

공간영역 Green 함수의 복소영상법과 혼합 복소영상법에 관한 연구

김상진*·김영식**·천창을*
 서울시립대학교 전자공학과*·한국안전유리(주)**

A Study on Complex Image Method and hybrid CIM for Spatial Domain Green Function

Sangjin Kim*·Youngsik Kim**·Changyul Cheon*

Dept. of Electronics Engineering Univ. of Seoul*·Hankuk Safety Glass Co.,Ltd.**

Abstract - In this paper, A complex-image method (CIM) and efficient numerical integration algorithm is implemented to evaluate the spatial-domain Green's function through the Sommerfeld-type integral with a thick substrate. CIM is compared to numerical integration technique.

1. 서 론

마이크로스트립의 불연속부분, 패치 안테나, printed 다이폴과 같은 printed 회로 소자를 해석하는 가장 일반적이고 정확한 방법으로 MPIE를 널리 사용하고 있다. 이 적분방정식에는 벡터 및 스칼라 Green 함수가 필요하다. 일반적으로 마이크로스트립 구조의 공간영역 Green 함수는 Sommerfeld 적분 형태로 표현되며, 피적분 함수는 진동이 심하고 천천히 감소하는 특성을 갖고 있으므로 수치적으로 적분할 경우 상당히 긴 시간을 요하게 된다. 그러나 최근 복소영상법(complex-image method : CIM)을 이용하여 Sommerfeld 형 적분을 계산하는 새로운 방법이 개발되었다.[1] 이것은 수치적인 적분 없이 closed-form 형태로 표현할 수 있어 계산시간을 효과적으로 줄일 수 있는 대단히 강력한 방법이다. 그러나 샘플링 영역을 선택하는 것과 확장 항의 개수는 기관의 유전율과 두께에 따라 크게 좌우되며, 또한 복소영상법은 전류원과 관측점이 동일 유전체 층에 있거나 이들 사이의 거리가 적당한 경우는 정확한 해를 얻지만, 어느 한계 이상을 지나게 되면 수렴하는 결과를 얻기 어렵다.[2] 따라서 이런 경우는 수치적분을 적용해야 한다.

본 논문에서는 공간영역 Green 함수를 계산하는 3가지 적분법으로 복소영상법에 의한 Green 함수 계산과 수치적분에 의한 계산 및 수치적분과 복소영상법을 혼합한 혼합 복소영상법을 계산하는 방법을 제시하고 서로 비교하였다.

2. 본 론

그림1은 본 논문에서 적용하고자 하는 해석구조로서 마이크로스트립 구조의 유전체 기관 위에 x방향 무한소의

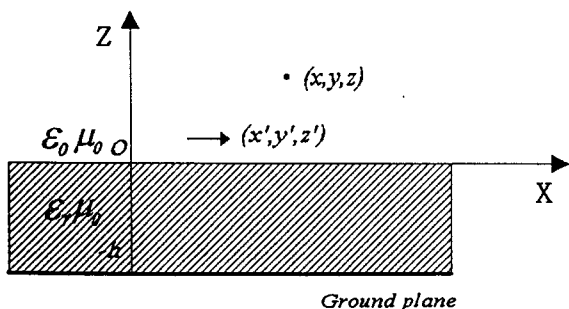


그림 1 마이크로스트립 구조

전류원이 위치해 있다. 이와 같은 구조에서 유전체 기관 위에서의 주파수영역 Green 함수는 해석적으로 구할 수 있으며 다음과 같다.

$$\tilde{G}_A^{xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{j\omega k_{z0}} [e^{-k_0(x-z_0)} + \tilde{R}_{TE} e^{-k_0(x+z_0)}] \quad (1)$$

$$\tilde{G}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega k_{z0}} [e^{-k_0(x-z_0)} + (\tilde{R}_{TE} + \tilde{R}_q) e^{-k_0(x+z_0)}]$$

여기서 $\tilde{R}_{TE} = -\frac{r^{TE} + e^{-2k_n h}}{1 + r^{TE} e^{-2k_n h}}$

$$\tilde{R}_q = \frac{2k_{z0}^2(1-\epsilon_r)(1-e^{-2k_n h})}{(k_{z1} + k_{z0})(k_{z1} + \epsilon_r k_{z0})(1 + r^{TE} e^{-2k_n h})(1 - r^{TM} e^{-2k_n h})}$$

$$r^{TE} = \frac{k_{z1} - k_{z0}}{k_{z1} + k_{z0}} \quad r^{TM} = \frac{k_{z1} - \epsilon_r k_{z0}}{k_{z1} + \epsilon_r k_{z0}}$$

$$k_{z0}^2 + k_p^2 = k_0^2 \quad k_{z1}^2 + k_p^2 = \epsilon_r k_0^2$$

\tilde{G}_A^{xx} 는 x방향 벡터 Green 함수이고 \tilde{G}_q 는 스칼라 Green 함수를 나타낸 것이다. 주파수영역 Green 함수는 Sommerfeld 적분식을 이용하면 공간영역 Green 함수로 바꿀 수 있다.

2.1 복소영상법 [1]

주파수영역 Green 함수는 Hankel 변환을 통하여 공간영역 Green 함수로 표현된다.

$$G_{A,q} = \frac{1}{4\pi} \int_{SIP} [\tilde{G}_{A,q}(k_p, z | z_s) H_0^{(2)}(k_p \rho) k_p] dk_p \quad (2)$$

$H_0^{(2)}$ 는 2종 Hankel 함수이고 SIP는 Sommerfeld 적분경로이다. 일반적으로 Hankel 함수는 특별한 몇 경우를 제외하고는 해석적으로 구할 수 없다. Hankel 함수의 진동특성과 주파수영역 Green 함수의 완만한 수렴특성 때문에 수치적으로 계산할 경우 많은 시간이 요구된다. 만일 피적분 함수인 주파수영역 Green 함수가 복소 지수함수로 근사화 될 수 있다면 식(3)의 적분은 Sommerfeld식을 이용하여 해석적인 계산이 가능하다. 직접함 $e^{-jk_z |z|} / k_z$ 과 표면파 성분은 해석적으로 계산할 수 있으므로 근사화할 때 제외할 수 있다. 주파수 영역 Green 함수는 SIP로부터 적분 경로 $k_z = k[-jt + (1-t/T_0)]$ 를 따라 균일하게 샘플되고 다음과 같은 복소지수항으로 근사화된다.

$$\tilde{G}^{A,q} \approx \frac{1}{j\omega k_z} \sum_{m=1}^N a_m e^{-b_m k_z} \quad (3)$$

여기서 N 은 근사화에 사용된 지수함수의 수이다. 계수들은 Prony 방법을 이용하면 구할 수 있다. 다음의 Sommerfeld 방정식을 적용하면

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{1}{2j} \int_{SIP} dk_p k_p H_0^{(2)}(k_p \rho) \frac{e^{-jk_z |z|}}{k_z} \quad (4)$$

다음과 같은 closed-form 공간영역 Green 함수를 얻을 수 있다.

$$G^{A,q} \approx \sum_{m=1}^N a_m \frac{e^{-k_m r_m}}{r_m} + \text{direct term} + \text{surface waves} \quad (5)$$

여기서 $r_m = \sqrt{\rho^2 - b_m^2}$ 은 복소 거리를 나타낸다.

Green 함수의 closed-form 표현을 구하는 순서는 다음과 같다.

1. 주파수영역에서 벡터 및 스칼라 포텐셜 Green 함수를 구한다.
2. 준정적(quasi-static) 영상과 이것의 기여분을 Sommerfeld 적분식을 통하여 구한다.
3. 표면파에 의한 극점을 구하고 기여분을 해석적으로 계산한다.
4. 나머지부분은 Prony법을 이용하여 복소지수항으로 근사화 시킨다.

2.2 수치 적분법 (3)

주파수영역 Green 함수는 Sommerfeld 적분법을 이용하면 공간영역 Green 함수로 바꿀 수 있다. Sommerfeld 적분법의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$G_{A,q}(\rho, z | z_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\tilde{G}_{A,q}(k_\rho, z | z_s) J_n(k_\rho \rho) k_\rho^{(n+1)}] dk_\rho \quad (6)$$

여기서 $G_{A,q}$ 와 $\tilde{G}_{A,q}$ 는 공간영역 및 주파수영역 Green 함수를 나타내며 n 은 0 또는 1이다. 그림2는 식(6)의 실수부와 허수부 및 적분하는 계산 절차를 보여준다. $(0, k_{\rho \max})$ 구간에서 극점을 추출하고 반주기 적분을 하며 Gaussian quadrature 적분을 사용한다. $(k_{\rho \max}, \infty)$ 구간에서는 WAA를 사용한다. 수치 적분 순서는 다음과 같다.

1. 특이점 추출
2. 표면파 성분 추출

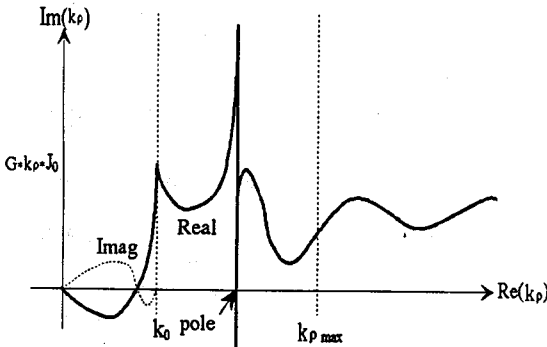


그림 2 Sommerfeld형 적분의 실수부와 허수부

3. 나머지 부분 적분

2.2.1 특이점 성분의 추출

Sommerfeld 적분식의 점근적 특성은 $k_\rho \rightarrow \infty$, $k_0 \rightarrow 0$ 로 함으로 얻어진다. 이 성분은 자유공간 파장 보다 훨씬 작은 거리에서의 필드에 해당한다. 근거리 필드는 $O(1/\rho)$ 로 예측할 수 있다. 따라서 특이점 성분은 다음과 같이 추출된다.

$$G_q^x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\rho} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \tilde{F}'_q(k_\rho, \rho, z | z_s) dk_\rho \quad (7)$$

$$\text{여기서 } \tilde{F}'_q(k_\rho, \rho, z | z_s) = \tilde{G}_q^x J_0(k_\rho \rho) k_\rho - \frac{J_0(k_\rho \rho)}{2\epsilon_0\epsilon_\rho}$$

ϵ_ρ 는 유효 유전율로 $\epsilon_\rho = (\epsilon_r + 1)/2$ 이다. 특이점이 추출되면 피적분 함수는 빠르게 수렴하게 되며 효과적으로 계산할 수 있다.

2.2.2 표면파의 기여분 추출

평행 도체판 사이에서 발생하는 평판 모드나 개방 구조에서 생성되는 표면파 모드는 피적분 함수에서 극점으로 작용하게 된다. 평판 구조에서는 $(0, k_{\rho \max})$ 구간에서, 개방 구조에서는 $(k_0, k_{\rho \max})$ 구간에서 무손실 매질의 k_ρ 평면의 실수 축에 위치한다. k_ρ 평면의 실수 축을 따라 적분해야 하므로 극점들에 의한 특이점을 추출해야 한다. 이 극점은 $1/\tilde{G}_q$ 가 0인 점을 찾으면 된다. 또한 유수(residues)는 극점에서 $1/\tilde{G}_q$ 의 기울기로부터 구할 수 있다.

$$(Res)_i = \left[\frac{d(1/\tilde{G}_q)}{dk_\rho} \right]^{-1} \Big|_{k_\rho = k_{\rho i}} \quad (8)$$

여기서 $k_{\rho i}$ 는 i 번째 극점을 나타낸다. 극점에 의한 기여분은 다음과 같이 해석적으로 구할 수 있다.

$$G_{q,sw}^x = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_q} (Res)_i J_0(k_{\rho i} \rho) k_{\rho i} \left[\ln \left(\frac{k_{\rho \max} - k_{\rho i}}{k_{\rho i}} \right) - j\pi \right] \quad (9)$$

여기서 N_q 는 극점의 수이다. 특이점과 표면파 성분을 추출한 후 나머지 피적분 함수는 다음과 같이 된다.

$$G_q^x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\rho} + G_{q,sw}^x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_{\rho \max}} \tilde{F}'_q(k_\rho, \rho, z | z_s) dk_\rho + \int_{k_{\rho \max}}^{\infty} \tilde{F}'_q(k_\rho, \rho, z | z_s) dk_\rho \quad (10)$$

여기서

$$\tilde{F}'_q(k_\rho, \rho, z | z_s) = \tilde{F}'_q(k_\rho, \rho, z | z_s) - \sum_{i=1}^{N_q} (Res)_i J_0(k_{\rho i} \rho) k_{\rho i}$$

피적분 함수 \tilde{F}'_q 는 $(0, k_{\rho \max})$ 구간에서는 특이점이 없다.

2.2.3 나머지 부분의 적분

나머지 피적분 항인 \tilde{F}'_q 와 \tilde{F}'_q 는 nonsingular 이고 급속히 감소하는 함수이다. 이것은 Bessel 함수로 인해 발생하는 진동 때문에 ρ 가 클때는 대단히 진동이 심해서 특별히 다루어야 한다. k_ρ 의 실수 축을 따라 적분경로를 세 구간 $(0, k_0)$, $(k_0, k_{\rho \max})$ 그리고 $(k_{\rho \max}, \infty)$ 로 나누어 계산한다.

(i) $(0, k_0)$ 구간 : 각 반주기에 $(T/2)$ 대해 Gaussian quadrature 알고리즘을 이용하였다. 피적분 함수가 k_0 에 1차 미분이 무한대가 되므로 이것을 피하기 위해 영역 $t \in [0, \pi/2]$ 에서 변수 $k_\rho = k_0 \cos t$ 를 도입하였다.

(ii) $(k_0, k_{\rho \max})$ 구간 : 이 구간에서는 k_0 를 피하도록 변수를 $k_\rho = k_0 \cosh t$ 로 변화시켰다. 여기서 변수 t 의 구간은 $t \in [0, \cosh^{-1}(k_{\rho \max}/k_0)]$ 이다.

(iii) $(k_{\rho \max}, \infty)$ 구간 : 이 구간에서는 피적분 함수가 천천히 감소하는 진동함수의 특성을 나타내며 진동주기 $(T=2\pi/\rho)$ 는 관측거리(ρ)에 좌우된다. 이 주기적인 진동함수를 수치적분하기 위해 가중평균 알고리즘(WWA : weighted - average algorithm)[61]을 이용하여 구현하였다. WWA의 오차는 ρ^{-m} 에 비례하며, 여기서 m 은 반복수이다. ρ 가 큰 경우는 대단히 효과적이지만 ρ 가 작은 경우는 정확성이 떨어진다.

2.3 혼합 복소영상법

혼합 복소영상법은 복소영상법과 수치적분법을 관측거리 따라 적용하는 방법이다. 가까운 거리($\rho < 1\lambda_g$)에서는 복소영상법을 적용하고, ρ 가 큰경우는 수치기법을 적용적용한다. 복소영상법은 계산시간이 작은 장점이 있고 수치적분법은 원거리에서도 계산할 수 있으므로 거리에 따라 각각 적용하면, 어레이 같은 일반적인 회로 해석이 가능해진다.

2.4 수치해석 및 고찰

위의 설명한 두가지 방법을 두께 1 mm 이고 유전율이 $\epsilon_r = 12.6$ 인 단일 유전체 적용하면 그림 3과 같은 결과를 얻게된다. 전류원과 관측점은 공기와 유전체 층 사이에 위치한다. 이 구조에서 30 GHz에서 두 개의 표면파가 존재하는데 $k_p = 1.663232 k_0$ 에서 TE 모드가 1개, $k_p = 2.637461 k_0$ 에서 TM 모드가 1개 존재한다. 그림 3는 G_A^+ 와 G_q 를 $\mu_0/4\pi$ 과 $1/4\pi\epsilon_0$ 로 정규화하였다. G_A^+ 는 ρ 가 커짐에 따라 TE 표면파 모드가 지배적이기 때문에 완만한 곡선을 그린다. 한편 G_q 와 관련한 두 개의 TE와 TM 모드는 ρ 가 커짐에 따라 진동하기 시작한다.

그림 4는 두께 0.794 mm 이고 유전율이 $\epsilon_r = 2.2$ 인 단일 유전체에 7.6GHz를 적용한 것이다. $k_p = 1.002388 k_0$

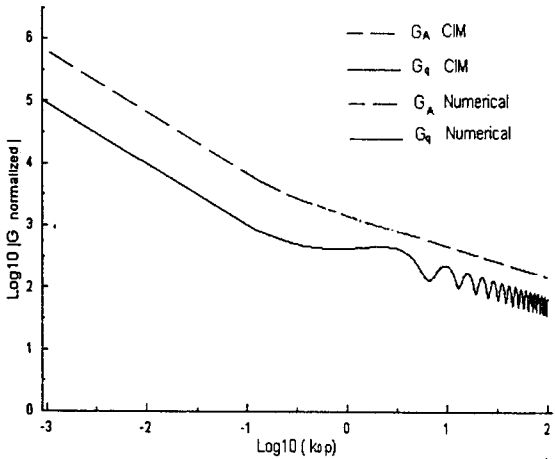


그림 3 관측거리 ρ 에 대한 G_A 및 G_q 대

$\epsilon_r = 12.6$ $h = 1.0$ mm
 $f = 30$ GHz $z = z_s = 0.0$ mm

에서 TM 모드가 1개 존재한다. ρ 가 커짐에 따라 위의

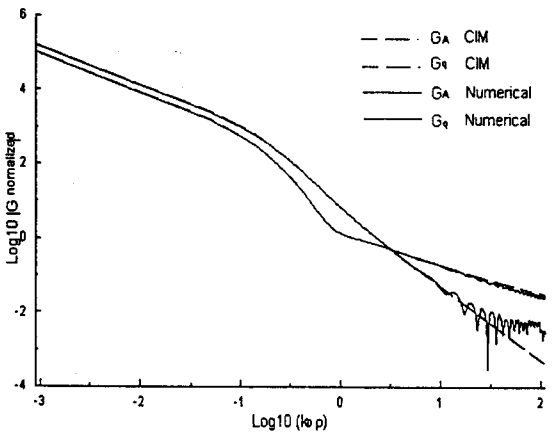


그림 4 관측거리 ρ 에 대한 G_A 및 G_q 대

$\epsilon_r = 2.2$ $h = 0.794$ mm
 $f = 7.6$ GHz $z = z_s = 0.0$ mm

경우보다 진동이 훨씬 심하며 따라서 수치적분은 에러율이 증가한다.

치해석법, 복소영상법 그리고 혼합복소영상법을 서로 비교하였다.

표 1 Sommerfeld 적분을 위한 수치기법의 비교

적분 기법	수치적분법 INT	복소영상법 CIM	혼합복소영상법 INT-CIM
다중 유전체에서, 정식화	가능	전류원 층에서만 가능	가능
준정적(quasi-static)항 추출	1 개	6개	-
적분 (0, k_{max})	실수 축 상에서 반 주기식 적분	변형된 적분 경로	-
나머지 적분 (k_{max} , ∞)	가중평균 알고리즘	한정된 지수 함수 항으로 근사화됨	-
ρ 가 커짐에 따라 발산	제한 없음	제한 됨	제한 없음
연산시간	대	소	중

3. 결 론

본 논문에서는 주파수 영역 Green 함수를 Sommerfeld형 적분식을 통하여 공간영역 Green 함수로 변환하는 방법으로 복소영상법과 수치적분법에 대해 계산 알고리즘을 제시하였다. 비유전율 $\epsilon_r = 12.6$ 유전체 두께 $h = 1.0$ mm, $z = z_s = 0.0$ mm 그리고 주파수 30 GHz 인 단일 유전체 층에 적용하여 보았다. 이때 계산치는 잘 일치하였고 계산시간에 있어서 현저한 차이를 들어냈다. 따라서 평면 유전체 층에서는 복소영상법을 사용하면 계산 시간을 현저히 줄일 수 있음을 알 수 있다. 이 해석법은 다중 유전체에서도 적용가능하며, 다중에서는 Prony법 대신 GPOF법[3]을 이용해야 한다. 복소영상법의 단점인 한계 이상의 관측점에서는 발산을 보완하는 방법으로 수치적분법을 사용하였다. 두 방법을 조합할 경우 안테나 어레이 같은 일반적인 회로 해석이 가능함을 보였다.

(참 고 문 헌)

- [1] Y.L.Chow, J.J.Yang, D.G.Fang and G.E.Howard, "Closed-form spatial Green's function for the thick substrate," IEEE Trans. on Microwave Theory Tech., vol. MTT-39, no.11, pp.588-592, Mar. 1991.
- [2] M.I.Aksun and R.Mitra, "Derivation of closed-form Green's functions for a general microstrip geometry," IEEE Trans. on Microwave Theory Tech., vol. MTT-40, no.11, pp.2055-2062, Nov. 1992.
- [3] J.R.Mosig, "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures," Edited by T.Itoh, Chapter 3, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.

표1은 Sommerfeld형 적분식을 계산하는 수치기법들 수