

## 대규모 전력계통의 미소신호 안정도 해석을 위한 Hessenberg process의 수렴특성 가속화 방법

송성근<sup>\*</sup> 남해곤<sup>\*</sup> 심관식<sup>\*\*</sup> 문채주<sup>\*\*\*</sup> 김용구<sup>\*</sup>  
전남대<sup>\*</sup> 서남대<sup>\*\*</sup> 목포대<sup>\*\*\*</sup>

### A Method to Accelerate Convergence of Hessenberg process for Small Signal Stability Analysis of Large Scale Power Systems

Sung-Geun Song<sup>\*</sup> Ha-Kon Nam<sup>\*</sup> Kwan-Shik Shim<sup>\*\*</sup> Chae-Ju Moon<sup>\*\*\*</sup> Yong-Gu Kim<sup>\*</sup>  
Chonnam National University<sup>\*</sup> Seonam University<sup>\*\*</sup> Mokpo National University<sup>\*\*\*</sup>

**Abstract** - It is most important in small signal stability analysis of large scale power systems to compute only the dominant eigenvalues selectively with numerical stability and efficiency. Hessenberg process is numerically very stable and identifies the largest eigenvalues in magnitude. Hence, transformed system matrix must be used with the process. Inverse transformation with complex shift provides high selectivity centered on the shift, but does not possess the desired property of computing the dominant mode first. Thus, advantage of high selectivity of the transformation can be fully utilized only when the complex shift is given close to the dominant eigenvalues.

In this paper, complex shift is determined by Fourier transforming the results of dynamic simulation with PTI's PSS/E transient simulation program. The convergence in Hessenberg process is accelerated using the iterative scheme. Overall, a numerically stable and very efficient small signal stability program is obtained. The stability and efficiency of the program has been validated against New England 10-machines 39-bus system and KEPCO system.

#### 1. 서론

고유치 해석 기법은 풍부한 선형시스템 이론을 사용할 수 있고 체계적인 해석이 가능하기 때문에 대규모 전력계통의 미소신호 안정도 해석 등에서 널리 사용되고 있다. 대규모 전력계통의 미소신호 안정도 해석에서는 상태행렬의 차수가 매우 크고 모든 고유치를 필요로 하지 않고 지배적 고유치만을 필요로 하는 특성상 특수한 계산 알고리즘을 필요로 한다. 이와 같은 목적으로 이미 브라질 CEPEL의 PACDYN[4], EPRI/Westinghouse의 AESOPS[6], EPRI/Ontario Hydro의 SSSP[7], 일본 전력중앙연구소의 S-법[8]과 같은 많은 상용화된 프로그램이 개발되었다. 국내에서도 상용화되지는 않았으나 SSSP에서 사용하는 Arnoldi process나 S-법에서 사용하는 Lanczos process보다 수치적으로 안정되고 더 효율적인 Hessenberg process가 본 논문의 저자에 의해 개발된바 있다[1].

대규모 전력계통의 미소신호 안정도 해석에서는 상태행렬의 차수가 매우 커 모든 고유치를 계산하는 것이 불가능하고, 필요하지도 않다. 즉 지속되는 저주파진동에 관련된 몇 개의 지배적 전기기계적 진동모드만을 선별적으로 구하는 것으로 충분하다. Arnoldi, Lanczos,

Hessenberg process는 모두 크기가 큰 고유치를 우선적으로 계산하는 특성이 있기 때문에 이들 방법에서는 상태행렬을 변환하여 사용한다. 또한 이들 방법에서는 유수(residue)가 존재하여 계산된 결과는 근사 고유치이기 때문에, 오차를 허용치 이내로 유지하기 위해서는 반복법[3]이나 Rayleigh quotient법과 deflation[1]을 사용할 필요가 있다.

상태행렬의 변환에도 여러 가지 방법이 제안되었으나 대표적인 것으로 Cayleigh변환 또는 S-변환과 복소수 이동된 역행렬(inverse matrix with complex shift)이 있다. S-변환은 지배적 고유치를 불안정한 순서로 계산하는 장점이 있으나 선별성(selectivity)이 부족한 단점이 있다. 복소수 이동된 역행렬은 선별성은 뛰어나나 계동특성이 나쁜 고유치와는 무관하게 이동점에 가까운 고유치만을 먼저 구하는 단점이 있다[3][6]. 따라서 모든 지배적 고유치를 구하기 위해서는 복소수 이동점을 전 주파수 대역에 대해 탐사(scan)하여야 한다.

위와 같이 미소신호 안정도 해석법에 많은 연구가 있었으나 각 방법의 장단점을 이해하여 개선할 여지가 있다. 본 논문에서는 Hessenberg법에 반복법을 적용하여 정확성을 향상시키고 전력계통의 동적 시뮬레이션 결과를 Fourier 변환하여 역행렬의 복소수 이동점을 산정한 후 이를 사용하여 선별성이 뛰어나고 효율성을 대폭 향상시킨 미소신호 안정도 해석법을 제안한다.

#### 2. Hessenberg Process

Hessenberg, Arnoldi 및 Lanczos process는 한  $n \times n$ 행렬 A를 순차적인(recursive) 계산에 의해 상위 Hessenberg 행렬 H로 변환하는 과정인 점에서 동일하나, Arnoldi 및 Lanczos process가 수치적으로 불안정하여 재직교화를 필요로 하고, Hessenberg process는 수치적으로 안정하여 재직교화가 불필요한 효율적인 방법이다. Hessenberg process에 관해서는 문헌 [1]과 [2]에 자세히 기술되었으므로 여기서는 간략히 기술한다.

행렬 X에 n개의 선형독립인 열벡터  $x_i$ 가 주어질 때, 임의의 벡터  $c_1$ 로 시작해서 벡터  $c_2, c_3, \dots, c_{n+1}$ 는 다음 식에 의해 계산할 수 있다.

$$b_{r+1} = k_{r+1}c_{r+1} = Ac_r - \sum_{i=1}^r h_{ir}c_i \quad (1)$$

여기서  $k_{r+1}$ 은  $b_{r+1}$ 을 정규화 시키는 인수이고,  $h_{ir}$ 는  $c_{r+1}$ 이  $x_1, x_2, \dots, x_r$ 에 직교한다는 조건을 사용하여 결정할 수 있다. 식 (1)을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$A \cdot C = C \cdot H \quad (2)$$

행렬 A를 upper Hessenberg 행렬로 변환하는 과정

에서 행렬 H의 subdiagonal 값인  $k_r = h_{r+1,r}$  이 0 이면 H 행렬 중의  $r \times r$  부분행렬의 고유값은 계통상태 행렬 A의 고유값과 같게된다. 그러나 실제로  $h_{r+1,r}$ 은 0에 가까운 값을 가지나 정확히 0이 되지 않으므로 식 (2)는 X의 m-차원 부분공간에서 다음과 같이 표현된다.

$$A \cdot C_m \approx C_m \cdot H_m \quad (3)$$

$H_m$ 을 대각화하면

$$H_m \cdot P_m = P_m \cdot D, \quad X_m = C_m P_m \quad (4)$$

위에서  $X_m$ 은 A의 m-개의 고유벡터,  $P_m$ 은  $H_m$ 의 고유벡터 행렬이고  $D$ 는  $H_m$ 의 고유치로 구성된 대각 행렬이다.  $\lambda_k$ 와  $x_k$ 를 각각 행렬 A의 근사 고유치와 고유벡터라 하면, 이 값의 오차를 나타내는 유수 벡터 (residue vector)는 식 (5)로 주어짐을 보일 수 있다.

$$r_k = A \cdot x_k - \lambda_k \cdot x_k = h_{m+1,m} C_{m+1} p_{km} \quad (5)$$

여기서  $p_{km}$ 은 행렬 P의 (m,k) 요소의 값이다.

식(5)를 이용하여 residue norm을 구하면

$$\delta_k = \frac{\|r_k\|_2}{\|x_k\|_2} = \frac{|h_{m+1,m} p_{km}| \|C_{m+1}\|_2}{\|C_m \cdot p_k\|_2} \quad (6)$$

식 (6)에 의하여 Hessenberg process를 사용하여 구한 근사 고유치, 고유벡터의 정확도를 검증할 수 있다.

### 반복법 (Iterative Scheme)

앞에서 Hessenberg process를 사용하여 행렬 A를 m-차원 부분공간으로 축약하여 구한 m-개의 고유치 고유벡터 중에서 s-개만이 원하는 고유치라고 하자. 이 근사 고유치가 허용오차보다 크면 Ralyleigh quotient, deflation을 통하여 정확도를 높일 수 있다 [1]. 또한 초기 벡터를 원하는 고유치에 해당하는 성분만을 강조한 식 (7)과 같은 초기 벡터를 사용하여 유수 값을 줄이는 방법도 가능하다[3].

$$c_1 = \alpha \sum_{k=1}^m \|(A - \lambda_k I)x_k\|_2 x_k \quad (7)$$

여기서  $\alpha$ 는 초기 열벡터  $c_1$ 을 정규화 하기 위한 값이다. 식 (5)을 식 (7)에 대입하면

$$c_1 = \alpha h_{m+1,m} \|C_{m+1}\|_2 C_m \sum_{k=1}^m |p_{km}| p_k \quad (8)$$

고유치 계산과정에서 가장 늦게 얻어지는 고유치가 가장 느리게 수렴하므로 식 (6)에서  $\delta_s$ 만 계산하여 이 값이 허용오차  $\epsilon$ 보다 작아질 때까지 식 (8)의 초기 벡터를 계산하고 Hessenberg process를 반복한다.

### 3. 상태행렬의 변환과 선별성

S-변환은 상태행렬을 식 (9)와 같이 변환한다.

$$S = (A + hI)(A - hI)^{-1} \quad (9)$$

상태행렬 A의 고유치를  $\lambda_A$ , 행렬 S의 고유치를  $\lambda_S$ 라 하면 이들 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$\lambda_S = \frac{\lambda_A + h}{\lambda_A - h} \quad (10)$$

전기기계적 진동모드와 같은 허수축에 가까운 고유치와 S-변환된 행렬의 고유치의 관계를 복소수 평면에 표시하면 그림 1과 같다. 그림에서 허수축에 가까운 고유치들은 우측 좌반평면으로 이동할수록 크기가 큰 값을 가지므로 Hessenberg process를 적용할 때 불안정한

순서로 고유치를 계산하는 장점이 있으나, 그 반면에 그 크기가 거의 차이가 없으므로 power method처럼 고유치의 크기에 비례하여 수렴하는 Hessenberg process의 특성상 선별성이 부족하다.

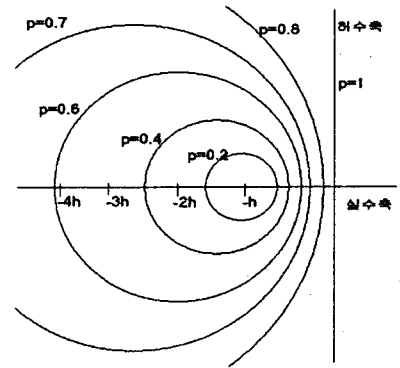


Fig.1 Mapping properties of S-transformation

그 반면에 역행렬 변환에서는 상태행렬을

$$M = (A - j\omega I)^{-1} \quad (11)$$

로 변환하고 고유치의 관계는 식 (12) 또는 그림 2로 주어진다.

$$\lambda_M = \frac{1}{\lambda_A - j\omega} \quad (12)$$

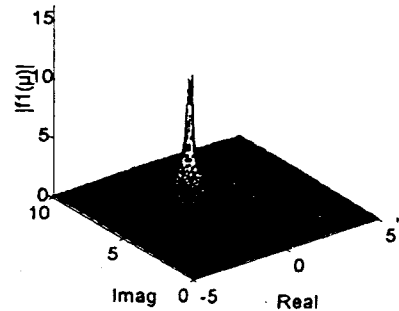


Fig.2 Mapping properties of inverse transformation

따라서 복소수 이동점  $j\omega$  부근에 위치한 고유치는 그 크기가 매우 크고 거리가 멀어질수록 크기가 급격히 감소하므로 선별성은 뛰어나나, 미소신호안정도에서 계통 특성이 불량한 지배적 고유치를 우선적으로 구하여야 하는 요구조건을 충족하지 못한다. 만약 지배적 진동모드의 주파수를 파악할 수 있고 이를 복소수 이동점으로 사용한다면, 이 역행렬 변환은 지배적 진동모드만을 계산할 수 있는 선별성이 매우 좋을 수 있다.

계통해석에서는 과도안정도 simulation이 병행된다. 이 과도안정도 simulation을 10초 정도 수행하고 이 결과를 Fourier 변환하면 지배적 진동모드의 주파수는 쉽게 파악된다. 따라서 과도안정도 해석과 역행렬 변환을 함께 사용하면 매우 효율적인 미소신호 안정도 해석법이 가능하다. 이 사실은 사례연구에서 New England 계통과 한전계통을 예로 들어 보인다.

이와 같은 Hessenberg process에 의한 미소신호 안정도 해석법의 과정을 순서도로 나타내면 그림 3과 같다.



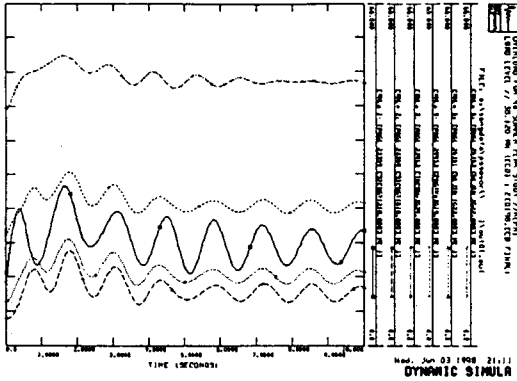


Fig.6 PSS/E result with KEPCO system

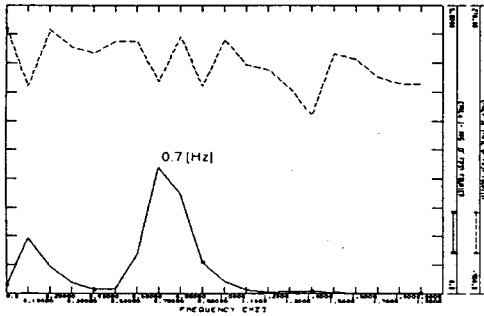


Fig.7 Fourier transformation result with KEPCO system

표 2 1998년 한전계통의 결과

QR법으로 계산한 738×738 상태행렬의 고유값	Inverse shift point 4.4i		
	LOOP	s/m	DEL
	0	5/33	7.002e-4
	고유값		
-0.1923 + 4.3139i	-0.1923 + 4.3139i		
-0.4375 + 5.3783i	-0.4375 + 5.3783i		
-0.4136 + 6.0410i	-0.4136 + 6.0410i		
-0.9531 + 7.2588i	-0.9530 + 7.2588i		
-0.5444 + 7.4253i	-0.5436 + 7.4265i		

표 2의 결과와 그림 6의 simulation 결과를 제동특성이 가장 나쁜 고유치  $-0.1923 + 4.3139i$ 에 대해서 비교하면 진동주파수는 0.7{Hz}로 대략 일치하나, 표에서 SPR은 0.776이나 그림에서 SPR은 대략 0.974로 상당한 오차가 있다. 이 오차는 PSS/E 고유치 계산 능력이 최대 750×750 행렬로 제한되어 있어, 그 크기가 3000×3000 이상일 것으로 예상되는 한전계통의 상태행렬을 PSS/E가 738×738로 축약하는 과정에서 발생 한 오차일 것으로 생각된다.

## 5. 결론

본 논문에서 PSS/E의 동적 simulation 결과를 Fourier 변환하여 역행렬 변환의 복소수 이동점을 계산하고, 역행렬 변환된 상태행렬에 Hessenberg process를 적용하여 지배적 진동모드를 계산하는 매우 효율적이

고 선별성이 우수한 미소신호 안정도 해석법을 제안하였다. 계산된 고유치가 허용오차를 벗어나는 경우 우수 계산에 의해 초기벡터를 산정하고 다시 Hessenberg process를 적용하는 반복법을 사용하여 정확도를 향상하였다.

이 알고리즘을 New England 39모선과 1998년 한전계통에 실험한 결과, 작은 크기의 Hessenberg 행렬로 관심있는 지배적 고유치를 빠르게 계산할 수 있음을 확인하였다.

이 방법은 속도, 선별성, 수치적 안정성 모두가 우수하여, 앞으로 PSS/E에서 사용하는 발전기, 여자기, 조속기, 계통 모델을 선형화하고 sparsity 기법을 적용하여 한전계통을 축약하지 않고 해석할 수 있는 프로그램을 개발중이다.

**Aknowledgement** The authors would like to acknowledge the partial support of KEPCO through its grant 97-지-03.

## 참고문헌

- [1] H.K. Nam, K.S. Shim, and C.J.Moon, "Modal Analysis of Large Scale Power System Using Hessenberg Process", KIEE Trans., Vol. 42, No. 10, 1993.10
- [2] J.H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [3] L. Wang, "Eigenvalue analysis of large power systems", Ph.D. Dissertation, University of Toronto, Wang, 1991.
- [4] L.T.G. Lima, L.H. Bezerra, C. Tomei, and N. Martins, "New methods for fast small - signal stability assessment of large scale power systems", PACDYN, Version 3.0 - October 1994.
- [5] G. Angelidis, A. Semlyen "Improved methodologies for the calculation of critical eigenvalues in small signal stability analysis" IEEE/PES Summer meeting, July, 1995.
- [6] EPRI, Phase II : Frequency Domain Analysis of Low Frequency Analysis Oscillations in Large Power System, Vol. 1 - Vol. 5, Final Report EPRI EL-2348, 1982.
- [7] D.Y. Wong, G. J. Rogers, B. Porreta, and P. Kundur, "Eigenvalue Analysis of Very Large Power Systems," IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PWR-3, May 1988.
- [8] N. Uchida and T. Nagao, "A New Eigen-Analysis Method of Steady State Stability Studies for Large Power Systems : S Matrix Method," IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PWR-3, No. 3, May 1988.