

# Bifurcation 이론을 이용한 전압안정도 해석

°김 시 진, 최 중 윤, 안 현 식, 김 진 오  
한양대학교 전기공학과

## Voltage Stability Analysis using Bifurcation Theory

Si Jin Kim, Jong Yun Choi, Hyun Sik Ahn, Jin O Kim  
Department of Electrical Engineering, Hanyang University

### Abstract

Recently, as power systems become large and complicated, chaos theory has been introduced to analyze their nonlinear characteristics. In this paper, voltage collapse phenomenon is more accurately analyzed using bifurcation theory of chaos. Chaotic behaviors has been observed in computer simulation for a simple power system over a range of loading conditions. Besides existence of voltage collapse point in critical value, operation of power system in Hopf window can be the cause of voltage collapse.

### 1. 서 론

근래에 들어 산업의 발달과 경제 수준의 향상에 의한 전력 수요의 증가에 따라 과부하의 영향으로 인한 전압변동이나 전압붕괴와 같은 전압의 안정성 문제가 크게 대두되고 있다.

전압안정도란 어떠한 외란이나 부하의 증가가 있을 때 모든 모선의 전압이 허용할 수 있는 범위내의 값으로 유지될 수 있는 능력에 관계된 것이다. 전압안정도의 해석방법으로는 동적 시스템 모델을 이용하는 동적 방법과 어느 순간의 안정성이나 불안정에 대한 민감도, 근점도 등을 이용하는 정적 방법 등이 있다. 이러한 해석방법은 각 모선에서의 P-V곡선이나 Q-V곡선을 이용하여 부하의 증가에 따른 전압의 변화추이를 관찰하여 안정성을 판별한다[1].

최근 활발히 연구되고 있는 카오스 이론은 전력계통의 여러 분야에 적용되고 있으며, 특히 안정도 분야에 중점적으로 연구되고 있다. 전압안정도에서 부하의 유효전력이나 무효전력의 변화에 따라 안정성이 변하는 과정은 카오스 이론으로부터 나오는 bifurcation현상으로 해석될 수 있으며, 그 연구가 현재 여러 방향으로 진행되고 있다[2]. 다양한 전력계통 모델을 통해 전압 안정도 문제의 원인중 일부가 Hopf bifurcation과 Saddle-node bifurcation인 것으로 판별되었다. 즉, 현재의 동작되는 평형점이나 주기해(periodic solution)에서의 특이해(eigenvalue)가, 계통의 파라미터가 천천히 변화해 감에 따라 실수부의 부호가 바뀌는 bifurcation현상으로 인하여 평형점이나 주기해의 성질이 변화하여 전압붕괴가 발생하게 된다.

다른 여러 연구에서는 bifurcation의 결과로 전압의 진동 현상을 설명하고 있으며, 전압붕괴의 형태가 파라미터에 따라 진동 후의 붕괴와 순간적인 붕괴의 형태가 공존하고 있음이 확인되었다[3,4,5]. 이러한 전압의 진동현상은 파라미터값에 따라 그 변화를 예측하기 힘들뿐만 아니라 어느 순간에는 카오스적인 진동을 하기도 한다. 그러므로 정확한 전압붕괴 지점을 찾는 데 상당한 어려움이 있다. 본 논문에서는 bifurcation현상에 대한 깊은 연구를 통해 정확한 전압붕괴 지점을 찾고, 전압의 진동현상이나 붕괴의 원인을 밝혔다.

### 2. Bifurcation 이론

전력계통에 있어서 그 자체의 강한 비선형성으로 인하여 기존의 해석 방법으로 이해하기에는 어려운 카오스적인 진동 현상이나 동작점의 불안정으로 인한 갑작스런 붕괴현상들에 대한 명확한 해석을 위해서 bifurcation 이론을 도입하고자 한다.

#### 2.1 비선형 시스템의 동작

n차원의 미분방정식으로 다음과 같이 표현되는 비선형 시스템을 고려해보자.

$$\dot{x} = f(x, \mu) = f_{\mu}(x) \quad (2.1)$$

위의 식에서  $x$ 는 시스템의 상태 변수이고 시간에 대한 함수로서  $\phi(t)$ 로 나타낼 수가 있으며,  $\mu$ 는 시스템의 파라미터가 된다. 식 (2.1)의 해는 초기조건이  $x(t_0) = x_0$  일 때  $x(t) = \phi_t(x_0)$ 로 표현되는 궤적이다. 비선형 시스템 (2.1)에서 정상상태의 동작은 세 가지 형태로써, 평형점(equilibrium point), 주기해(periodic solution), strange attractor라고 불리는 카오스(chaos)가 있다.

#### 2.2 Bifurcation

카오스 이론에서 나오는 bifurcation은 시스템 파라미터의 작은 변화로 인해서 시스템의 질적인 변화가 생기는 것을 의미한다. 즉, bifurcation은 식 (2.1)로 표현되는 비선형 시스템의 평형점과 주기해들이 파라미터  $\mu$ 가 변화에 따라 서로간에 충돌하거나 strange attractor가 순간적으로 사라지는 현상이라고 할 수 있다. 전압 안정도를 해석하기 위한 Q-V곡선에서 일어나는 기본적인 bifurcation은 다음과 같다.

##### 2.2.1 Saddle node bifurcation

Saddle node bifurcation은 안정한 평형점과 불안정한 평형점이 공존하다가 파라미터  $\mu$ 가 임계점에 도달했을 때 서로 충돌하여 두 개의 평형점이 모두 사라지는 현상이다. 이때 파라미터  $\mu$  값을 임계값이라고 하며 이에 대응하는  $f(x, \mu)$ 에 대한 Jacobian의 실수 고유값은 0이 된다. 전압안정도의 해석에서 Q-V곡선의 꼭지점에서 일어나는 전압붕괴 현상이 그 예이다.

##### 2.2.2 Cyclic fold bifurcation

Cyclic fold bifurcation은 안정한 주기해와 불안정한 주기해가 공존하다가 파라미터  $\mu$ 가 임계점에 도달했을 때 서로 충돌하여 두 개의 주기해가 모두 사라지는 경우이다.

##### 2.2.3 Hopf bifurcation

Hopf bifurcation은 평형점이나 주기해가 파라미터  $\mu$  값이 변하면서 임계값  $\mu_c$ 에 도달하게 되면 서로 충돌함으로써 그 성질이 변하는 경우이다. 이때 임계값에 대응하는  $f(x, \mu)$ 에

대한 Jacobian의 한 쌍의 복소 고유값의 실수부는 0이 된다. Hopf bifurcation은 임계값을 지난 후 안정해지는 경우 (supercritical)와 불안정해지는 경우(subcritical)의 두 가지가 존재하게 된다.

1) Hopf bifurcation(subcritical)

Subcritical bifurcation은 안정한 평형점과 불안정한 주기해가 존재하다가  $\mu_c$ 값에서 서로 충돌하여 주기해는 사라지고 평형점은 안정성을 잃어버리게 된다. 이것은 시스템 파라미터가  $\mu > \mu_c$ 인 구간에서 안정된 동작점을 얻을 수 없는 경우로 불안정한 bifurcation이 된다.

2) Hopf bifurcation(supercritical)

Supercritical bifurcation은 불안정한 평형점과 안정한 주기해가 존재하다가  $\mu_c$ 값에서 서로 충돌하여 주기해는 사라지고 불안정한 평형점은 안정하게 된다. 이러한 Hopf bifurcation을 가지는 시스템의 정상상태 동작은  $\mu < \mu_c$ 에서는 주기 T를 가지는 궤적을 그리고  $\mu > \mu_c$ 에서는 안정한 평형점에 머무르게 된다.

2.2.4 Catastrophic bifurcation

Catastrophic bifurcation은 시스템 파라미터가 임계값을 지나감에 따라 평형점이나 주기해들 사이의 충돌로 인하여 사라지는 현상과 제한된 파라미터값의 범위내에서 존재하는 strange attractor가 갑자기 사라지는 현상을 말한다.

3. 사례연구

앞에서 살펴본 bifurcation이론이 실제로 전압안정도의 해석에 적용되는 것을 확인하기 위해 그림 3.1과 같은 계통에 적용시켰다[3].

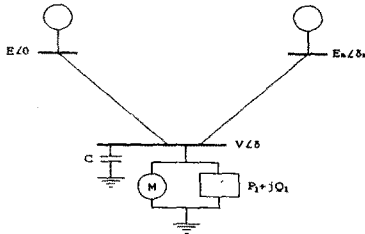


그림 3.1 전력계통의 모델

그림 3.1의 계통을 모델화하기 위해서 발전기는 동요방정식(Swing equation)을 이용하고, 부하는 식 (3.1), (3.2)와 같이 간략화된 유도전동기와 상수  $P_1-Q_1$ 부하의 합으로 나타내었다.

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw} \delta + K_{pv}(V + TV) \quad (3.1)$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qw} \delta + K_{qv}V + K_{q2}V^2 \quad (3.2)$$

이 때, 상수  $P_1-Q_1$ 부하의 무효전력요구량  $Q_1$ 을 변수로 하여 상태 미분방정식을 유도하면 다음의 식 (3.3)-(3.6)과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\delta}_m = \omega \quad (3.3)$$

$$\dot{\omega} = 16.6667 \sin(\delta - \delta_m + 0.0873) V - 0.1667 \omega \quad (3.4)$$

$$+ 1.8807$$

$$\dot{\delta} = 496.8718 V^2 - 166.6667 \cos(\delta - \delta_m - 0.0873) V \quad (3.5)$$

$$- 666.6667 \cos(\delta - 0.2094) V - 93.3333 V$$

$$+ 33.3333 Q_1 + 43.333$$

$$\dot{V} = -78.7638 V^2 + 26.2172 \cos(\delta - \delta_m - 0.0124) V \quad (3.6)$$

$$+ 104.8689 \cos(\delta - 0.1346) V + 14.5229 V$$

$$- 5.2288 Q_1 - 7.0327$$

파라미터  $Q_1$ 이 변함에 따른 계통의 평형점을 찾기 위해 연속 알고리즘을 이용하여  $Q_1-V$ 곡선을 그려보면 그림 3.2와 같은 결과를 얻을 수 있다.

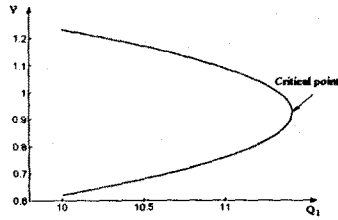
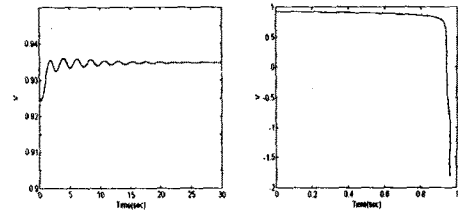


그림 3.2 연속알고리즘을 이용한  $Q_1-V$ 곡선

그림 3.2를 보면  $Q_1$ 이 임계점( $Q_1=11.4114481$ )보다 작으면 전압의 평형점이 존재하지만,  $Q_1$ 이 임계점보다 크면 평형점이 존재하지 않으므로 전압이 불안정해지는 것을 알 수 있다. 이를 확인하기 위하여 임계점보다 약간 작은  $Q_1=11.41$ 과 약간 큰  $Q_1=11.42$ 에 대해서 같은 초기상태로 식 (3.3)-(3.6)을 수치 적분하는 동적 해석방법의 결과를 확인하였다. 그 결과가 그림 3.3에 나타나 있다.



(a)  $Q_1=11.41$ 인 경우 (b)  $Q_1=11.42$ 인 경우

그림 3.3 동적 해석방법의 결과

그림 3.3의 결과를 보면 (a)의 경우 점차 안정평형점으로 수렴하여 전압이 안정해지는 과정을 보여주는 반면, (b)의 경우는 1초이내에 급한 전압의 붕괴현상을 보여준다.  $Q_1$ 이 변해감에 따라 계통의 안정성의 확인과 bifurcation이론의 도입을 위해 식 (3.3)-(3.6)의 Jacobian 행렬의 고유값을 계산하였다. 그 결과  $Q_1=10.946044$ 에서 한 쌍의 복소 고유값의 실수부가 음에서 양으로 변하는 것을 확인하였고, 이는 평형점이 불안정하다는 것을 의미한다. 또한  $Q_1=11.406767$ 에서는 한 쌍의 복소 고유값이 다시 양에서 음으로 변하면서 평형점은 안정성을 회복하였다. 임계점  $Q_1=11.4114481$ 에서는 하나의 실수 고유값이 음에서 양으로 변하면서 임계점보다 아래의 곡선은 불안정한 평형점을 나타낸다. 그림 3.4는 한 쌍의 복소 고유값 하나의 변화를 그림으로 나타낸 것이다.

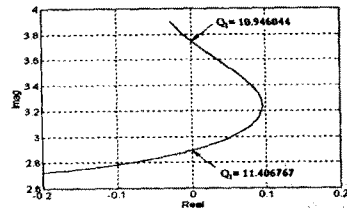


그림 3.4 복소 고유값의 이동

이들 bifurcation이론에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- $Q_1=10.946044 \Rightarrow$  불안정한 Hopf bifurcation (HBU)
- $Q_1=11.406767 \Rightarrow$  안정한 Hopf bifurcation (HBS)
- $Q_1=11.4114481 \Rightarrow$  Saddle-node bifurcation (SNB)

Hopf bifurcation은 주기해를 생성시키므로 이 계통은 안정 평형점 외에도 안정한 주기해에서의 동작이 가능하다. 그러므로  $Q_1$ 을 조금씩 증가시켜가며  $Q_1=10.946044$ 주위에서 안정한 주기해를 찾아보았다. 그 결과 주기가 약 1.6764초 정도의

안정한 주기해가  $Q_1=10.8358$  이후에 존재하였다. 이 안정한 주기해는 Cyclic fold bifurcation(CFB)의 결과이고, 함께 생성된 불안정한 주기해는 Hopf bifurcation에서 생성된 불안정한 주기해이다. 안정한 주기해는  $Q_1$ 이 증가하며 Period doubling bifurcation으로 인해 그 주기가 2배가된다. 그 후 계속된 Period doubling bifurcation으로 인하여 주기가 연속적으로 증가하여 결국에는 카오스적인 성질을 가지는 Strange attractor가 된다. 이 Strange attractor는  $Q_1=10.89434$ 경에서 Catastrophic bifurcation(CB1)으로 인해 사라지게 된다.

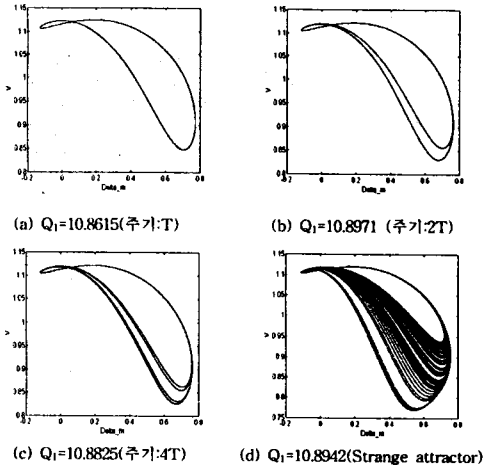


그림 3.5 연속된 Period doubling의 과정

Strange attractor가 사라진 이후에는 안정한 주기해는 존재하지 않기 때문에  $Q_1=10.89434$  이후에는 Hopf bifurcation으로 인한 window가 생성된다. 주기해의 연속된 Period doubling의 과정을 그림 3.5에 나타내었다.

안정한 Hopf bifurcation이 일어나는  $Q_1=11.406767$ 에서는 안정한 주기해가 생성된다. 이 주기해 역시  $Q_1$ 이 약간씩 작아짐에 따라 연속된 Period doubling bifurcation으로 Strange attractor를 만들고  $Q_1=11.376$ 경에서 Catastrophic bifurcation(CB2)으로 사라진다. 그림 3.6은  $Q_1=11.377$ 에서의 Strange attractor를 나타낸다.

위의 결과를 보면  $Q_1$ 이 10.89434보다 크거나 11.376보다 작을 때는 안정한 주기해가 존재하지 않는다. 그러므로 그 사이에서는 안정한 평형점과 안정한 주기해가 모두 존재하지 않는 window가 발생하고, 이 경우 전압은 불안정하게 된다. 이 window내에서 전압이 불안정한 예를 보여주기 위해  $Q_1=11.25$ 인 경우 전압붕괴현상을 그림 3.7에 나타내었다.

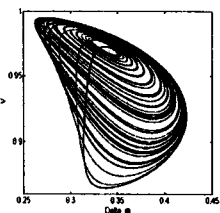


그림 3.6  $Q_1=11.377$

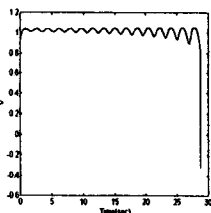


그림 3.7 HW에서 전압 붕괴

그림 3.7을 보면 Hopf window내에서의 전압붕괴는 그림 3.3-(b)의 결과와 달리 전압의 진동현상이 있는 후 천천히 일어난다는 것을 알 수 있다.

앞의 내용을 정리해 보면 SNB( $Q_1=11.4114481$ )은 연속 알고리즘으로 구한 기존의 임계점이 되며, HBU( $Q_1=10.946044$ )과 CB2( $Q_1=11.376$ )사이에 존재하는 Hopf window는 bifurca-

tion 현상으로 인한 전압불안정 영역이 된다. 또한 CFB ( $Q_1=10.8358$ )와 CB1( $Q_1=10.89434$ )사이와 CB2( $Q_1=11.376$ )와 HBS( $Q_1=11.406767$ )사이에서는 주기해들의 연속적인 Period doubling Bifurcation 현상이 발생한다. 이때 전압은 진동현상을 나타낸다.

위의 결과를 볼 때, bifurcation현상은 전압안정도의 문제에서 중요한 역할을 하며, 특히 Hopf bifurcation의 영향으로 일반적인 Q-V곡선을 이용한 전압불안정의 판별로 인한 불안정외에도 다른 불안정이 존재할 수 있다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 전압안정도의 해석에 bifurcation이론을 도입하여 전압붕괴의 원인을 밝혀보고, 전압붕괴의 과정을 살펴보았다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) P-V곡선, Q-V곡선의 꼭지점에서는 Saddle node bifurcation으로 인해 전압이 불안정해진다. 이 때의 전압붕괴는 빠른 시간내에 일어난다.
- 2) 전압붕괴의 원인중 Hopf bifurcation이 중요한 역할을 차지한다. Hopf bifurcation으로 인해 발생한 주기해는 Period doubling을 통해 Chaotic한 성질을 가지며, 이러한 성질이 전압의 진동이나 붕괴현상의 원인이 된다.
- 3) Hopf bifurcation으로 생긴 Hopf window내에서의 전압붕괴는 아주 천천히 진행되며, 그 사이 전압의 진동이 심하다. 이 때문에 일반적인 전압안정도 해석방법으로는 확인하기 힘든 전압붕괴의 과정을 bifurcation이론을 도입하여 밝힐 수 있었다.

#### 참고문헌

- [1] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, Inc., 1993.
- [2] Harry G. Kwatny, Arun K. Pasrija, and Leon Y. Bahar, "Static Bifurcations in Electric Power Networks : Loss of Steady-State Stability and Voltage Collapse", *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, Vol. CAS-33, No.10, pp.981-991 October, 1986.
- [3] H. D. Chiang, C. W. Liu, P. P. Varaiya, F. F. Wu and M. G. Lauby, "Chaos In A Simple Power System", Paper No.92 WM 151-1 PWRs, *IEEE Winter Power Meeting*, 1992.
- [4] E. H. Abed, A. Hamdan, H. Lee and A. Parlos, "On Bifurcations in Power System Models and Voltage Collapse", *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Control and Decision*, pp. 3014-3015, December, 1990.
- [5] V. Ajarapu and B. Lee, "Bifurcation Theory and Its Application to Nonlinear Dynamical Phenomena In An Electrical Power System", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.7, No.1, February, 1992
- [6] Denny Gulick, *Encounters with Chaos*, McGraw-Hill, Inc., 1992.