

비구조형 삼각형 격자에 대한 SMAC기법을 이용한 비압축성 나비에-스톡스 방정식 해법 개발

Development of an Incompressible Navier-Stokes Solver using SMAC Algorithm on Unstructured Triangular Meshes

남현식¹⁾, 문영준²⁾

Hyeun S. Nam, Young J. Moon

An unstructured finite volume method is presented for seeking steady and unsteady flow solutions of the two-dimensional incompressible viscous flows. In the present method, SMAC-type algorithm is implemented on unstructured triangular meshes, using second order upwind scheme for the convective fluxes. Validation tests are made for various steady and unsteady incompressible flows. Convergence characteristics are examined and accuracy comparisons are made with some benchmark solutions.

1. 서론

비압축성 유동의 계산은 일반적으로 artificial compressibility method[1]와 MAC-type scheme [2]의 두 가지 방식으로 나뉘어 질 수 있는데, MAC 기법은 비정상상태의 유동 계산에 널리 이용되어 왔으며 fractional step method[3], simplified MAC(SMAC)[4] scheme, SIMPLE[5] 등으로 발전되어 왔다. 이번 연구는 비구조형 삼각형 격자계에 SMAC 기법을 적용하여 정상상태와 비정상상태의 유동을 모두 계산할 수 있는 코드를 개발하는 것을 목표로 하였다.

본 연구에서 사용한 2차원 코드는 격자 중심에 기초한 유한체적법과 2차 풍향차분법을 사용하였고, 외제적 시간적분법을 사용하였다. SMAC 기법은 새로운 시간에서의 압력을 구하기 위해 Poisson 방정식을 풀어야 하는데, 이 계산과정은 많은 시간을 필요로 하므로, 이번 연구에서는 간략화된 Poisson 방정식 해법을 사용하여 계산량을 줄이도록 하였다.

SMAC 기법은 비정상상태 유동의 계산을 위해서 연속방정식을 만족시킬 때까지 반복계산을 수행하게 되는데, 최소한의 반복계산만을 수행하여 시간을 절감시키면서 정상상태의 유동도 계산해 보았다. 갑작스런 병진운동을 하는 실린더 주위의 유동을 해석하고 비정상유동 계산의 정확성을 확인하기 위하여 기존의 결과와 비교해 보았다. 또한 단력있는 원통 내에서 회전하는 물체 주위의 유동을 계산하여 회전좌표계에도 이 기법이 잘 적용되는가를 확인해 보았다.

2. 지배방정식 및 수치해석기법

2-1. 지배방정식 및 이산화 기법

지배방정식은 시간중속 2차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식으로, 이동격자계를 고려하여 격자의 이동속도 \vec{w} 를 (w_x, w_y) 라 하면 직교좌표계에 대한 연속 방정식과 운동량 방정식을 아래 식(1)과 같이 보존형 벡터 꼴의 무차원화된 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} \right) \quad (1)$$

여기서,

1. 고려대학교 대학원
2. 고려대학교 기계공학과 (136-701, 서울시 성북구 안암동 5가1)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} u \\ u(u-w_x) + p \\ u(v-w_y) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} v \\ v(u-w_x) \\ v(v-w_y) + p \end{bmatrix},$$

$$F_v = I_m \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad G_v = I_m \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad I_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

격자 중심식 유한체적법을 사용하여 식(1)을 적분형태로 나타내면 아래 식(3)과 같고,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega = - \oint_{\partial \Omega} [(F-F_v)dy - (G-G_v)dx] \quad (3)$$

여기서 Ω 는 cell의 면적을 의미한다. 셀의 면의 개수는 항상 3개이므로 위의 적분형태는 다음과 같이 이산화된 형태로 나타낼 수 있다.

$$Q_i \frac{\Delta Q_i}{\Delta t_i} = - \sum_{j=k(i)} [(F-F_v)\Delta y - (G-G_v)\Delta x]_{i,j} \quad (4)$$

i 는 cell의 index이고 j , 즉 $k(i)$ 는 주위 cell들의 반시계 방향의 지수들을 나타낸다. Δt_i 는 i 번째 격자에서 stability 조건을 만족하는 최대의 시간간격을 의미하며, 정상상태 유동의 계산에서는 이렇게 격자마다 각기 다른 최대한의 시간간격을 주어 수렴을 가속화시키는 Local Time Stepping 기법을 사용하였다.

식(2)에서 벡터 F, G 는 대류항을 의미하며 2차 풍향차분법(second order upwind difference)을 사용하였다. 격자 i, j 의 공통접촉면에서 보았을 때 상류 셀이 j 라고 할 경우 2차 풍향차분법에 따른 접합면에서의 값은

$$q_{i,j} = q_j + \vec{\nabla} q_j \cdot \vec{r}_{i,j} \quad (5)$$

와 같이 나타낼 수 있으며, 이 때 $\vec{r}_{i,j}$ 는 j 셀 중심에서 ij 공통면까지의 거리벡터에 해당된다. 한편 상류방향 셀의 결정은 ij 공통면에서의 contravariant 속도의 평균값의 방향에 의해 결정된다.

2-2. SMAC 기법

시간 진행을 2단계로 나누어 정확도를 높이고 MAC기법에서의 압력의 Poisson 방정식을 간략화 시킨 것이 SMAC해법이다. 압력 p 를 새로운 시간 $n+1$ 에서 평가하는 운동량 방정식

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = f(v^n, p^{n+1}) \quad (6)$$

을 아래와 같이 2단계로 분리해서 적분한다.

$$\frac{\hat{v} - v^n}{\Delta t} = f(v^n, p^n) \quad (7)$$

$$\frac{v^{n+1} - \hat{v}}{\Delta t} = f(0, p^{n+1} - p^n) = f(0, \delta p) = -\nabla \delta p$$

$$\delta p = p^{n+1} - p^n \quad (8)$$

여기서 새로운 시간단계의 v^{n+1} 과 중간단계의 \hat{v} 의 속도차를 일종의 속도 포텐셜 ϕ 의 구배로 나타낼 수 있다.

$$\nabla \phi = \hat{v} - v^{n+1} \quad (9)$$

윗식에 발산을 취해준 후, $n+1$ 시각에서 연속방정식이 성립한다는 조건($\nabla \cdot v^{n+1} = 0$)을 고려하면 다음 식이 얻어진다.

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \hat{v} \quad (10)$$

\hat{v} 는 식(7)에 의해서 구해질 수 있으므로 ϕ 에 관한 Poisson 방정식을 계산 할 수 있게 되었다.

식 (8)과 (9)로부터 압력에 관해서 아래와 같은 식을 얻을 수 있으므로 n+1 시각에서의 압력이 구해지게 된다.

$$p^{n+1} = p^n + \delta p = p^n + \frac{\phi}{\Delta t} \quad (11)$$

실제로는 δp 를 그대로 사용하지 않고 완화 계수 ω ($0 \leq \omega \leq 1$)를 곱하여 압력 값을 계산하였다. 비정상 상태 유동을 풀기 위해서는 n 단계에서 n+1 단계로 바로 시간을 진행시키지 않고, 식(11)에 의해 구해진 압력을 다시 식(7)에 대입하여 $\nabla \cdot \hat{v}$ 값이 충분히 작아질 때까지 내적 반복계산을 수행하였다.

2-3. Poisson 방정식 해법

SMAC기법은 압력장을 구하기 위해 Poisson 방정식을 계산해 주어야 한다. 식(10)을 셀에 대해 체적 적분을 취해 주면,

$$\int_V \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) dV = \int_V \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) dV \quad (12)$$

와 같이 나타나고 발산정리를 이용하여 선적분 형태로 변환시켜주면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\oint (\phi_x dy - \phi_y dx) = \oint (\hat{u} dy - \hat{v} dx) \quad (13)$$

또한, 식(13)을 이산화 하면 다음 식과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=k_0} (\phi_x dy - \phi_y dx) = \sum_{j=k_0} (\hat{u} dy - \hat{v} dx) \quad (14)$$

Poisson 방정식을 정확히 풀기 위해서는 좌변의 ϕ_x 와 ϕ_y 를 j면을 둘러싸고 있는 주위 면들에서의 ϕ 값들을 선 적분하여 구해야 하지만, 방정식을 풀기 위해서 i번째 cell의 주위 면에서의 기울기 ϕ_x , ϕ_y 를 아래와 같이 간략화 시켜 구해준다.

$$\begin{aligned} \phi_x &= \xi_x \phi_\xi + \eta_x \phi_\eta \approx \xi_x \phi_\xi = J y_j (\phi_j - \phi_i) \\ \phi_y &= \xi_y \phi_\xi + \eta_y \phi_\eta \approx \xi_y \phi_\xi = J x_j (\phi_j - \phi_i) \end{aligned} \quad (15)$$

ξ 는 면에 수직인 방향, η 는 면에 평행한 방향을 의미하며, J는 j면에서의 Jacobian을 나타낸다. 결국 ϕ_ξ 는 $(\phi_j - \phi_i)$ 와 같으므로 식(14)는 아래와 같은 식으로 간략화 시킬 수 있다.

$$\sum_{j=k_0} \{ J(x_\eta + y_\eta) (\phi_j - \phi_i) \} = \sum_{j=k_0} (\hat{u} dy - \hat{v} dx) \quad (16)$$

본 논문에서는 위 Poisson 방정식의 식(14)를 완전히 이산화 하여 10개의 주변셀을 사용한 경우와 식(16)과 같이 단순화하여 4개의 셀을 사용한 경우를 각각의 유동문제에 적용하여 보았으나 해의 정확도나 수렴성에서 차이가 나지 않았다.

3. 결과 및 고찰

3-1. 캐비티 유동 해석[6]

lid-driven cavity 유동에 대해서 Reynolds 수를 400, 1000인 경우에 대하여 계산해 보았다. 사각형 격자의 계산결과와 비교할 때 일관성을 유지하기 위해서 사각형 격자를 반으로 나누어 삼각형 격자를 만들었으며, Reynolds 수가 400, 1000인 경우에 격자를 각각 30×30 , 40×40 (그림 1)을 사용하였다. 그림 2는 수렴선도를 나타낸 것으로 Re 수가 400인 경우는 약 4000번, Re 수가 1000인 경우에는 약 7000번 근처에서 수렴하였다. 그림 3은 $x=0.5$ 인 centerline을 따라 u속도값을 나타낸 것으로 Ghia et al[7]의 Benchmark 결과와 비교하여 나타내었다. 비정상상태 유동을 풀기 위한 방식으로 되어있는 코드를 내적반복계산 횟수를 줄임으로서 정상상태의 캐비티유동을 계산해

보았는데 결과와 수렴성면에서 비교적 좋은 결과를 구할 수 있었다.

3-2. 실린더 주위의 비정상유동 해석

실린더 주위 유동의 경우, Reynolds 수가 40 이상이 되면 Von Karman vortex street의 형성으로 유동이 시간에 따라 변한다는 것은 잘 알려진 사실이다. 갑작스런 병진상태에 있는 실린더 주위의 유동해석은 지금까지 많은 실험과 수치계산이 수행되어 왔기 때문에 비정상 상태 계산의 Benchmark 테스트로 많이 사용하는 예제이다. Reynolds 수가 1000인에 경우를 택해서 계산해

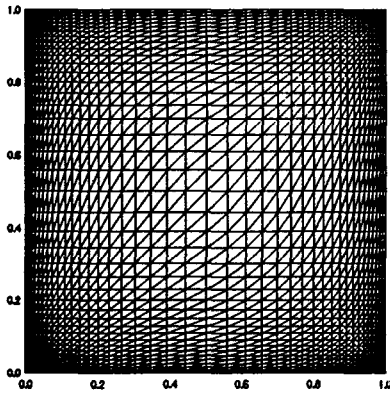


Fig. 1 Meshes (40×40)

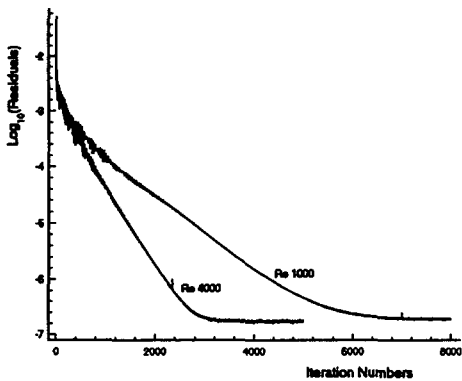


Fig. 2 Comparison of convergence history

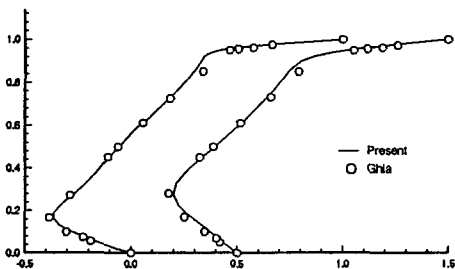


Fig. 3 Centerline u-velocity comparison, $Re=400(30 \times 30)$, $Re=1000(40 \times 40)$

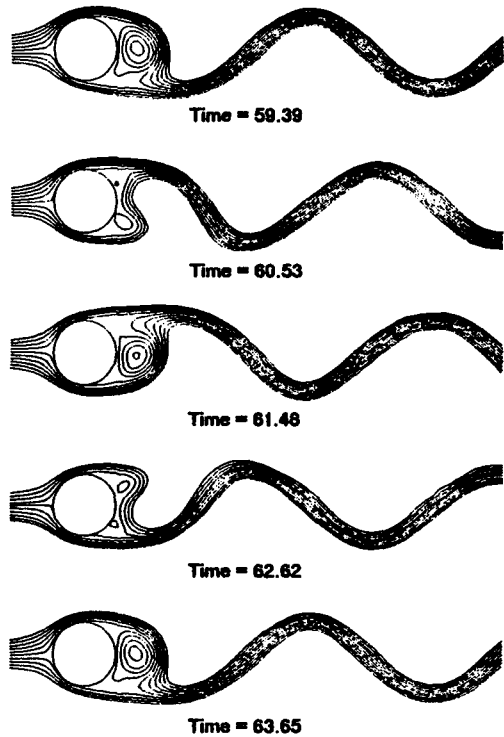


Fig. 4 Instantaneous streamlines at various time

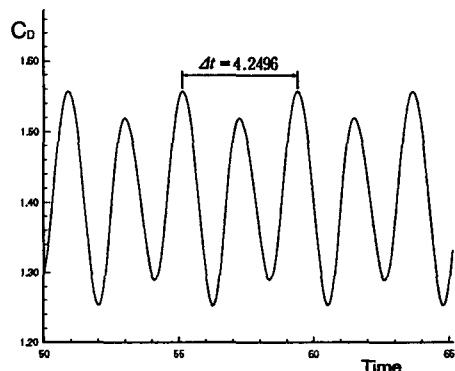


Fig.5 Time variation of the drag coefficient

보았으며, 와류가 떨어져 나가기 시작한 후 시간에 따른 유선의 모습을 그림 4에 나타내었다. 이처럼 유동이 진동수 ω 로 주기적인 현상을 보일 때 Strouhal 수는 식(17)과 같이 정의되고 이 값을 기존의 결과 값과 비교하여 비정상 상태 유동 계산의 정확성을 확인해 보았다.

$$St = \frac{\omega D}{V} \quad (17)$$

저항계수의 시간에 따른 변화 곡선이 그림(4)에 나타나 있으며, 이 주기를 이용하여 구해진 St 수는 0.235이다. NASA의 CFL3D 코드[7]로 계산된 결과의 St 수가 0.238이므로 비정상상태 유동이 잘 계산되었음을 확인할 수 있었다.

3-3. 회전 좌표계 방정식을 이용한 정상 및 비정상 유동 해석

닫혀있는 원통 안에서 회전하는 물체가 있을 때 내부의 유동현상을 살펴봄으로써 지금까지의 기법이 회전좌표계 방정식에도 제대로 적용될 수 있는지를 살펴보았다. 회전하는 물체는 그림 6에 나타나 있는 것처럼 십자가 형상이며, 격자제는 전체적으로 균일한 크기를 가진 2006개의 격자로 이루어져 있다.

시간진행에 따라 실제로 격자를 회전시켜주면서 비정상상태 유동 계산을 수행하였으며, 그림 8은 각각 240°, 480°, 720° 회전하였을 때의 속도 벡터를 나타낸 것이다. 한편 회전 문제를 계산할 경우 식(1)에 회전에 의한 원천항을 더해 주고 실제로 격자를 회전시키지 않고도 해를 구할 수 있는데 이러한 방식으로 계산한 결과와 그림 7처럼 실제로 격자를 회전시키면서 구한 결과를 비교해 두 기법의 정당성도 검증해보았다. 그림8은 물체가 5번 회전했을 때의 압력선도를 두기법에 따라 계산한 결과를 비교하여 나타낸 것이고, 그림 9는 각각의 경우의 수렴선도를 나타낸 것이다.

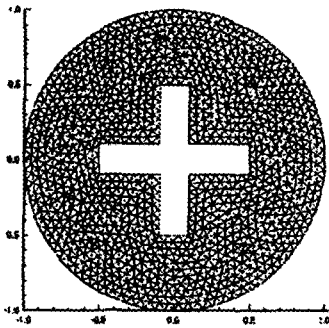
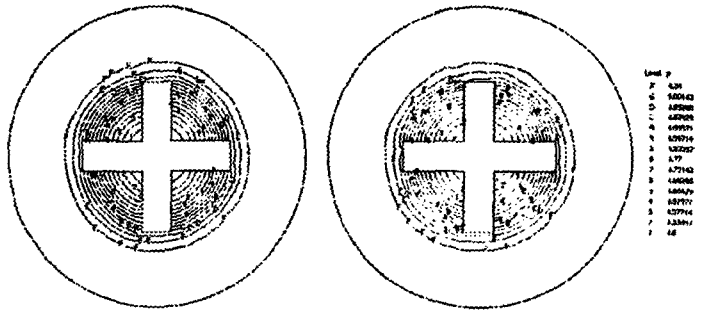
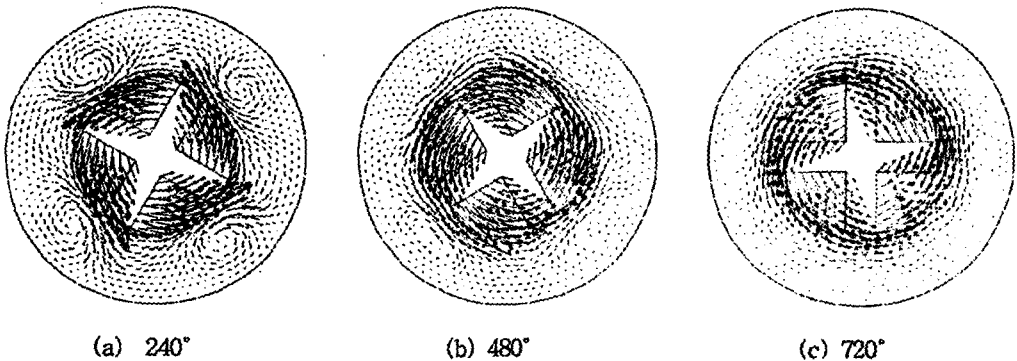


Fig. 6 Meshes (2006 cells)



(a) rotating meshes (b) fixed meshes
Fig. 8 Comparison of pressure contours (5 cycle rotated)



(a) 240° (b) 480° (c) 720°
Fig. 7 Velocity vector plot with rotating angle

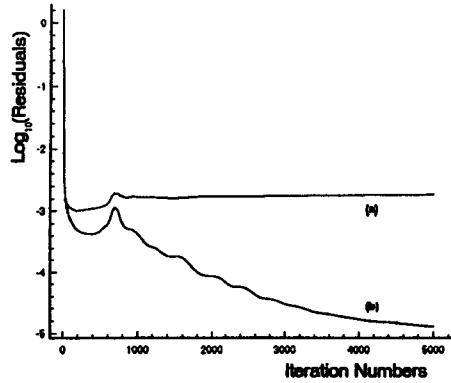


Fig. 9 Comparison of convergence history
 (a) rotating meshes (b) fixed meshes

4. 결론

비구조형 집중격자계에 SMAC기법을 적용하여 외재적 시간적분 방식으로 2차원 Navier-Stokes 방정식의 해를 구해보았다. 정상상태 유동의 예로 캐비티 유동 문제를 계산해 보았으며, 비정상상태 유동의 계산 예로 갑작스런 병진상태에 있는 실린더 주위의 유동을 계산하고 Strouhal 수를 구하여 이전에 있었던 다른 계산 결과와 비교해 보았다. 또 회전 좌표계의 계산을 위해 원통 안에서 회전하는 물체 주위의 유동을 격자를 회전시켜 가며 또 격자를 회전시키지 않고 각각 계산하여 결과를 비교해 보았다. 지금까지의 결과를 정리하면 다음과 같다.

- (1) Poisson 방정식 해법에 있어서 간략화한 방식을 사용하더라도 정확성이나 수렴성이 나빠지지 않아 계산시간을 많이 절약할 수 있었다.
- (2) 같은 코드로 반복계산 횟수를 조절함으로써 정상상태 유동과 비정상상태 유동을 모두 효율적으로 계산할 수 있었다.
- (3) 실린더 유동의 경우 시간에 대한 주기성을 보여주는 Strouhal Number를 계산해봄으로써 비정상상태유동 계산의 신뢰성을 알아보았고 회전좌표계 방정식을 적용한 예를 계산해 봄으로써 회전좌표계의 계산에도 이 기법이 잘 적용됨을 확인하였다.

5. 참고문헌

- [1] Chorin, A.J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," J. Comput. Phys., Vol. 2, pp. 12-26, 1967
- [2] Harlow, F.H. and Welch, J.E. Phys.Fluids, Vol. 8, pp. 2182-2189, 1965
- [3] J.Kim and P.Moin, "Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," J. Comput. Phys., Vol. 59, pp. 308-323, 1985
- [4] Hirt, C.W. and Cook, J.L., J. Comput. Phys., Vol. 10, pp 324-340, 1972
- [5] Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Mac Graw Hill, New York, 1980
- [6] Young J. Moon, "Explicit and unstructured grid solution of the incompressible Navier-Stokes equations using artificial compressibility method," CFD journal, Vol.6, No.1, 1997
- [7] Brentner, K.S. et al, "Computation of sound generated by flow over a circular cylinder : an acoustic analogy approach," NASA Conference Publication 3352, 1997