

3차원 물체의 정점 검출 알고리즘

최 병 걸, 문 성 환, 강 훈
중앙대학교 공과대학 전자전기공학부

Vertex Detection Algorithm for three-dimensional object

Byung-Keol Choi, Sung-Hwan Moon, and Hoon Kang
School of Electrical & Electronic Engineering
College of Engineering, Chung Ang University
Seoul 156-756, Korea

Abstract - Data compression of 3 dimensional objects has limitations such as large data size, slow processing time, uncertainties of noise and measurement errors. Recently, along with activities of information transmission in internet, the researches in 3 dimensional information processing become a very important issue as the exchanges of large data are available. In this paper, we propose a data compression algorithm which first estimates the surfaces of 3 dimensional objects and then apply them to the FCV(Fuzzy c-Varieties) Clustering to obtain 3 dimensional edges and vertices, and represent the results.

려져 있는 FCM(Fuzzy c-means) 알고리즘 [3]을 확장한 FCL(Fuzzy c-lines) 알고리즘 [4]을 다시 확장시킨 알고리즘이다. 다시 말해 점에서 선으로, 이것을 다시 n 차원으로 확장시킨 알고리즘이다[5]. 그러나 FCV 알고리즘은 일반적으로 초기값 설정과 클러스터 개수의 문제가 존재한다. 본 논문에서는 먼저 Scatter Matrix의 성질을 분석하고 이 정보를 이용하여 물체의 부분적인 모양을 알아내 물체를 표현 할 수 있는 면의 개수와 면에 대한 정보를 얻은 다음 각각 클러스터링 된 면에 대한 정보를 FCV 알고리즘에 이용하여 3차원 물체의 정점(vertex)을 찾는 방법을 제안하고 있다.

1. 서 론

3차원 물체를 표현하기 위해서는 많은 양의 데이터를 필요로 한다. 그러나 만약 물체의 정점(vertex)을 안다면 적은 데이터로 효과적으로 물체를 표현해 줄 수 있다. 레이저, 혹은 CCD 카메라를 이용한 3-D 스캐너로 스캔한 물체의 이산적인 데이터들은 그 모양을 알 수 없을 뿐아니라 데이터의 양도 무척 방대하다. 스캔한 3차원 물체의 부분적인 모양을 면으로 클러스터링 하면 이러한 면들로 교차하는 정점을 구해 물체를 적은 양의 데이터로 효과적으로 표현하는 것이 가능해진다. 통계학 상에서 공분산 행렬(covariance Matrix)은 분산된 데이터들의 기하학적 모양에 대한 정보를 제공해 준다[1]. 공분산 행렬(covariance matrix)의 변형된 형태인 scatter matrix의 고유치(eigenvalue)를 이용하여 물체의 모양을 추정할 수 있다[2]. 물체의 정점(Vertex)을 찾는데 사용하게 될 FCV(Fuzzy c-Varieties)알고리즘은 많이 알

2. 본 론

2.1 Scatter Matrix 와 고유치

Scatter Matrix는 기하학적으로 quadratic forms, 통계적으로 공분산 형태를 취하고 있다. 3차원 데이터 셋 $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 가 있다고 가정하자. 이때 X 의 평균과 공분산 행렬을 각각 (v_x, V_x) 라 하면,

$$v_x = \sum_{i=0}^n x_i / n \quad (1)$$

$$V_x = \sum_{i=0}^n (x_i - v_x)(x_i - v_x)^T / (n-1) \quad (2)$$

이다. 데이터 셋 X 의 scatter matrix는 양변에 $(n-1)$ 을 곱해줌으로써 얻어진다.

$$S_x = (n-1)V_x \quad (3)$$

행렬 S_x 와 V_x 는 3x3 행렬로서 각각 symmetric, positive semi-definite 이고, S_x 의 고유치를 이용하여 데이터 셋 X 의 모양을 추정 할 수 있다[3]. S_x 는 각각 0보다 크거나 같은 양의 고유치를 갖는다. S_x 의 고

- 유치를 각각 λ_i , $i=1,2,3$ 라 할 때,
 (1) 만약 λ_i 가 서로 다른 양수이면 타원체
 (2) 만약 λ_i 가 양수이고 셋이 동일하면구체
 (2) 만약 3개의 λ 중 하나가 0일 때 평면

부분적으로 물체의 모양을 추정하기 위해 파라메타 R 반경내에 들어오는 데이터들에 대한 scatter matrix를 구성하여 살펴볼 경우 이때 만약 가장 작은 고유치가 0에 가까운 값을 갖는다면 이 데이터는 평면상에 있는 점으로 판단할 수 있다. 그러나 정점이나 변(edge)상의 데이터들에 대한 scatter matrix의 고유치는 0보다는 크고, 거의 같은 값을 갖는다.

2.2 3차원 물체의 면의 개수 추정

3차원 물체의 면의 개수를 추정하는 데는 먼저 평면상에 위치한 점을 기준으로 면을 분류하는데 있다. 어떤 물체를 구성하는 3차원 데이터 셋 $X=\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 가 주어졌을 때 모든 데이터들에 대해 국부적으로 반경 R을 갖는 구 안의 데이터에 대한 scatter matrix를 구한 다음 그것의 고유치를 해석하면 각각의 데이터가 자신의 위치한 주변의 상황을 알 수 있다.

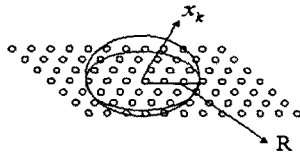


그림 1. 데이터 주변의 모양 추정

임의의 점 x_k 를 중심으로 반경 R 내의 데이터들로부터 구성된 scatter matrix의 가장 작은 고유치가 임의의 0에 가까운 양의 값(a)보다 작은 값을 갖는다면 이 점은 평면상에 놓인 경우이다. 이러한 평면상에 놓인 점에 대해서 분류해냄과 동시에 자신이 속해있는 면의 수직 벡터(normal vector)도 함께 구한다. 이때 수직 벡터(w)는 scatter matrix의 고유치에 대한 고유벡터(eigenvector)를 이용하여 찾는다. 평면상의 점을 x_k 이고 이 점을 지나는 평면의 수직 벡터를 $w=(a,b,c)^T$ 라 할 때 다음과 같은 식에 의해 면을 분류한다.

$$P_k(w_k, x_k, x_i) = \frac{|w_k^T x_k - w_i^T x_k|}{w_k^T w_k} \leq \beta \quad (4)$$

3차원 데이터 x_i 가 (4)식을 만족하면 점 x_i 는 x_k 와 같은 평면상의 점이다. 여기서 β 는 임의의 작은 양수이다. (4)식은 x_k 를 지나는 평면으로부터 점 x_i 까지의 수직 거리를 나타내고 있다.

2.3 면의 최적화

면의 최적화는 분류된 면에 대한 데이터들의 최적의 수직 벡터(w)를 찾는 데 있다. 임의의 평면 $ax+by+cz=1$ 가 $w=(a,b,c)^T$ 를 갖고 평면상의 점 x_{i0} 를 지난다면, 최적화는 다음 ()식을 최소화하는 수직벡터, w를 찾는 다. 이때 x_{i0} 는 평면상의 점이므로 $w^T x_{i0}=1$ 을 만족해야 한다.

$$\min_w J(w) = \min_w \sum_{i=1}^n \|x_i - x_{i0}\|_Q^2 \quad (5)$$

여기서 $Q=WW^T$ 이다. (5)식을 w에 관여 미분을 하면,

$$\frac{\partial J}{\partial w} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i x_i^T w - x_i) = 0 \quad (6)$$

$$w^* = \left[\sum_{i=1}^n (x_i x_i^T) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] \quad (7)$$

(7)식에서 역행렬이 존재하지 않을 경우 Matrix Inversion Lemma[6]와 Recursive weight update Law를 사용하여 w^* 구할 수 있다.

$$w_n = w_{n-1} + \frac{G_{n-1} x_n (1 - w_{n-1}^T x_n)}{1 + x_n^T G_{n-1} x_n} \quad (8)$$

이때 $G_{n-1} = \left[\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_i^T \right]^{-1}$ 이다.

G_n 은 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} G_n &= (x_n x_n^T + G_{n-1}^{-1})^{-1} \\ &= G_{n-1} - \frac{G_{n-1} x_n x_n^T G_{n-1}}{1 + x_n^T G_{n-1} x_n} \end{aligned} \quad (9)$$

이렇게 하여 얻어진 (8),(9)식은 (7)번식에서 발생할 수 있는 문제를 해결할 수 있다.

초기값 w_0 는 $w_0 \neq (0,0,0)^T$ 을 만족하는 값으로 면을 분류할 때 기준이 된 데이터의 수직벡터를 사용하고, $G_0 = I(3 \times 3 \text{ 단위행렬})$ 로 한다. 각 분류된 면들의 정보가 얻어지면 평면상의 서로 수직인 두 개의 방향 벡터와 중심 값을 구할 수가 있다. 그리고 두 개의 방향 벡터와 중심 값, 면의 개수는

FCV(Fuzzy c-Varieties)알고리즘의 초기값으로 이용하여 3차원 물체의 정점을 찾게 된다.

2.4 FCV(Fuzzy c-Varieties) 알고리즘

$X = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \} \subset R^s$ 는 s 차원의 유한집합이고, $\mathbf{x}_k \in X$ 는 k번째 특성 벡터이다. V_{cn} 은 실수 행렬($c \times n$)의 벡터 공간이다. 여기서 c 는 정수이고, $2 \leq c < n$ 이다. $U \in V_{cn}$ 은 $[u_{ik}]$ 를 원소로 하고, 소속값 u_{ik} 는 다음 조건을 만족한다.

$$u_{ik} \in [0, 1] \quad \forall i, k \quad (10-a)$$

$$\sum_{i=1}^c u_{ik} = 1 \quad \forall k \quad (10-b)$$

2.4.1 클러스터의 프로토타입

$$V_r(\mathbf{v}; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_r) = \left\{ \mathbf{y} \in R^q \mid \mathbf{y} = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^r t_j \mathbf{d}_j; t_j \in R \right\} \quad (11)$$

여기서 $r=0$ 일 때 점을 나타내고, $r=1$ 이면 선, $r=2$ 이면 면을 나타낸다. 정점을 찾기 위해서는 평면에 대한 2개의 방향벡터를 필요로 하므로 $r=2$ 인 경우에 해당한다.

2.4.2 거리 함수

[그림 2]에서와 같이 평면과 데이터 사이의 수직거리를 다음과 같이 나타낸다.

$$D_A(\mathbf{x}_k, V_i) = \left(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i\|_A^2 - \sum_{j=1}^2 \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i, \mathbf{d}_{ij} \rangle_A^2 \right)^{1/2} \triangleq D_{ik} \quad (12)$$

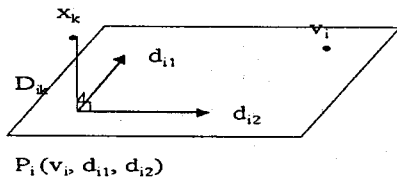


그림 2 데이터와 클러스터간의 거리

2.4.3 기준 함수 (Criterion Function)

FCV 알고리즘은 면과 데이터들 사이의 거리와 거리에 대한 소속값으로 이루어진 기준 함수를 최소화 시키도록 반복수행을 한다.

$$J_{V,m}(U, V) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^c (u_{ik})^m (D_{ik})^2 \quad (13)$$

A : symmetric, positive definite matrix

c : 클러스터의 개수 ($2 \leq c < n$)

n : 데이터 개수

m : u_{ik} 에 대한 하중 지수 (weighting exponent) ($1 < m < \infty$)

v : 클러스터 중심 벡터

d : 방향벡터

2.3.4 새로운 소속값

기준함수의 클러스터 중심 벡터(v)와 방향 벡터(d)를 고정시키고 소속값(u)에 대해서 편미분 하여 0이 되는 새로운 소속값을 구할 수 있다.

$$\hat{u}_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c (\hat{D}_{ik} / \hat{D}_{jk})^{2/(m-1)}} \quad \forall i, k. \quad (14)$$

5) 새로운 클러스터 중심

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \frac{\sum_{k=1}^n (\hat{u}_{ik})^m \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^n (\hat{u}_{ik})^m} \quad \forall i, \quad (15-a)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_{ij} = A^{-1/2} \hat{\mathbf{y}}_{ij}, \quad (15-b)$$

$\hat{\mathbf{y}}_{ij}$ 는 scatter matrix S_i 의 j번째 단위 고유 벡터.

$$\hat{S}_i = A^{1/2} \left[\sum_{k=1}^n (\hat{u}_{ik})^m (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{v}}_i) \times (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{v}}_i)^T \right] A^{1/2}. \quad (16)$$

새로 구한 클러스터 중심과 소속값을 사용하여 기준함수가 최소화 될 때까지 반복하게 된다. 만약 새로 구한 소속값($u_{ik}^{(1)}$)이 $\{|u_{ik}^{(0)} - u_{ik}^{(1)}| \leq \epsilon\}$ 을 만족할 때 알고리즘을 종료한다. 이때 ϵ 은 작은 임의의 양수이다. 결과에 대한 전체적인 평가는 분류 엔트로피 (Classification Entropy)를 이용하여 계산한다.

2.5 분류 엔트로피 (Classification Entropy)

$$E = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^c u_{ik} \log_2 u_{ik} \quad (17)$$

위 식은 클러스터의 평가함수로 개수를 추정하는 척도로 쓰인다. 계산된 값이 작을수록 분류가 잘 되었다고 판단할 수 있다[7]. 이것은 클러스터링이 잘 될수록 무질서도가 적다고 말할 수 있다.

2.6 정점 검출(Vertex Detection)

소속값 u_{ik} 를 분석함으로써 정점을 찾을 수 있다. 예를 들어 두 면과 만나는 점들은 변(edge) 이라고 할 수 있는데 한 점에서 두

면과의 각각의 거리가 조건 이하가 되면 소속값을 0.5 로 나누어 갖게 된다[8]. 마찬가지로 3면이 만나는 점은 소속값을 0.33 으로 나누어 갖게 되는데 이 점들을 정점이라 할 수 있다. 이런식으로 한 데이터가 차지하는 여러 면들에 대한 소속값이 일정한 값으로 나누어져 있다면 이 데이터를 물체의 정점이라 할 수 있다. 따라서 u_{ik} 의 분석을 통해 각 정점이 어떤 면들과 이루어진 알 수 있으므로 최종적으로 3차원 물체를 복원할 수 있다.

2.7 시물레이션 결과

1)육면체

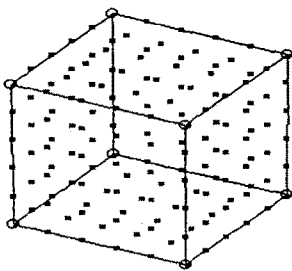


그림 3. 정육면체에 대한 수행결과

클러스터 개수	entropy
3	0.4384
4	0.4496
5	0.4904
→ 6	0.3992
7	0.4221
8	0.5078

표 1. 클러스터 개수에 따른 entropy

2)오면체(피라미드)

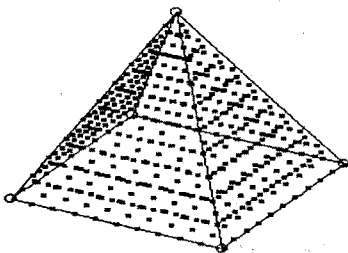


그림 4 오면체 데이터 및 수행결과

클러스터 개수	entropy
3	0.3653
4	0.3647
→ 5	0.1688
6	0.2477
7	0.2926

표 2. 클러스터 개수에 따른 entropy

3. 결 론

FCV 알고리즘을 이용하여 3차원 데이터에 대해서 정점을 찾아 물체를 복원을 해보았다. FCV 문제점이었던 초기값과 클러스터 개수를 scatter matrix를 이용하여 해결했으며 평가함수 entropy를 써서 결과에 대한 평가를 해보았다. 평면으로 구성되어 있는 물체에 대해서는 좋은 결과를 냈음을 알 수 있다. 그러나 만약 평면이 아닌 구와 같이 곡면을 가지고 있는 물체가 존재한다면 이러한 물체들은 정점이라는 것이 존재하지 않는다. 그렇게 때문에 임의의 스펙에 맞게 평면을 정해주어 적당하게 표현해 주어야 한다.

(참 고 문 헌)

- [1] B. Noble, Applied Linear Algebra, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969
- [2] I. M. Anderson and J. C. Bezdek, "Curvature and Tangential Deflection of Discrete Arcs," IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. vol. PAMI-6. p.27-40. 1984.
- [3] J. C. Bezdek, R. J. Hathaway, M. J. Sabin, W. Tucker, "Convergence theory for fuzzy c-means: counterexamples and repairs," IEEE Trans. SMC, vol. SMC-17, no. 5, pp.873-877, 1987
- [4] J. C. Bezdek, C. Coray, R. Gunderson, and J. Watson, "Detection and characterization of cluster substructure Part I. Linear structure:Fuzzy c-lines," SIAM J. Appl. Math, vol.40, No.2, pp.339-357, 1981
- [5] J. C. Bezdek, C. Coray, R. Gunderson, and J. Watson, "Detection and characterization of cluster substructure Part II. Fuzzy c-Varieties and convex combinations thereof," SIAM J. Appl. Math, vol.40, No.2, pp.358-372, 1981
- [6] F.L. Lewis, Optimal Estimation with an introduction to stochastic control theory: Wiley-interscience, 1976
- [7] M. P. Windham, "Cluster validity for the fuzzy c-means clustering algorithm," IEEE Trans. PAMI, vol. PAMI-4, no. 4, pp. 357-363, 1982
- [8] J. C. Dunn, "A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters," J. Cybernetics, vol. 3, no. 3, pp. 32-57, 1973