

# 기하학적 동적 외곽선 모델을 이용한 X-ray 단층촬영영상의 영상추출

장동표, 김선일  
한양대학교 의과대학 계량의학교실

## Segmentation of Computed Tomography using The Geometric Active Contour Model

D. P. Jang, S. I. Kim

Department of Medical Information and Management, College of Medicine, Hanyang University.

### Abstract

This paper presents a modified geometric active contour model for edge detection and segmentation of computed tomography(CT) scan images. The method is based on the level set approach developed by Osher and Sethian and the modeling of propagation fronts with curvature dependent speeds by Malladi. Based on above algorithms, the geometric active contour is obtained through a particular level set of hypersurface flowing along its gradient force and curvature force. This technique retains the attractive feature which is topological and geometric flexibility of the contour in recovering objects with complex shapes and unknown topologies. But there are limitations in this algorithm which are being not able to separate the object with weak difference from neighbor object. So we use speed limitation filter to overcome those problems. We apply a 2D model to various synthetic cases and the three cases of real CT scan images in order to segment objects with complicated shapes and topologies. From the results, the presented model confirms that it attracts very naturally and efficiently to the desired feature of CT scan images.

### 서론

영상추출법(segmentation)이란 의학영상에서 임상적인 의미를 갖는 부분 혹은 보여주고자 하는 부분만을 추출하는 방법을 말한다. 따라서, 정확한 영상추출법은 임상적이 질병을 진단하거나 치료할 때 뿐만 아니라, 원하는 부분의 영상을 가시화하고 그 부분의 구조에 대한 정보를 얻는데 중요한 역할을 한다. 하지만 여러 가지 영상매체(X-ray, CT, MRI 등)에서 만들어진 의학영상들은 매우 다양한 성질과 특징을 갖기 때문에 영상에서 우리가 원하는 부분(ROI; region of interest)만을 추출하기란 쉽지 않다. 최근에 이러한 의학영상의 영상추출을 위해 널리 사용되는 것이 동적외곽선 모델이다. 동적외곽선 모델

은 Kass et al의 스네이크 모델(snake model)에 의해 처음으로 발표된 후, 과거 몇 년동안 다양한 방법으로 발전되고 응용되었다[1,2,3]. 이 방법은 다양한 모양의 물체를 찾아낼 수 있으며, 영상이 초음파영상처럼 시간에 따라 변화할 때는 이 변화에 맞춰 외곽선이 함께 변화함으로써 원하는 부분을 찾아낼 수 있다. 동적외곽선모델은 영상자체로부터 얻을 수 있는 외부힘, 외곽선 곡률 등의 내부힘과 사용자의 제약조건에 의한 에너지들의 합을 최소화하는 방향으로 외곽선이 보정되면서 움직이는 것이다. 하지만, 널리 알려져 있다시피 여러 개의 에너지 최소점이 존재할 때, 나무가지 같은 돌출부분이 있을 때에는 정확한 경계선을 찾지 못한다는 문제점이 있다. 또한 우리가 추출하고자하는 물체의 기하학적인 형태가 변한다면 영상추출을 하기 전에 미리 기하학적인 정보를 알고리즘상에 넣어 주어야 한다는 단점도 있다.

본 논문에서는 X-ray 단층촬영영상의 영상추출에서의 이러한 문제점들을 해결하고, 정확한 영상추출을 위해 기하학적 동적 외곽선 모델을 제시하고자 한다[4,5,6]. 본 모델은 Osher-Sethian과 Malladi의 레벨고정(level set) 알고리즘을 바탕으로 한다. 레벨고정 알고리즘이란 움직이는 외곽선을 그 보다 한 차원 높은 함수(hypersurface)의 특정 레벨로 정하여 한 차원 높은 함수의 움직임에 따라 외곽선도 함께 움직인다는 것을 이용한 것이다[8]. 이 같은 알고리즘은 기존 알고리즘에 비해 상대적으로 조작자에 의한 초기치의 영향을 덜 받는다. 또한 영상추출전의 기하학적인 정보 없이도 자유롭게 외곽선이 합쳐지고 분리됨으로써 다양한 형태의 물체를 추출할 수 있다는 장점이 있다[4].

### 방법

#### 1. 레벨고정 알고리즘

이 장에서는 Osher 와 Sethian이 제안한 레벨고정 알고리즘에 대해 자세히 설명한다. 우선 이 알고리즘에 대해 설명하기 전에, 몇 가지를 본 논문에서 사용되는 용어를 정의한다. 유클리드 평면  $R^2$  상에 초기 외곽선을  $\Gamma(0)$ 로 정의한다. 여기서의 '0'의 뜻은 시간  $t=0$ 를 의미한다. 또한  $\Gamma(t)$ 를  $\Gamma(0)$ 가 F

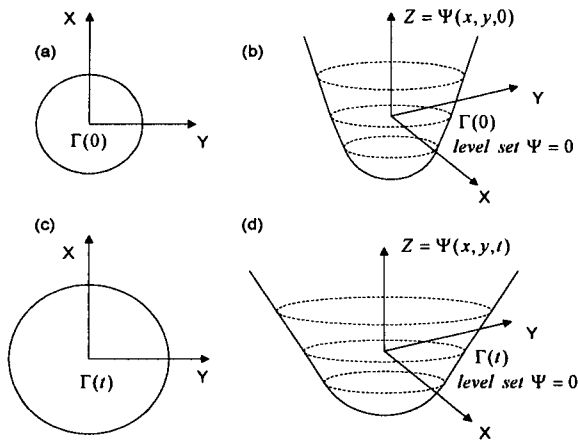


그림 1. 레벨고정 알고리즘

의 속도로 움직이면서 \$t\$시간 후에 생성되는 외곽선으로 정의한다. 그리고 \$\Gamma(t)\$보다 한 차원 높은 함수(hypersurface)를 \$\Psi\$로 정의한다. 또한 그림 1처럼 동적인 외곽선 \$\Gamma(t)\$를 한 차원 높은 함수 \$\Psi\$의 특정한 레벨의 집합인 \$\Psi=0\$과 동일한 것으로 정한다. 따라서 함수 \$\Psi\$가 속도 \$F\$에 의해 움직일 때, 이 함수 \$\Psi\$ 움직임에 대한 방정식을 유도할 수 있다. \$\Psi(t)\$의 변화로부터 \$\Gamma(t)\$를 얻을 수 있는 것이다. 그렇다면, 함수 \$\Psi\$의 움직임을 위한 방정식을 유도해 보자. 기본개념을 바탕으로 식을 전개하면,

$$\Psi(\Gamma(t), t) = 0 \tag{1}$$

이 된다.

\$x(t)\$를 \$\Gamma(t)\$의 모든 점들의 위치벡터로 정의하면, 식(1)은 다음과 같이

$$\Psi(x(t), t) = 0 \tag{2}$$

이 된다. 또한 식(2)를 시간 \$t\$로 미분하여 연쇄법칙(Chain rule)에 의하여 전개시키면,

$$\Psi_t + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \nabla \Psi = 0 \tag{3}$$

가 성립된다. 식(3)에서 \$\Psi\_t\$는 시간 \$t\$에 대한 \$\Psi\$의 시간 변화율, \$\nabla \Psi\$는 위치벡터 \$x\$에 대한 \$\Psi\$의 공간 변화율을 나타낸다. 한편, \$\Gamma(t)\$의 법선 방향으로의 각 위치벡터 \$x\$의 속도 \$\frac{\partial x}{\partial t}\$를 \$F\$로 놓으면,

$$\frac{\partial x}{\partial t} \cdot n = F \tag{4}$$

가 된다. 식(4)를 식(3)에 치환하면, \$\Psi\$의 움직임을 위한 방정식은 다음과 같다.

$$\Psi_t + F |\nabla \Psi| = 0 \tag{5}$$

초기치 \$\Psi(X, t=0)\$, \$X \in R^n\$은 다음과 같이 정의한다.

$$\Psi(X, 0) = \begin{cases} +a \\ -a \end{cases} \tag{6}$$

식(6)에서 \$X\$는 \$\Psi\$위의 모든 점을, \$d\$는 \$\Gamma(t=0)\$로부터 \$X\$까지의 거리를 나타낸다. 또한, \$+\$는 \$X\$가 초기 외곽선의 \$\Gamma(t=0)\$ 바깥쪽에 있을 때, \$-\$는 안쪽에 있을 때를 나타낸다. 식(5)가 핵심수식이지만, 실제적인 의학영상분석에서 영상추출시 다루는 영상데이터는 이산적인 데이터(discrete data)이기 때문에 식(5)의 시간적, 공간적인 변화율에 대한 식을 이산적인 형태의 근사식으로 대체할 필요가 있다. 본 논문에서는 유한차분법(finite difference method)에 의한 근사식 형태로 대체하였다. 시간간격 \$\Delta t\$에 의해 식(5)를 근사하면 다음과 같다.

$$\frac{\Psi_{ij}^{n+1} - \Psi_{ij}^n}{\Delta t} + F(\nabla_{ij} \Psi_{ij}^n) = 0 \tag{7}$$

이 식을 정리하면,

$$\Psi_{ij}^{n+1} = \Psi_{ij}^n - \Delta t F(\nabla_{ij} \Psi_{ij}^n) \tag{8}$$

이 된다. \$\Psi\$를 \$h\$간격의 눈금을 나누었다고 가정할 때, 식(8)에서 \$i, j\$는 \$\Psi\$에 대한 각 눈금을, \$\Psi\_{ij}^n\$는 \$\Psi(ih, jh, n\Delta t)\$의 근사값을 나타낸다. 식(8)에서 보는 바와 같이 모든 점에 대해 \$\Psi\_{ij}^n\$는 속도 \$F\$와 \$\Delta t\$를 이용해 \$\Psi\_{ij}^{n+1}\$로 갱신되는 것이다. 따라서 식(8)은 \$\Psi\$의 움직임을 위한 수식임을 알 수 있다. 식(7)에서의 \$\Psi\$에 대한 시간적 변화율은 전진차분법(forward difference)을 사용하여 표현하였다. \$\nabla\_{ij} \Psi\_{ij}^n\$는 \$\Psi\$의 공간변화율로 본 논문에서는 다음과 같이 유한차분법을 이용하여 수식을 전개하였다.

$$\nabla_{ij} \Psi_{ij}^n = \left\{ \left( \frac{\Psi_{i-1,j}^n - \Psi_{i+1,j}^n}{2h} \right)^2 + \left( \frac{\Psi_{i,j-1}^n - \Psi_{i,j+1}^n}{2h} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

## 2. 기하학적 동적 외곽선 모델

이 장에서는 위 장에서 유도되고 설명된 레벨고정 알고리즘을 가지고, 어떻게 영상추출에 적용하는가에 대해 설명한다. 레벨고정 알고리즘이 영상추출에 적용할 때, \$\Psi\$의 특정레벨인 \$\Gamma(t)\$가 원하는 물체의 경계선에서 멈추게 하기 위해서 멈춤요소를 정의한다. 이러한 멈춤요소는 속도 \$F\$에 곱해져 \$\Psi\$의 움직임을 제어하게 된다. 따라서 멈춤요소를 포함한 속도 \$F\$를 어떻게 구성하는가는 중요한 일이다.

### 2.1. 속도함수 \$F\$의 구성

본 논문에서는 속도함수 \$F\$를 아래의 식처럼 두 개의 요소로 나눈다.

$$F = F_A + F_G \quad (10)$$

식(10)에서 속도함수의 첫 번째 항인  $F_A$ 는 외곽선  $\Gamma(t)$ 가 안으로 수축하느냐 밖으로 확장하느냐를 결정하는 요소이다. 본 논문에서는  $\Gamma(t)$ 가 안으로 수축할 때  $F_A$ 를 -1로 밖으로 팽창할 때는 +1로 정하여 사용하였다. 두 번째 항인  $F_G$ 는 기하학적인 성질에 관계된  $\Gamma(t)$ 의 각 점에서의 곡률이다. Malladi가 제안한 논문에서는 곡률계산을  $\Psi$ 의 변화를 단위벡터의 다이버전스(divergence)에 의해 구했다[4]. 이 곡률계산에서는  $\Psi$ 에 대한 1차 미분, 2차미분에 의해 수식을 전개하고 있어서 계산량이 많은 것이 단점이다. 따라서, 본 논문에서는 S. Lobregt이 제안한 곡률 알고리즘은 택했다[7]. 이 알고리즘은  $\Gamma(t)$ 의 각 점에서의 곡률을 인접한 점들 사이에서 생기는 두 선과의 관계로 정의한다. 그림 2에서 나타낸 것처럼  $\Gamma(t)$  위의 한 점  $V_i$ 로부터 시작되는 라인을 벡터  $D_i$ 로 정의하고 이 벡터  $D_i$ 의 단위 벡터를  $d_i$ 로 정의한다.

곡률 벡터  $c_i$  는

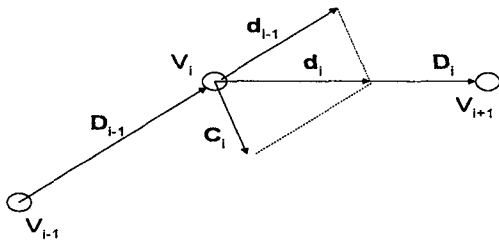


그림 2. 곡률벡터  $c_i$ 에 대한 정의

$$c_i = d_i - d_{i-1} \quad (11)$$

과 같이 정의할 수 있다. 또한, 한 점  $V_i$ 에서의 곡률은 곡률 벡터  $c_i$ 의 크기로 정의된다.

$$C_i = |d_i - d_{i-1}| \quad (12)$$

식(11)에서 정의된 곡률벡터는 두 단위벡터  $d_i$ 와  $d_{i-1}$ 의 사이각으로 정해지므로 한 점  $V_i$ 에서는 단 하나의 곡률을 가지게 된다. 그러나 식(12)에서의 곡률  $C_i$ 에 대한 정의에는 곡률의 크기만 존재할 뿐 방향에 대한 부호는 없다. 따라서 그림 3에 나타낸 것처럼 점  $V_i$ 에서의 접선 단위벡터  $t_i$ 와 반지름 방향 단위벡터  $r_i$ 를 정의함으로써 이 문제를 해결한다.

$t_i$ 에 대한 계산식은,

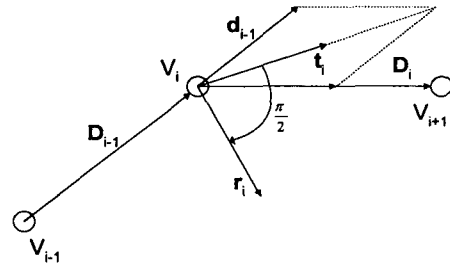


그림 3. 접선 단위벡터  $t_i$ 와 반지름 방향 단위벡터  $r_i$ 의 정의

$$t_i = \frac{d_i + d_{i-1}}{\|d_i + d_{i-1}\|} \quad (13)$$

이 된다. 또한 반지름 방향 단위벡터  $r_i$ 은 수식(13)에서 계산된  $t_i$ 를  $90^\circ$ 만큼 회전함으로써 구해진다.

$$r_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t_i \quad (14)$$

수식(14)에서의 행렬은 시계방향으로  $90^\circ$  회전을 나타낸다. 우리는 수식(14)에 계산된  $r_i$ 를 이용해 곡률 벡터  $c_i$ 와의 내적을 통해 부호가 표시된 곡률을 구할 수 있다.

$$C = c_i \cdot r_i$$

이로서 속도 F에서의  $F_A$ 와  $F_G$ 에 대한 정의와 계산 방법들에 대해 설명하였다. 하지만 수식(10)에서 구성한 속도 F에는  $\Psi$ 를 움직이게 하는 요소만 있을 뿐  $\Gamma(t)$ 가 추출하려는 물체의 경계에서 멈추게 하는 멈춤요소는 들어 있지 않으므로, 속도 F에 멈춤요소를 곱해준다. 본 논문에서 사용한 멈춤요소는 다음과 같다.

$$k_f(x, y) = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma * I(x, y)|} \quad (15)$$

식(15)에서  $|\nabla G_\sigma * I(x, y)|$ 는 영상 변화율의 크기이고,  $G_\sigma * I(x, y)$ 는 특성폭(characteristic width)  $\sigma$ 를 가지는 가우시안 스무싱 필터와 이미지 I의 컨볼루션(convolution)을 말한다.

## 2.2. 속도함수 F의 확장

2.1.장에서 계산된 속도 F의 값은  $\Psi$ 의 특정한 레벨인  $\Gamma(t)$ 에 대해서 계산된 것이다. 그런데  $\Psi$ 를 갱신하기 위한 수식(8)에서의  $\Psi$ 에 대한 움직임 방정식에는 모든 레벨의 점들에서 계산되어지기 때문에 속도 F를 모든 레벨에 걸쳐 확장속도  $F'$ 로 확장할 필요가 있다. 속도 F를 모든 레벨에 걸쳐 확장하는 방법은 그림 4에 나타나 있다.  $\Psi$ 의 임의의 레벨  $\Psi = C$  위의 점  $P(x, y)$ 에 대한 확장속도  $F'$ 를 구한다고

가정할 때, 우선  $\Psi=0$ 의 모든 점들에 대한 속도함수  $F$ 를 구한 후, 임의의 레벨  $\Psi=C$  위의 점  $P(x,y)$ 로부터 가장 가까운  $\Psi=0$  위의 점  $Q(x,y)$ 를 찾는다. 이렇게 찾아진 점  $Q(x,y)$ 의 속도  $F$ 는 점  $P(x,y)$ 의 확장속도값  $F'$ 가 되는 것이다. 따라서, 그림 4의 방식으로 구해진 확장속도  $F'$ 를 가지고  $\Psi$ 에 대한 움직임 방정식을 풀 수 있다.

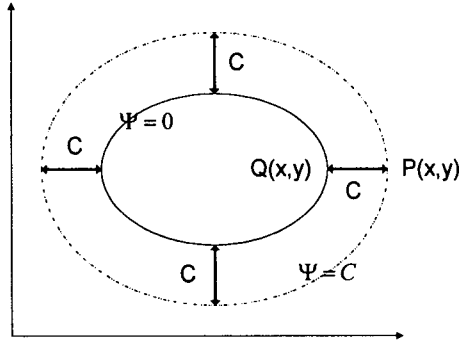


그림 4. 속도확장 알고리즘

2.3. 계산 단축 알고리즘

수식(8)처럼  $\Psi$ 에 대한 움직임을 알기 위해  $\Psi^n$ 의 모든 레벨에 대해  $\Psi^{n+1}$ 을 계산한다. 따라서 계산량이 많다. 하지만 우리가 알고자 하는 것은  $\Psi$ 에 대한 변화가 아니라  $\Psi$ 의 특정 레벨인  $\Psi=0$ 에 대한 변화이기 때문에 모든 계산을 특정 레벨  $\Psi=0$ 의 주변 영역에서만 계산한다면 계산량을 줄일 수 있다. 그림 5에 나타난 것처럼  $\Psi=0$ 를 중심으로 양쪽  $\lambda/2$ 만큼씩의 영역을 지정한다. 그림 5에서의 회색영역은 이처럼 지정된 영역을 나타낸다. 회색영역 즉  $\Psi$ 의 레벨이  $-\lambda/2$ 에서  $\lambda/2$ 인 영역에 제한시켜 확장속도  $F'$  계산뿐만 아니라,  $\Psi$ 의 움직임 방정식에 대한 계산하게 함으로써 계산량을 줄일 수 있다. 앞으로 이 영역을 단축계산영역이라 부르기로 한다.

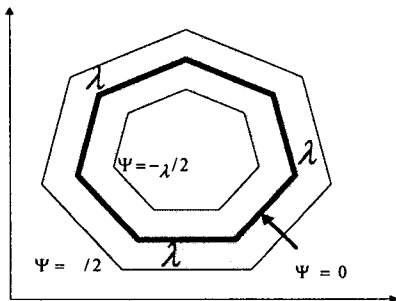


그림 5. 계산 단축 알고리즘

3.4. 속도제한필터의 적용

의학 영상에서 추출하려는 물체의 경계부분이 주위와 뚜렷한 차이가 없는 부분이 있을 수 있다. 이러한 부분은 다른 영역에 비해 동적 외곽선이 천천히 움직이거나 움직이지 말아야 한다. 하지만, Malladi가 제안한 알고리즘에서는  $\Psi=0$ 에 대한 속도  $F$ 로부터  $\Psi$ 의 모든 레벨에 대한 확장속도  $F'$ 를 구한 후, 이  $F'$ 를 모든 레벨에 대해 일률적으로 적용되어 계산되

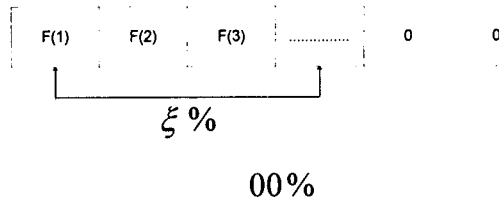


그림 6. 속도제한필터

기 때문에 동적인 외곽선은 애매한 경계부분으로 스며들어 잘못된 결과를 얻을 수 있다[4]. 본 논문에서는 힘에 대한 계산에 그림 6과 같은 속도제한필터를 사용하여 이러한 문제를 해결하였다. 속도제한필터란 계산된  $\Psi=0$ 에 대한 속도  $F$ 중에 속도가 일정 기준치보다 큰 점들만을 확장시키는 것이다. 이 같은 방법을 취하면 영상에서 경계치가 뚜렷하지 않은 부분들의 동적 외곽선은 갱신되지 않으므로서 외곽선이 추출하려는 물체를 지나 스며드는 오류를 방지할 수 있다. 다시 정리하면,  $\Psi=0$ 에 대한 속도  $F$ 를 구한 후, 이 값들을 역순으로 정렬하여 필터 파라메타  $\xi\%$ 에 의해 전체 정렬 개수의  $\xi\%$ 에 해당하는 값을 기준으로 그것보다 작으면 속도를 0으로 대체하는 것이다. 이렇게 하여  $\xi\%$ 에 해당하는 속도에 비해 속도가 느린 점들은 갱신되지 않는다.

실험 및 결과

위에서 기술한 기하학적 동적 외곽선 모델에 대한 성능을 평가해보기 위해 실험은 두가지 형태의 영상 데이터에 대해 수행하였다. 하나는 한양대학병원에서 얻은 X-ray 단층촬영영상이고 또 하나는 혈관영상이다. 이 모든 영상은 ANALYZE™ 프로그램을 이용하여 8bit, 256x256 크기로 만든 후 사용되었다. 모든 시뮬레이션은 Silicon Graphics의 O2 Workstation상에서 IDL(Interactive data language) 언어로 프로그래밍화 하였다. 모든 실험에서 멈춤요소로서

$$k_f(x, y) = \frac{1}{1 + \nabla G_\sigma * I(x, y)}$$

를 사용하였다. 첫 번째 실험은 얇은 가지 모양의 혈관영상(angiogram)에서 혈관만을 추출하는 것이다. 그림 7의 혈관영상은 상당히 얇은 가지로 이루어져 있기 때문에 동적 외곽선이 뚜렷하지 않은 경계부분에서는 셀 수 있다. 따라서 속도제한 파라메터를

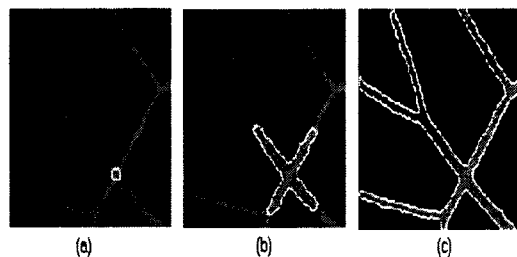


그림 7. 혈관영상에서의 영상추출 - (a) t=0 (b) t=0.52 (c) t=2.23

$\xi=5\%$ ,  $k_{\lambda}(x, y)$ 의 계산에서의 특성폭을  $\sigma=0.7$ ,  $\Delta t=0.0015$  으로 실험을 수행하였다. 따라서 아주 적은 부분만 움직여 나감으로써 시간  $t=2.23$  후에 결과를 얻을 수 있었다. 이 실험에서는 초기외곽선이 밖으로 팽창하는 형태이므로  $F_A$ 를  $-1$ 로 놓았다. 그림7의 (c)에서 보듯이 만족할 만한 결과를 얻을 수 있다. 두 번째 실험은 그림 8의 (a)에서 보듯이 여러 부분에서 경계가 뚜렷하지 않고, 원하는 물체가 인접해 있어 영상추출하기 어려운 X-ray 단층촬영영상에 대해 실행하였다. 하나의 초기 외곽선이 여러 개의 외곽선으로 갈라지면서 원하는 물체의 경계선 근처로 움직임을 그림 8을 통해 알 수 있다. 이때의 파라미터로는  $\sigma=0.8$ ,  $\Delta t=0.001$ ,  $\xi=8\%$ 로 설정하였다. 그림 9는 속도제한 필터의 중요성을 나타낸다. 그림 9의 (a)는  $\xi=8\%$ 일 때의 결과이고, (b)는  $\xi=50\%$ 의 결과이다. 그림 9에서 보듯이 속도제한필터가 없거나,  $\xi$ 이 크면 그림 9의 (b)처럼 잘못된 결과를 초래한다.

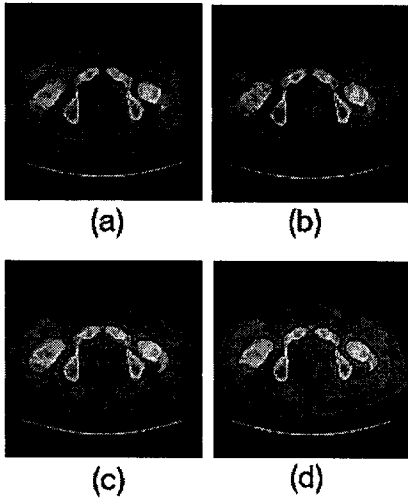


그림 8. X-ray 단층촬영영상(2)에서의 영상추출 - (a)  $t=0$  (b)  $t=0.45$  (c)  $t=1.05$  (d)  $t=1.82$

결론

본 논문에서는 기하학적 동적 외곽선 모델에 대해 설명하고, 설명된 알고리즘을 바탕으로 실험을 수행하였다. 실험 및 결과에서 보듯이 우리가 제시한 알고리즘은 X-ray 단층촬영영상에서의 영상추출에 적합한 알고리즘임을 증명하였다. 또한, 곡률계산에 있어서 인접한 점들에 의한 계산을 함으로써 계산량을 줄였을 뿐 아니라, 속도제한필터를 적용하여 원하는 물체가 추출되기도 전에, 원하는 물체의 경계선이 뚜렷하지 않은 부분으로 동적외곽선이 스며드는 것을 막았다. 앞으로의 연구에서 보완해야 할 점들이 있다면, 첫째 3차원 영역으로 확장해서 한번에 3차원 데이터를 영상추출하고 가시화하는 것이다. 물론 배열, 변화율 등의 구조만 바꾸면 되므로 그리 어려운 일은 아닐 것이다. 둘째는 기존의 스네이크 모델(snake model)에서 사용된 외곽선 전체 점들에 대한 에너지 최소화가 이루어 져야한다. 에너지 최소화란 외곽선

에 대한 에너지를 구함으로써 그 에너지의 최소가 되는 쪽으로 외곽선이 움직이는 것이다. 본 논문의 알고리즘은 국소적인 정보에 의해 속도를 계산하여 외곽선을 움직이기 때문에 전체적인 에너지가 최소인 외곽선을 찾지 못하는 단점이 있다. 이러한 개선점을 통한다면 앞으로 이 알고리즘은 널리 사용될 수 있을 것이라고 본다.

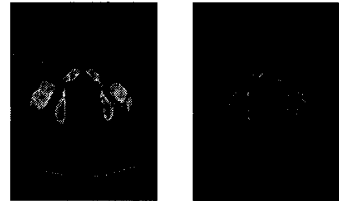


그림 9. 속도제한필터의 사용 - (a)  $\xi=8\%$  (b)  $\xi=50\%$ 를 사용했을 때의 결과

참고문헌

[1] L. D. Cohen, "On active contour models and balloons," CVGIP: Image Understanding, vol. 53, pp. 211-218, 1991.  
 [2] I. Cohen and L. D. Cohen, "Using deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structure," CVGIP: Image Understanding, vol. 56, pp. 242-263, 1992.  
 [3] B. B. Kimia, A. Tannenbaum, and S. W. Zucker, "Shapes, shocks, and deformations-I," Int. J. Comput. Vision, 1995.  
 [4] R. Malladi, J. Sethian, and B. Vemuri, "Shape modeling with front propagation: A level set approach," IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 17, pp. 158-175, 1995.  
 [5] D. Adalsteinsson and J. A. Sethian, "A fast level set method for propagating interfaces," submitted for publication, J. of Computational Physics, 1994.  
 [6] J. A. Sethian, "Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-Jacobi equations and conservations laws," J. of Differential Geometry, vol. 31, pp. 131-161, 1990.  
 [7] Steven Lobregt and Max A. Viergever, "A discrete dynamic contour model," IEEE Trans. on Medical Imaging, vol. 14, no. 1, 1995.  
 [8] J. A. Setian and J. Strain, "Crystal growth and dendritic solidification," J. of Computational Physics, vol. 98, pp. 231-253, 1992.