{fi} H_i^* \end{aligned} \tag{16}$$

또한, 상태 추정치와 *posteriori Riccati solution*에 대한 *time update*식은 일반적인 칼만 필터의 *Projection*과 동일하게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= F_i \hat{x}_{fi} \\ P_{i+1|i} &= F_i P_{fi-1} F_i^* + G_i \end{aligned}$$

3. 분산 H^∞ 상태 추정기 설계

3.1 분산 H^∞ 상태 추정기 설계

앞서 서론에서도 밝힌 바와 같이 분산 상태 추정기는 병렬 구조를 가진 지역 필터와 중앙 융합 필터로 구성되므로 분산 H^∞상태 추정기 설계를 위해서는 이 두 필터를 각각 설계해야 한다. 먼저 다음과 같은 지역 모델과 전역 모델이 다른 일반적인 경우의 필터 모델을 생각해 보자.[3]

$$\begin{cases} x_{i+1}^k = F_i^k x_i^k + G_{i}^k \\ y_i^k = H_i^k x_i + v_i^k \\ z_i^k = L_i^k x_i^k \end{cases} \tag{17}$$

여기에서 x_i^k는 k번째 지역 필터의 상태 벡터이고, F_i^k, G_i^k, H 는 지역 필터 모델을 구성하는 행렬이다. 따라서 전역 모델에서의 관측 모델식은 전역 모델과 지역 모델이 같은 식 (1)의 경우,

$$\begin{bmatrix} y_i^1 \\ y_i^2 \\ \vdots \\ y_i^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ \vdots \\ C_i^N \end{bmatrix} x_i +$$

이고, 2.4절 의 결과를 이용해 설계한 전역 상태 추정기는 다음과 같다.

$$\hat{x}_{fi} = \hat{x}_i + (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{fi} L_i^* L_i)\, C_i^* (y_i - C_i \tag{18}$$

만일 관측 행렬과 지역 모델 필터의 측정 행렬간의 관계가 $C_i^k = H_i^k M_i^k$ 와 같이 주어진다면, k번째 지역 필터 식과 중앙 융합 필터식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{fi}^{\,k} = \; & \hat{x}_i^{\,k} + (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{fi}^{\,k} L_i^{k*} L_i^k) \\ & \times P_{fi}^{\,k} H_i^{k*} (y_i^k - H_i^k \hat{x}_i^k) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{fi} = & (I - (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{fi} L_i^* L_i)^{-1} P_{fi} H_i^* H_i)\, \hat{x}_{fi-1} \\ & + (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{fi} L_i^* L_i)^{-1} \\ & \times \sum_{k=1}^{N} P_{fi}^{\,k-1} A_i^k \\ & \times \left(\hat{x}_{fi}^{\,k} - [I - A_i^{k-1} P_{fi}^{\,k} H_i^{k*} H_i^k] \hat{x}^k{}_{fi-} \right. \end{aligned} \tag{20}$$

3.2 시뮬레이션

시뮬레이션은 일반적인 상황과 고장 상황에서의 분산 칼만 필터와 분산 H^∞ 필터의 성능 비교, 그리고 센서 고장 상황에서의 H^∞ 필터와 분산 H^∞ 필터의 비교 실험으로 나누어 수행하였다. H^∞ 필터의 잡음 감쇄수준 $\gamma =$ 이라고 하고, 일반 적인 상황에서의 잡음은 백색잡음으로 가정하고, 센서의 고장 상황에서는 일반적으로 측정 신호에 갑자기 큰 잡음신호가 발생하게 되므로 $max\ \|v_i\| = 1$로 가정하였다. 각각의 시뮬레이션 결과는 그림 1,2,3과 같다.

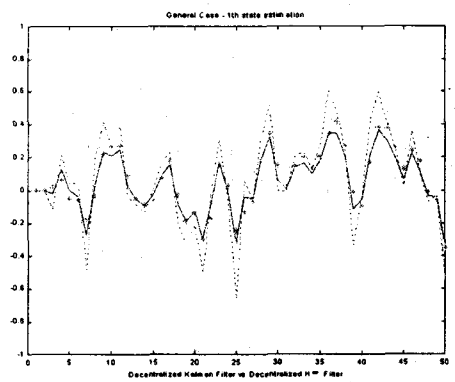

그림1. 일반적인 상황에서의 분산 칼만, H^∞ 필터 추정치

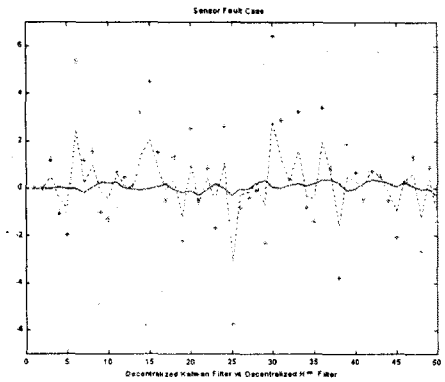

그림2. 고장 상황에서의 분산 칼만, H^{∞} 필터 추정치

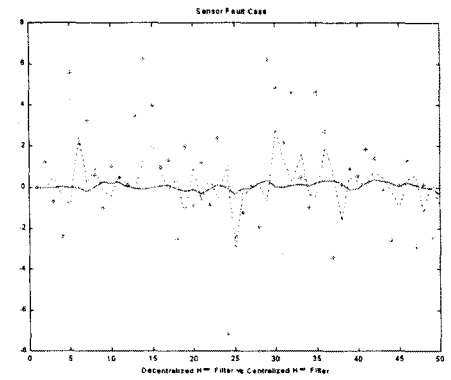

그림3. 고장 상황에서의 분산, 중앙 H^{∞} 필터 추정치

3. 결 론

본 논문에서는 다중 센서 융합 문제에 기존의 분산 칼만 필터링 기법을 대신하여 외부 잡음에 대한 오차 신호를 γ이하로 감소시켜 *worst case*에서의 강인성을 보장하는 분산 H^{∞} 필터링 기법을 제안하였다. 이때, H^{∞} 필터 설계에서는 *Hassibi*[3]의 이론에 근거하여 부정 내적 공간에서 H^{∞} 필터를 설계하는 방법을 이용하였다. 실험 결과에서도 보여지듯이 *Sensor Fault*에 발생하는 측정 잡음의 급격한 크기, 속성 변화시 H^{∞} 필터가 보다 효과적인 필터링 기법이 될 수 있으며, 따라서 다중 센서 상황에서 기존의 방법에 비해 강인한 성능을 보장한다. 차후로 연구해야 할 과제는 실제 응용에서 필연적으로 발생하는 모델링에서의 파라미터 불확실성 즉, 지역 필터와 중앙 융합 필터 모델에 오차가 있는 경우에도 만족할 만한 성능을 보이는 강인 H^{∞} 분산 상태 추정 기법 설계이다.

[참 고 문 헌]

[1] Hassimipour et. al., *"Decentralized Structures for Parallel Kalman Filtering"*, IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. 33, No. 1, pp. 88-94, 1988.

[2] Willsky et. al., *"Combining and Updating of Local Estimates and Regional Maps along Sets of One-Dimensional Tracks"*, IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. 27, No. 4, pp. 799-813, 1982

[3] Hassibi et. al., *"Linear Estimation in Krein Spaces"*, IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. 41, No. 1, pp. 18-49, 1996.

[4] Sayed et. al., *"Inertia Conditions for The Minimization of Quadratic Forms in Indefinite Metric Spaces"*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 87, pp. 309-347, 1996.

[5] Mynyue Fu et. al., *"H^{∞} Estimation for Uncertain Systems"*, Int. Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 2, pp. 87-105, 1992.

[6] Souza et. al., *"Robust H^{∞} Filtering for Continuous Time Varying Uncertain System with Deterministic Input Signals"*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 43, No. 3, pp. 709-719, 1995.

[7] Moshe Kam et. al, *"Sensor Fusion for Mobile Nabigation"*, Proc. of IEEE, Vol. 85, No. 1, pp. 108-119, 1997.

[8] M.S.Grewal, A.P.Andrews, *"Kalman Filtering - Theory and Practice"*, 1993.