1997年度 定期總會 및 秋季學術大會 論文集 1997.11.29

γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터의 LMI를 이용한 설계

진승희°, 윤태성**, 박진배*
연세대학교 전기공학과°*, 창원대학교 전기공학과**

Design of γ-Suboptimal Reduced-Order Unbiased H_∞ Filter Using LMI

Jin Seung Hee°, Yoon Tae Sung**, Park Jin Bae*
Yonsei University°*, Changwon National University**

Abstract - An LMI-based parameterization of all γ-suboptimal reduced-order unbiased H_∞ filters is provided in terms of a free matrix, using the unbiasedness condition, bounded real lemma and the general solution of the basic LMI. Also, by sequentially solving the generalized eigenvalue minimization and basic LMI problem, the optimal filter coefficient matrix can be obtained with the best achievable performance.

1. 서 론

H_∞ 필터링 문제에 대하여 최근 몇 년 동안 많은 연구가 진행되었다[1-2]. 이는 칼만 필터와는 달리, 외란 입력으로부터 추정오차까지의 전달함수의 H_∞ 놈(norm)을 최소화하는 필터를 구현하는 문제로서 외란 신호의 스펙트랄 속성에 관한 어떠한 가정도 필요로 하지 않으므로, 많은 응용분야에 있어서 H_∞ 필터가 더 적당하다고 말할 수 있다[3]. 기존의 칼만 필터와 H_∞ 필터에 대한 접근은 주로 시스템 차수와 같은 차수를 갖는 필터를 구현하는데 관심을 두어왔으나, 시스템이 많은 자유도(degree of freedom)를 가지고 있는 경우에도 실제로는 적은 수의 상태변수만을 추정하는 것이 일반적이고, 또한 실시간(real-time) 필터링 문제의 경우 기존의 full-order 필터가 갖는 계산상의 부하와 복잡성을 고려하면 저차(reduced-order) 필터 즉, 시스템 차수보다 낮은 차수를 갖는 필터가 더 바람직함을 알 수 있다[4-5]. 무편향(unbiased) H_∞ 필터의 설계 문제는 [1][6]에서 다루었는데 이들은 대수 Riccati 방정식을 통한 해법을 제시하고 있고, 모델 불확실성이 없는 선형시스템에 대한 H_∞ 필터링 문제에 있어서 시간영역과 주파수영역에서의 해법이 [7]에 잘 정리되어 있으며, 아울러 full-order 강인 H_∞ 필터에 대한 LMI 기법이 소개되었다. 본 논문에서는 H_∞ 제어에 적용되었던 LMI 기법[8-11]을 응용하여 모든 γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터들을 매개변수화하고, 또한 일반 고유값(generalized eigenvalue) 최소화 문제의 해를 구함으로써 전달함수의 H_∞ 놈에 대한 최적 상한값 γ_{opt}을 구한 후, 이로부터 구성된 기본(basic) LMI문제[10]의 해를 통해 최적 필터계수 행렬을 결정한다. 본 논문에서는 [6]의 기호(notation)를 사용한다.

2. 저차 무편향 필터링

다음과 같은 n차 선형 시불변 시스템을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad x(0)=0 \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 는 상태변수, $y(t) \in \mathbf{R}^p$ 는 측정값 그리고 $z(t) \in \mathbf{R}^r$ 는 추정하고자 하는 신호로서 상태변수의 선형 결합으로 나타나며, $w(t) \in \mathbf{R}^q$ 는 $L_2[0,\infty)$ 공간에 속하는 외란신호를 나타낸다. 행렬 A, B_1, C_1, C_2 그리고 D_{21} 은 주어진 실수 행렬이다. 필터링 문제는 측정값 y 로부터 신호 z 를 추정하고자 하는 것인데, 본 논문에서는 다음과 같은 형태의 저차 선형 시불변 필터를 고려한다.

$$\dot{\hat{z}}(t) = A_f\,\hat{z}(t) + B_f\,y(t) \tag{2}$$

여기서 $\hat{z}(t) \in \mathbf{R}^r$ 는 $z(t)$ 의 추정값이고, 필터계수 행렬 A_f 와 B_f 는 구해야 할 설계 파라미터들이다. 추정오차를 다음과 같이 정의하면

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t) = C_1 x(t) - \hat{z}(t) \tag{3}$$

필터링 문제의 블록 선도는 그림 1과 같고,

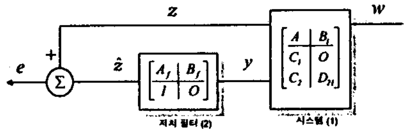


그림 1. 필터링 문제 설정

추정오차의 동특성(dynamics)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = &\ A_f e(t) + (C_1 B_1 - B_f D_{21}) w(t) \\ &+ (C_1 A - A_f C_1 - B_f C_2) x(t) \end{aligned} \tag{4}$$

이 때, 추정오차의 동특성이 상태변수 $x(t)$ 와 무관하다면 필터는 무편향되었다고 말하고[1][6], 이는 다음의 식으로 표현된다.

$$C_1 A - A_f C_1 - B_f C_2 = 0 \tag{5}$$

여기서 미지의 필터계수 행렬들을 다음과 같이 하나의 행렬 변수로 표현하고

$$F = [\,A_f \;\; B_f\,] \in \mathbf{R}^{r \times (r+p)} \tag{6}$$

아래와 같은 확장행렬을 정의한다.

$$C=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix},\quad I_a=\begin{bmatrix}I_{r\times r}\\0_{p\times r}\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0_{r\times q}\\-D_{21}\end{bmatrix} \tag{7}$$

그러면, 저차 무편향 필터의 오차 동특성은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{e}(t)=FI_a e(t)+(C_1B_1+FD_{21})w(t) \tag{8}$$

또한, 무편향 조건 (5)는 아래와 같이 표현된다.

$$FC=C_1A \tag{9}$$

이제 식 (9)를 만족하는 모든 필터의 행렬변수 F들은 임의의 행렬 Q에 대하여 다음의 보조정리 1과 같이 매개변수화 할 수 있다.

§ *보조정리 1*: 시스템 (1)에 대해 저차 무편향 필터 F가 존재하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$C_1A(I-C^+C)=0 \tag{10}$$

만일 위의 조건을 만족한다면, 모든 저차 무편향 필터 F들은

$$F=C_1AC^++Q(I-CC^+) \tag{11}$$

와 같이 매개변수화할 수 있으며 여기서 $Q\in R^{r\times(r+p)}$는 임의의 행렬변수이다. ┘

증명: 식 (11)을 무편향 조건식 (9)에 대입하면

$$C_1AC^+C+Q(I-CC^+)C=C_1A$$

가 되며 Moore-penrose pseudoinverse의 성질에 의해 $CC^+C=C$이므로, 식 (10)이 만족되면 임의의 행렬 Q에 대하여 F는 식 (11)과 같이 매개변수화할 수 있다. ▼

보조정리 1의 식 (11)을 식 (8)에 대입하면, 추정오차의 동특성은 임의의 행렬 Q에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{e}(t)=A_e e(t)+B_e w(t) \tag{12}$$

여기서

$$A_e=A_{e1}+QA_{e2},\quad B_e=B_{e1}+QB_{e2} \tag{13}$$

이고

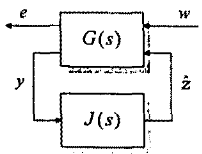
$$A_{e1}=C_1AC^+I_a,\quad A_{e2}=(I-CC^+)I_a \tag{14a}$$

$$B_{e1}=C_1B_1+C_1AC^+D,\ B_{e2}=(I-CC^+)D \tag{14b}$$

이다. 위의 식 (13)과 (14)에서 알 수 있듯이, A_{e1}, A_{e2}, B_{e1} 그리고 B_{e2}는 시스템 (1)의 데이터만을 포함하고 있으며, A_e와 B_e는 임의의 행렬 Q에 affinely dependent하다.

3. γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터링

그림 1의 필터링 문제를 LFT(Linear Fractional Transform)로 구성하면 그림 2와 같이 된다.



$$G(s)=\left[\begin{array}{c|cc}A & B_1 & O\\ \hline C_1 & O & -I\\ C_2 & D_{21} & O\end{array}\right]\qquad J(s)=\left[\begin{array}{c|c}A_f & B_f\\ \hline I & O\end{array}\right]$$

그림 2. 필터링 문제의 LFT 재설정

그림 2로부터 외란 $w(t)$에서 추정오차 $e(t)$까지의 전달함수는 $\mathbf{F}_l(G(s),J(s))$로 표현된다. 그러면 worst case 성능지수는 다음과 같이 정의할 수 있으며

$$\sup_{0\neq w\in L_2}\frac{\|z-\hat{z}\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}},\quad x(0)=0 \tag{15}$$

이는 모든 유한 에너지를 가진 $w(t)$에 대하여 추정오차 에너지의 최고값(peak value), 즉 전달함수 $\mathbf{F}_l(G,J)$의 H_∞ 놈이라 할 수 있다. 이때 *γ-준최적 H_∞ 필터링 문제는 다음의 조건 (16)을 만족하는 필터 F를 설계하는 것*이며

$$\|\mathbf{F}_l(G,J)\|_\infty<\gamma \tag{16}$$

여기서 γ는 주어진 양의 실수이다.

◇*추론(Bounded Real Lemma)*[6]: 주어진 양의 실수 γ와 $\mathbf{F}_l(G,J)$에 대하여 Hamiltonian행렬은 다음과 같이 정의되며,

$$H:=\begin{bmatrix}A_e & \gamma^{-2}B_eB_e^T\\ -I & -A_e^T\end{bmatrix}$$

이때 다음의 조건들은 상등(equivalent)하다.

(i) $\|\mathbf{F}_l(G,J)\|_\infty<\gamma$

(ii) $\exists\ X=X^T>0$ subject to

$$\begin{bmatrix}A_e^TX+XA_e & XB_e & I\\ B_e^TX & -\gamma^{-2}I & 0\\ I & 0 & -I\end{bmatrix}<0 \tag{17}$$

추론에서의 LMI 제한조건 (17)에 식 (13)을 대입하면

$$X_aQE+(X_aQE)^T+\Omega<0 \tag{18}$$

과 같은 기본 LMI 형태가 되며 여기서

$$X_a=\begin{bmatrix}X\\0\end{bmatrix},\quad E=[\,A_{e2}\ \ B_{e2}\,],$$

$$\Omega=\begin{bmatrix}XA_{e1}+A_{e1}^TX+I & XB_{e1}\\ B_{e1}^TX & -\gamma^2I\end{bmatrix} \tag{19}$$

이다. 즉, γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터의 설계문제는 다음의 집합을 구하는 문제로 풀이할 수 있다.

$$\{F\,|\,\exists X>0 \text{ s.t. } X_aQE+(X_aQE)^T+\Omega<0\} \tag{20}$$

부등식 (18)을 만족하는 행렬 Q의 집합은 convex이므로 이는 convex 프로그래밍에 의해 구할 수 있으나, 본 논문에서는 행렬 X_a와 Ω에 미지행렬 X가 포함되어 있으므로, 부등식 (18)에 대한 해석적인(analytic) 해를 구한다. 먼저 LMI (18)을 만족하는 행렬 Q가 존재하기 위한 필요충분조건을 구하고, 해가 존재할 경우, 모든 Q의 집합에 대한 explicit formula를 얻는다.

§ *보조정리 2*[9][11]:

$X_a\in R^{2r\times r}$, $E\in R^{(r+p)\times 2r}$ 그리고 $\Omega=\Omega^T\in R^{2r\times 2r}$가 주어졌을 때, 다음과 같은 집합에 대하여

$$\Theta(X_a,E,\Omega):=\{Q\in R^{r\times(r+p)}\,|\,X_aQE+(X_aQE)^T+\Omega<0\}$$

다음의 조건들은 상등하다.

(i) $\Theta(X_a,E,\Omega)\neq\phi$

(ii) $X_a^{\perp}\Omega X_a^{\perp T}<0$ or $X_aX_a^T>0$ (21a)

$E^{T\perp}\Omega E^{T\perp T}<0$ or $E^TE>0$ (21b)

위의 조건들을 만족할 때, (X_{aL},X_{aR})와 (E_L,E_R)를 X_a와 E의 임의의 full rank 요소 즉, $X_a=X_{aL}X_{aR}$, $E=E_LE_R$라 하면, 다음과 같이 행렬 Q를 임의의 행렬 Z, Δ, R에 의해 매개변수화할 수 있다.

$$\Theta(X_a, E, \Omega) := \{ Q \in \mathbf{R}^{r \times (r+p)} \mid \exists (Z, \Delta, R) \}$$

여기서

$$Q = X_{aR}^{+} K E_L^{+} + Z - X_{aR}^{+} X_{aR} Z E_L E_L^{+}$$

$$K = -R^{-1} X_{aL}^T \Phi E_R^T (E_R \Phi E_R^T)^{-1} + S^{1/2} \Delta (E_R \Phi E_R^T)^{-1/2}$$

$$\Phi := (X_{aL} R^{-1} X_{aL}^T - \Omega)^{-1} > 0, \quad R > 0, \quad \|\Delta\| < 1$$

$$S := R^{-1} - R^{-1} X_{aL}^T [\Phi - \Phi E_R^T (E_R \Phi E_R^T)^{-1} E_R \Phi] X_{aL} R^{-1} \tag{22}$$

이다. ┘

위에서 행렬 $R>0$은 항상 존재하며, 충분히 작은 $\epsilon>0$에 대해 $R=\epsilon I$와 같이 선택할 수 있고, Δ는 놈 제한조건 $\|\Delta\|<1$ 을 만족하는 행렬로서 일반적으로 가장 중요한 비중을 차지한다. 위의 보조정리 1과 2를 이용하면 다음의 정리와 같이 γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터의 설계문제를 풀 수 있다.

●<u>*정리*</u> : 시스템 (1)과 주어진 $\gamma>0$ 에 대하여 γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터 (2)가 존재하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

(i) 무편향조건 (10)이 성립한다.

(ii) 다음의 LMI 제한조건을 만족하는 행렬 $X>0$가 존재한다.

(γ-준최적 H_∞ 필터)

$$\begin{bmatrix} A_{e2}^T \\ B_{e2}^T \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} XA_{e1} + A_{e1}^T X + I & XB_{e1} \\ B_{e1}^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e2}^T \\ B_{e2}^T \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{23}$$

위의 두 조건을 만족할 때, 모든 필터계수 행렬 F들은 식 (22)에 나타난 행렬 Q와 식 (11)에 의해 매개변수화할 수 있다. 또한 H_∞ 제어의 경우와 같이 H_∞ 놈의 최적 상한값 γ_{opt}은, γ-iteration을 하지 않고도 다음과 같은 일반 고유값 (generalized eigenvalue) 최소화 문제의 해를 구함으로써 직접 얻을 수 있다.

$$\text{Minimize } \gamma \text{ over } X>0 \text{ subject to } E^{T\perp} \Omega E^{T\perp T} < 0 \tag{24}$$

이때, 최적행렬 Q_{opt}는 LMI 문제 (24)로부터 얻은 X_{opt}과 γ_{opt}에 대하여 다음의 LMI 문제의 해를 구함으로써 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X_{opt} A_e + A_e^T X_{opt} + I & X_{opt} B_e \\ B_e^T X_{opt} & -\gamma_{opt}^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

<u>*증명*</u> : 보조정리 2의 $\Theta(X_a, E, \Omega)$이 공집합이 아닐 필요충분조건 (ii)에서 부등식 (21a)를 보면 $X_a^{\perp} \Omega X_a^{\perp T} < 0$ 인데, 여기서

$$X_a^{\perp} = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} = [\, 0 \quad I \,]$$

이므로 이는 항상 성립한다. 따라서 부등식 (21b)를 만족하는 $X>0$ 만으로 행렬 Q의 해석적인 해를 구하고, 이를 식 (11)을 대입하여 필터계수 행렬 F들에 대한 매개변수화를 할 수 있다. 또한 [10]에서와 비슷한 논리를 사용하면, 식 (24)와 같은 LMI 문제를 통하여 H_∞ 놈의 최적상한값 γ_{opt}를 구할 수 있음을 쉽게 알 수 있다. ▼

즉, $\gamma \geq \gamma_{opt}$의 성능을 가진 γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터들은 LMI feasibility문제를 통해 매개변수화할 수 있으며, 일반 고유값 최소화 문제 (24)와 기본 LMI 문제 (25)의 해를 순차적으로 구하여 $\| F_l(G, J) \|_\infty < \gamma_{opt}$를 만족하는 F_{opt}를 계산할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 H_∞ 제어 이론에서 많이 사용되었던 LMI 기법을 응용하여 γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터의 설계문제를 다루었다. LMI feasibility문제를 통해 모든 γ-준최적 저차 무편향 H_∞ 필터를 매개변수화할 수 있으며, 일반 고유값 최소화 문제와 기본 LMI문제를 순차적으로 풀어서 최적 상한값 γ_{opt}과 필터계수 행렬 F_{opt}을 구할 수 있음을 보였다.

5. 참 고 문 헌

[1] Krishan M. Nagpal and Pramod P. Khargonekar, "Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting", *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 36, no. 2, pp. 152-166, Feb. 1991.

[2] Michael Green and David J.N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice Hall International Editions, 1995.

[3] Andrey V. Savkin and Ian R. Petersen, "Fixed-Order Robust Filtering for Linear Uncertain Systems", *Proceedings of the 35th CDC*, Kobe, Japan, Dec. 1996.

[4] Dennis S. Bernstein and David C. Hyland, "The optimal Projection Equations for Reduced-Order State Estimation", *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 6, pp. 583-585, June 1985.

[5] James T. Watson, Jr. and Karolos M. Grigoriadis, "Optimal Unbiased Filtering via Linear Matrix Inequalities", *Proceedings of the ACC*, Albuquerque, New Mexico, June 1997.

[6] Kemin Zhou, John C. Doyle and Keith Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

[7] Huaizhong Li and Minyue Fu, "A Linear Matrix Inequality Approach to Robust H_∞ Filtering", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 9, pp. 2338-2350, Sep. 1997.

[8] Pascal Gahinet and Pierre Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control", *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.* vol. 4, pp. 421-448, 1994.

[9] T. Iwasaki and R.E. Skelton, "All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas", *Automatica*, vol. 30, no. 8, pp. 1307-1317, 1994.

[10] Gahinet et al, *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB*, The Mathworks Inc.

[11] Tetsuya Iwasaki, *A Unified Matrix Inequality Approach To Linear Control Design*, Ph.D. Thesis, Purdue University, USA, Dec. 1993.