

# 반무한체의 기본해를 이용한 표면 강체기초의 동적거동해석

이강원, 홍성호, 조우연\*, 김문겸\*  
한국가스공사 연구개발원, 연세대학교 토목공학과\*

## Dynamic Analysis of Surface Foundation Using Half-space Fundamental Solution

Lee, Kangwon, Hong, Seong-Ho, Cho, Woo Yeon\*, Kim, Moon Kyum\*  
KOGAS R&D Center, Department of Civil Engineering, Yonsei University\*

### 1. 서론

지진을 비롯한 교통하중, 발파하중등의 외부 진동하중에 의해 발생하는 대상 구조물의 진동은 구조물의 독립적 거동으로 나타나는 것이 아니라 지반과 구조물 기초의 접촉면을 통해 상호 영향을 미치게 된다<sup>[1]</sup>. 특히 LNG 저장탱크와 같이 대형 상부구조물의 경우 상호작용력은 크게 작용하게 되므로 본 연구에서는 상부 구조계의 단순화된 형태인 기초계의 동적거동을 파악하기 위해 주파수영역 경계요소법을 사용하여 수치적으로 연구되었다. 여기서 기초는 탄성 반무한체에 완전 부착되어 있는 임의의 형상을 갖는 3차원 무질량 표면기초로 고려되었다. 임의의 형상을 갖는 기초를 고려하기 위해 표면에 대한 반무한체의 동적 Green 함수를 이용하여 지반과 기초의 접촉면만을 이산화하여 나타내었다. 이것은 외부에서 작용하는 조화하중에 대해서 기존의 해들과 비교하여 개발된 방법의 타당성을 검증하였다.

### 2. 반무한체의 기본해

그림 1은 본 연구에서 고려대상으로 하는 3차원 선형탄성 반무한체 V 위의 임의의 형상  $S_f$ 를 갖는 무질량 강체 기초를 도시한 것이다. 이에 대한 운동방정식은 식 (1)과 같다.

$$(c_1^2 - c_2^2)u_{i,ij} + c_2^2 u_{j,ii} + b_j = -\omega^2 u_j \quad (1)$$

여기서  $\omega$  는 각 주파수(angular frequency),  $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$  이고  $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$  로써 각각 종파와 전단파의 속도를 나타내며  $b_j$  는 물체력을 나타낸다.

본 연구에서는 Lamb<sup>[2]</sup>에 의해 제시되었던 반무한체의 Green 함수  $G_{ij}(x, y, 0)$  를 이용한 경계요소해석을 실시한다. 여기서 변위항은 각주파수  $\omega$  에 대해 원점에서  $i$  방향으로 작용하는 하중에 대한  $j$  방향의 응답으로 고려한다.  $\lambda$  와  $\mu$  는 각각 Lamé 상수이고  $\rho$  는 밀도이다.  $G_{ij}$  의 요소는 운동방정식 (1) 에 물체력  $b_j = \delta(x, y)e_j$  를 가하고  $x$  방향과  $y$  방향에 대해 두 번 Fourier 변환하여 얻은 해이며 총 9 개의 요소를 갖는다.  $G_{ij}$  의 일반화된 형태는 다음과 같다.

$$G_{ij}(x, y) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (2)$$

여기서  $C$  는 상수이며 9개의 요소 중  $G_{12} = G_{21}$ ,  $G_{13} = -G_{31}$  그리고  $G_{23} = -G_{32}$  관계를 이용하면 총 6 개의 요소만이 필요하게 된다. 식 (2)에 나타난 직교좌표계의 식은 두 번의 무한 적분과정을 거쳐야 하므로 직교좌표계를  $x = r\cos\phi$  와  $y = r\sin\phi$  를 이용하여 구형좌표계로 전환하고 이용하면 식 (3) 과 같이 한 번의 무한적분항으로 표현할 수 있다.

$$G_{ij}(r, \phi) = \int_0^{+\infty} f(r) \Psi(z) J_m(z) dz \quad (3)$$

여기서  $J_m(z)$  는 1 종  $m$ 차 Bessel 함수이고  $\Psi(z)$  는 특이점을 갖게 되므로 적분구간을 나누어 고려해야한다<sup>[3]</sup>.

### 3. 경계요소법

식 (1)과 관련된 경계적분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_{ij}u_i = \int_{S_f} U_{ij}t_i dS - \int_S T_{ij}u_i dS \quad (4)$$

여기서  $U_{ij}$  와  $T_{ij}$  는 주파수영역에서의 무한체에 대한 Green 함수의 변위 및 표면력에 해당되며  $c_{ij} = (1/2)\delta_{ij}$  이다. 이 방정식이 반무한 Green 함수에 대해 사용된다면 표면력  $T_{ij} = 0$  이고  $c_{ij} = \delta_{ij}$  로 구성되며 식 (4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_j = \int_{S_f} G_{ij}(x_1, x_2, 0) t_i(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

여기서  $G_{ij}$  는 표면 반무한체 Green 함수 또는 Lamb의 변위 텐서를 나타낸다. 하중점과 응답 점이 모두 반무한체의 표면에 존재하게 된다.

식 (5)에 대한 수치해를 위해 지반-기초 접촉면  $S_f$  는 경계요소로 이산화된다. 따라서 식 (5)는 이산화된 형태로 다음의 형태를 갖는다.

$$\{u\} = [\bar{G}]\{t\} \quad (6)$$

여기서 벡터  $\{u\}$  와  $\{t\}$  는 각각 접촉면에서의 변위와 표면력의 절점값을 나타낸다. 그리고 영향행렬  $[\bar{G}]$  는 국부좌표계로 표현되는 요소행렬  $[G]^e$  로부터 형성된다. 지반과 강체 기초의 접촉면  $S_f$  에서의 적합조건은 기초의 중앙부에서의 변위 및 회전  $\Delta_i$  와  $\Phi_i$  ( $i = x, y, z$ )을 이용하여 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\{u\} = [S]\{\Delta\} \quad (7)$$

$$\{P\} = [F]\{\Phi\} \quad (8)$$

여기서  $\{P\} = \{P_i, M_i\}$  로서  $6 \times 1$  벡터의 형태를 나타내며 외부 힘과 모멘트이며  $[F]$  는  $6 \times 3k$  ( $k$  는 접촉절점의 총수) 행렬로 나타난다. 결국 그림 1에서 볼 수 있듯이 기초의 중앙에 작용하는 힘  $P_i$  와 모멘트  $M_i$  ( $i = x, y, z$ ) 는 접촉면에서의 평형조건으로부터 산출되며 식 (6), (7) 그리고 (8)의 조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{P\} = ([F][\bar{G}]^{-1}[S])\{\Delta\} = [K(\omega)]\{\Delta\} \quad (9)$$

여기서 행렬  $[K(\omega)]$ 는  $6 \times 6$  행렬로서 무질량 강체 기초의 임피던스(동적 강성)를 나타낸다. 무질량 강체 기초의 컴플라이언스(동적 유연성)  $[C(\omega)]$ 는  $[K(\omega)]^{-1}$ 과 같다.

#### 4. 수치해석결과 및 분석

그림 2는 반무한체 상에 존재하는 정사각형 형태의 강체기초와 그 위에 작용하는 수직응력을 나타낸 것이다<sup>[4]</sup>. 해석에 사용된 포아송비는 0.25 이고 수직응력은 균등하게 작용한다. 본 연구와의 비교를 위해 사용된 무차원 컴플라이언스는  $C_D = u_2 \mu / \sigma_v b$  이고 무차원 주파수는  $a_0 = \omega b / c_2$  이다. 그림 3에서 볼 수 있듯이 무차원 주파수 별로 무차원 컴플라이언스의 실수부와 허수부 모두 잘 일치함을 알 수 있다.

또 다른 해석 예로서 그림 4는 반무한체 상의 원형 강체기초<sup>[5]</sup>를 나타낸 것이다. 해석에 사용된 포아송비는 0.33이고 하중은 조화 수평력과 모멘트가 작용한다. 비교를 위해 정적해석치와 동적해석치의 비율로서 동적확대계수(Dynamic amplification factor)  $f_{11}, g_{11}$  이 사용되었다. 여기서  $f_{11}$ 은 변위에 대한 것이고  $g_{11}$ 은 회전엔 관한 항이다. 그림 5에서 볼 수 있듯이 무차원 주파수가 0 일 때는 정적인 경우로서 변위항  $f_{11}$ 은 1에서 주파수가 증가할수록 감소하게 되며 잘 일치하는 결과를 나타내고 있다. 또한 회전항  $g_{11}$  역시 유사한 결과를 나타내고 있으며 이로써 본 연구방법의 타당성을 밝혔다.

#### 5. 결론

1. 반무한체 상에 존재하는 무질량 강체 표면기초에 대해 반무한 기본해를 이용하여 동적거동이 고찰되었으며 기존의 해석결과와 비교, 검토하여 본 연구방법의 타당함을 입증하였다.
2. 본 연구방법은 반무한체 상의 기초에 대해 기초와 반무한체의 접촉면만 이산화하여 형상에 관계없이 동적거동을 산정할 수 있다. 따라서 기초계를 확장시켜 상부구조계와 연계 고찰한다 면 지반-구조계에 대해 보다 정확한 응답을 구할 수 있으리라 판단된다.

#### 감사의 글

본 연구는 한국가스공사의 지원 아래 “LNG 저장탱크 동특성 해석 프로그램 개발에 관한 연구”에서 연세대학교와 한국가스공사가 공동으로 수행한 연구의 일부이며 이에 관계기관에 감사의 뜻을 표합니다.

#### 참고문헌

1. 김문겸, 이종우, 조성용, "2차원 다층반무한해를 이용한 지하구조계의 동적 경계요소해석", 한국지진공학회 논문집, 제1권, 제4호, 1997, pp.59-68.
2. Lamb, H., "On the propagation of the tremors over the surface of an elastic solid," *Philosophical Transactions of Royal Society*, Vol.A203, 1904, pp.1-42.
3. Qian, J. and Beskos, D.E., "Dynamic Interaction Between 3-D Rigid Surface Foundations and Comparison with the ATC-3 Provisions," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, 1995, pp.419-437.
4. Thomson, W.T. and Kobori, T., "Dynamical compliance of rectangular foundations on an elastic half-space," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.30, 1963, pp.579-584.
5. Veletsos, A.S. and Wei, Y.T., "Lateral and Rocking Vibration of Footings," *Journal of Mechanics and Foundation Division*, ASCE, 1971, pp.1227-1248.

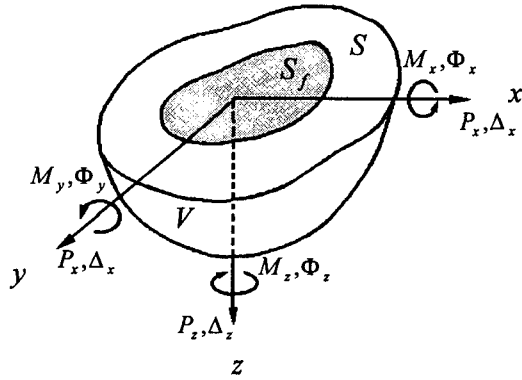


그림 1. 강체 표면기초에 작용하는 하중과 기하형태

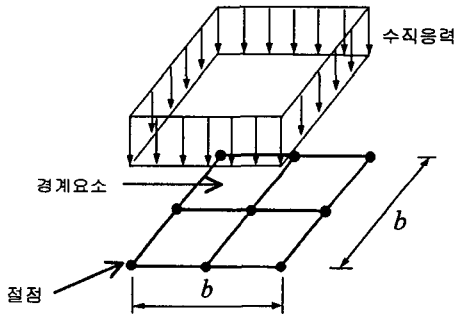


그림 2. 반무한체 상의 정사각형 강체기초

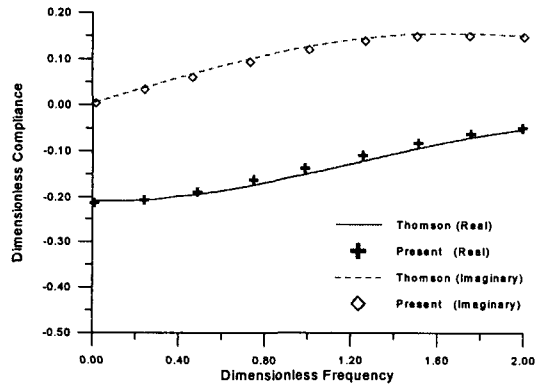


그림 3. 정사각형 강체기초의 컴플라이언스 비교

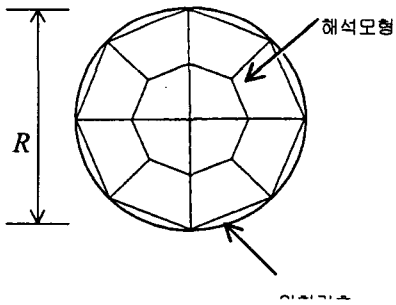


그림 4. 반무한체 상의 원형 강체기초

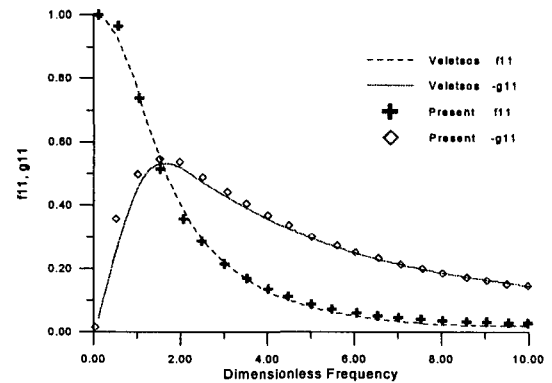


그림 5. 원형 강체기초의 동적응답계수 비교