자오선 길이의 계산에 관한 연구
(A Study on a Computation of the Meridian Length)

박경환[1], 김정희[2], 안기원[3]

Abstract

In geodesy, a calculation of the meridian length is a basic thing. Its principle is very simple, but no exact closed formula exists and its expression has rather long terms. In Korea, the formula has been seemingly adapted from those of Japan which also use the Bessel ellipsoid as a reference. However, a formula from a noticeable reference of Japan is found to have wrong coefficient values. In this study, a formula for the meridian length with correct coefficient values is suggested and the results on different computing bases are also shown. This formula has terms simpler than the one in the Korean Surveying Act (Law) which has the same coefficients in that Japanese reference.

1. 서론

지구타원체 상에서 자오선의 길이를 계산하는 것은 측지학 분야에서는 매우 기초적인 일이다. 자오선 길이의 계산식이 원리는 매우 간단하지만, 그 식을 전개하는 일이 매우 번거로울 뿐만 아니라 시간도 많이 소요된다. 이러한 이유로 이 식을 실제적으로 유도한 경우는 우리 나라에서는 거의 없는 것으로 여겨지고 있다. 현재 우리 나라에서 사용되는 자오선 타원의 식과 계수는 일본 문헌[1),2)]을 그대로 인용하는 경우가 대부분이다. 그 이유는 측지·측량 분야가 일본의 영향을 많이 받았기 때문에 여러 가지 면에서 동일한 조건을 갖고 있기 때문이다.

자오선 길이의 계산에 필요한 적분의 전개식은 수학적인 해를 이용하는 것이므로 어느 나라를 막론하고 동일하다. 그런데 그 전개식을 이용하여 자오선 길이를 계산하기 위해서는 각국에서 정한 준거타원체의 정수를 사용하여야 하므로 그 정수에 따라 다른 값이 구해진다. 전개식에서 구해진 계수 값이 다차항으로 구성되어 계산이 매우 번잡하다. 따라서 이 값을 사용할 때마다 계산하는 것은 매우

---

1) 청오지앤지(주) 대표이사 (서울대학교 공과대학 도시전공 박사과정)

2) 경남대학교 공과대학 토목공학과 전임강사

3) 경상대학교 공과대학 토목공학과 부교수 (경상대학교 생산기술연구소 연구원)

비효율적인 일이므로, 일반적으로 미리 계산하여 그 값을 제시하고 있다.
우리 나라에서는 이러한 지구타원체를 『측량법 제5조』에서 벳셀타원체로 정하고 있으며, 일본에서는 『측량법 제11조』[3]에서 벳셀타원체로 정하고 있어 동일한 값을 사용하고 있다. 일반적으로 지구타원체의 정수는 장반경과 편평률을 기준으로 하며, 이 값으로부터 여러 가지 계산을 하게 된다. 이 과정에서 벳셀값으로 계산된 각종 타원체 정수의 유효숫자 자리가 불분명하여, 문헌들은 물론 전산기(computer)에 따라 다른 값이 되는 문제가 발생한다.
최근에 개인용 전산기(personal computer)의 성능이 우수하고 그 보급 또한 매우 잘되어 있어, 공학 계산은 대부분이 개인용 전산기로 이루어지고 있다고 하여도 과언이 아니다. 초창기에는 개인용 전산기에 중앙처리장치(CPU)와는 별도로 수치연산용 보조처리기(math coprocessor)가 장착되었는데, 현재에는 중앙처리장치에 수치연산용 보조처리기기가 내장되어 있다. 따라서 486급 이상의 전산기를 사용하고 있는 현재의 추세에서 개인용 전산기는 기본적으로 공학 계산에 필요한 충분한 정도의 계산 값을 제공할 수 있다.
측량에서는 물론 측지분야에서 전산기 응용 무른모(software)의 하나인 셈판(spreadsheet)형의 풀그림(program)은 매우 유용한 도구를 넘어서 실무분야에서는 필수적으로 사용되고 있다. 이러한 풀그림 역시 초창기에는 전산기의 성능에 의존하여 계산 값의 유효숫자 처리가 미흡한 편이었으나 현재에는 기능도 매우 다양할 뿐만 아니라 유효숫자 처리도 공학 계산에 충분한 편이다.
이러한 상황을 비추어 볼 때, 보다 정확하고 간편하며 효율적인 계산식의 필요성이 대두되고 있다. 따라서 본고에서는 지구타원체 상의 자오선 길이에 대한 계산식을 검토하므로써, 효율적인 계산식을 제안하고자 하였다.

2. 관련식의 유도

2.1. 자오선 타원의 곡률반경(R_m)

지구타원체의 장반경을 a, 단반경을 b라고 하면, 자오선 타원의 일반식은.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad < 1 >$$

와 같으며, 곡선의 곡률반경을 구하는 식은 일반적으로 다음과 같다.

$$R = \left[1+(\frac{dz}{dx})^2\right]^{3/2} / \frac{d^2z}{dx^2} \qquad < 2 >$$

식 <1>을 미분하여 정리하면,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 z} \qquad \text{< a >}$$

가 된다. 이 식을 다시 미분하고, 식 <1>을 대입하여 정리하면,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 z^3} \qquad \text{< b >}$$

이 된다. 식 <2>에 식 a 와 식 b를 대입하면,

$$R_m = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \qquad \text{< 3 >}$$

이 되며, 이것이 회전타원체에서 자오선의 곡률 반경이다.

2.2. 자오선의 길이(L_m)

지구타원체 상의 한 자오선에 대한 미소거리를 dl 이라고 하면, 이는 반경이 자오선 반경 R_m 인 원호로 간주할 수 있다. 따라서 미소거리의 위도 차를 $d\phi$ 라고 하면,

$$dl = R_m d\varphi \qquad \text{< c >}$$

인 관계식을 얻을 수 있다. 자오선 상의 두 지점의 측지위도를 ϕ_1 과 ϕ_2 라고 하면, 두 지점간의 자오선 길이 L_m 은 다음과 같이 적분하여 구할 수 있다.

$$L_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R_m d\varphi \qquad \text{< d >}$$

여기서 식 <3>으로부터 자오선 타원의 곡률반경 R_m 을 식 d에 대입하면,

$$L_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} d\varphi \qquad \text{< 4 >}$$

와 같이 자오선 길이를 계산하는 일반식이 된다.

2.2.1. 기존 사용 식의 검증

식 <4>는 직접 적분되지 않으므로, 다음과 같은 이항정리를 사용하여 전개시켜야 한다.

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

식 <3>에서 $e^2\sin^2\varphi = t$, $n = -\frac{3}{2}$ 이라고 하면,

$$\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = (1-t)^{-\frac{3}{2}}$$

이 되고, 각 계수는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{n(n-1)}{2!} = (-\frac{1}{2})^2 \frac{3\times5}{2} = \frac{15}{8}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = (-\frac{1}{2})^3 \frac{3\times5\times7}{2\times3} = -\frac{35}{16}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = (-\frac{1}{2})^4 \frac{3\times5\times7\times9}{2\times3\times4} = \frac{315}{128}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = (-\frac{1}{2})^5 \frac{3\times5\times7\times9\times11}{2\times3\times4\times5} = -\frac{693}{256}$$

따라서,

$$(1-t)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}t + \frac{15}{8}t^2 + \frac{35}{16}t^3 + \frac{315}{128}t^4 + \frac{693}{256}t^5 + \cdots \qquad \langle e \rangle$$

와 같이 된다. 따라서 여기서 지수형의 삼각함수는 직접적으로 부정적분을 구할 수 없다. 따라서 삼각함수를 1차식의 형태로 변환시키기 위하여 『삼각함수의 곱셈을 덧셈으로 변환하는 식』을 이용하면,

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi - \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$\sin^8\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi - \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$\sin^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi - \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi - \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

와 같이 전개식을 구할 수 있다[4),5),6)].

<표-1> 기존 식의 항별 계수의 계산 결과 1

항	계수항	상수항	$\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$	$\cos 6\phi$	$\cos 8\phi$	$\cos 10\phi$
e^0	1	1					
e^2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				
e^4	$\frac{15}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^3}$			
e^6	$\frac{35}{2^4}$	$\frac{5}{2^4}$	$-\frac{15}{2^5}$	$\frac{3}{2^4}$	$-\frac{1}{2^5}$		
e^8	$\frac{315}{2^7}$	$\frac{35}{2^7}$	$-\frac{7}{2^4}$	$\frac{7}{2^5}$	$-\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^7}$	
e^{10}	$\frac{693}{2^8}$	$\frac{63}{2^8}$	$-\frac{105}{2^8}$	$\frac{15}{2^6}$	$-\frac{45}{2^9}$	$\frac{5}{2^8}$	$-\frac{1}{2^9}$

위의 sin에 대한 전개식들을 식 e에 대입하여 정리하면 <표 1>과 같은 결과를 얻을 수 있다.

<표 1>의 결과에서 계수항의 값을 각 항에 곱하면 <표 2>와 같다.

<표-2> 기존 식의 항별 계수의 계산 결과 2

항	상수항	$\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$	$\cos 6\phi$	$\cos 8\phi$	$\cos 10\phi$
e^0	1					
e^2	$\frac{3}{2^2}$	$-\frac{3}{2^2}$				
e^4	$\frac{45}{2^6}$	$-\frac{15}{2^4}$	$\frac{15}{2^6}$			
e^6	$\frac{175}{2^8}$	$-\frac{525}{2^9}$	$\frac{105}{2^8}$	$-\frac{35}{2^9}$		
e^8	$\frac{11025}{2^{14}}$	$-\frac{2205}{2^{11}}$	$\frac{2205}{2^{12}}$	$-\frac{315}{2^{11}}$	$\frac{315}{2^{14}}$	
e^{10}	$\frac{43659}{2^{16}}$	$-\frac{72765}{2^{16}}$	$\frac{10395}{2^{14}}$	$-\frac{31185}{2^{17}}$	$\frac{3465}{2^{16}}$	$-\frac{693}{2^{17}}$
계수	A	B	C	D	E	F

<표 2>의 결과를 정리하여 각 계수의 값을 구하면 다음과 같다[7),8),9)].

$$\mathrm{A} = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11\,025}{16\,384}e^8+\frac{43\,659}{65\,536}e^{10}+\cdots$$

$$\mathrm{B} = \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2\,205}{2\,048}e^8+\frac{72\,765}{65\,536}e^{10}+\cdots$$

$$\mathrm{C} = \frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2\,205}{4\,096}e^8+\frac{10\,395}{16\,384}e^{10}+\cdots$$

$$\mathrm{D} = \frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2\,048}e^8+\frac{31\,185}{131\,072}e^{10}+\cdots$$

$$\mathrm{E} = \frac{315}{16\,384}e^8+\frac{3\,465}{65\,536}e^{10}+\cdots$$

$$\mathrm{F} = \frac{693}{131\,072}e^{10}+\cdots$$

여기서 식 e를 다시 정리하면,

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = \mathrm{A} - \mathrm{B}\cos 2\varphi + \mathrm{C}\cos 4\varphi - \mathrm{D}\cos 6\varphi + \mathrm{E}\cos 8\varphi - \mathrm{F}\cos 10\varphi +$$

결과적으로 식 <4>는

$$L_m = a(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}\cos 2\varphi+\mathrm{C}\cos 4\varphi-\mathrm{D}\cos 6\varphi+\mathrm{E}\cos 8\varphi-\mathrm{F}\cos 10\varphi+\cdots)\,d\varphi$$

와 같이 되어, 이를 적분하면

$$L_m = a(1-e^2)\Big\{ \mathrm{A}(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{1}{2}\mathrm{B}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \frac{1}{4}\mathrm{C}(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) - \frac{1}{6}\mathrm{D}(\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1) + \frac{1}{8}\mathrm{E}(\sin 8\varphi_2 - \sin 8\varphi_1) - \frac{1}{10}\mathrm{F}(\sin 10\varphi_2 - \sin 10\varphi_1) + \cdots \Big\}$$

와 같이 기존에 주로 쓰이는 식이 된다.

2.2.2. 제안식의 유도

제안식은 전개식을 1개항을 더 늘려 계산하고자 한다.

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

위와 같은 이항정리의 6차항을 계수를 구하면,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \frac{3\times5\times7\times9\times11\times13}{2\times3\times4\times5\times6} = \frac{3003}{1024}$$

이 된다. $e^2\sin^2\varphi = t$, $n = -\frac{3}{2}$ 이라고 하면,

$$\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = (1-t)^{-\frac{3}{2}}$$

이 되고, 식 <3>은 다음과 같이 된다.

$$(1-t)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}t + \frac{15}{8}t^2 + \frac{35}{16}t^3 + \frac{315}{128}t^4 + \frac{693}{256}t^5 + \frac{3003}{1024}t^6 + \cdots \quad \text{.................f}$$

2.2.2.1. $\sin^{12}\varphi$ 의 전개식의 유도

『삼각함수의 곱셈을 덧셈으로 변환하는 식』을 이용하면

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(3-4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)$$

$$\sin^6\varphi = \frac{1}{32}(10-15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi - \cos 6\varphi)$$

$$\sin^8\varphi = \frac{1}{128}(35-56\cos 2\varphi + 28\cos 4\varphi - 8\cos 6\varphi + \cos 8\varphi)$$

$$\sin^{10}\varphi = \frac{1}{512}(126-210\cos 2\varphi + 120\cos 4\varphi - 45\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi - \cos 10\varphi)$$

와 같이 된다. 여기서 위의 식들을 유도하는 방법으로 $\sin^{12}\varphi$ 을 유도하여 보자.

$$\sin^{12}\varphi = \sin^{10}\varphi \cdot \sin^2\varphi = \sin^{10}\varphi \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

이 식을 전개하여 다시 정리하면,

$$\sin^{12}\varphi = \frac{1}{1024}(126 \ -210\cos 2\varphi + 120\cos 4\varphi - 45\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi - \cos 10\varphi - 126\cos 2\varphi$$
$$+210\cos^2 2\varphi - 120\cos 4\varphi\cos 2\varphi + 45\cos 6\varphi\cos 2\varphi$$
$$-10\cos 8\varphi\cos 2\varphi + \cos 10\varphi\cos 2\varphi)$$

이 된다. 여기서 $\cos A\cos B = \dfrac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{2}$ 이므로,

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \quad\Rightarrow\quad \cos^2 2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi)$$

$$\cos 4\varphi\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + \cos 6\varphi), \quad \cos 6\varphi\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 4\varphi + \cos 8\varphi)$$

$$\cos 8\varphi\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 6\varphi + \cos 10\varphi), \quad \cos 10\varphi\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 8\varphi + \cos 12\varphi)$$

이 된다. 이것을 원식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\sin^{12}\varphi = \frac{1}{2048}(462 - 792\cos 2\varphi + 495\cos 4\varphi - 220\cos 6\varphi + 66\cos 8\varphi - 12\cos 10\varphi + \cos 12\varphi)$$

2.2.2.2. 적분식의 유도

식 f를 이용하여 식 <4>를 다시 쓰면,

$$L_m = a(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(1 + \frac{3}{2}t + \frac{15}{8}t^2 + \frac{35}{16}t^3 + \frac{315}{128}t^4 + \frac{693}{256}t^5 + \frac{3003}{1024}t^6 + \cdots)\,d\varphi$$

와 같이 된다. 각 부분을 부정적분하면,

$$\int 1\,d\varphi = \varphi + C_1$$

$$\frac{3}{2}e^2\int \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{2}e^2\int\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{3}{8}e^2(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_2$$

$$\frac{15}{8}e^4\int \sin^4\varphi\,d\varphi = \frac{15}{8}e^4\int\frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{15}{256}e^4(12\varphi - 8\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) + C_3$$

$$\frac{35}{16}e^6\int \sin^6\varphi\,d\varphi = \frac{35}{16}e^6\int\frac{1}{32}(10 - 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi - \cos 6\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{35}{6144}e^6(120\varphi - 90\sin 2\varphi + 18\sin 4\varphi - 2\sin 6\varphi) + C_4$$

$$\frac{315}{128}e^8\int\sin^8\varphi\,d\varphi = \frac{315}{128}e^8\int\frac{1}{128}(35-56\cos 2\varphi+28\cos 4\varphi-8\cos 6\varphi+\cos 8\varphi)\,d\varphi$$
$$=\frac{105}{131072}e^8(840\varphi-672\sin 2\varphi+168\sin 4\varphi-32\sin 6\varphi+3\sin 8\varphi)+C_5$$

이러한 방식으로 각 항의 계수를 계산하여 정리하면 <표 3>과 같다.

<표-3> 제안식의 항별 계수의 계산 결과 1

항	계수항	상수항	$\sin 2\phi$	$\sin 4\phi$	$\sin 6\phi$	$\sin 8\phi$	$\sin 10\phi$	$\sin 12\phi$
e^0	1	1						
e^2	$\frac{3}{8}$	2	-1					
e^4	$\frac{15}{256}$	12	-8	1				
e^6	$\frac{35}{6144}$	120	-90	18	-2			
e^8	$\frac{105}{131072}$	840	-672	168	-32	3		
e^{10}	$\frac{231}{5242880}$	15120	-12600	3600	-900	150	-12	
e^{12}	$\frac{1001}{83886080}$	55440	-47520	14850	-4400	990	-144	10

<표 3>의 결과에서 계수항의 값을 각 항에 곱하면 <표 4>와 같다. <표 4>의 결과를 정리하여 각 계수의 값을 구하면 다음과 같다[10),11)].

$$A' = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11\,025}{16\,384}e^8+\frac{43\,659}{65\,536}e^{10}+\frac{693\,693}{1\,048\,576}e^{12}+$$

$$B' = \frac{3}{8}e^2+\frac{15}{32}e^4+\frac{525}{1\,024}e^6+\frac{2\,205}{4\,096}e^8+\frac{72\,765}{131\,072}e^{10}+\frac{297\,297}{524\,288}e^{12}+$$

$$C' = \frac{15}{256}e^4+\frac{105}{1\,024}e^6+\frac{2\,205}{16\,384}e^8+\frac{10\,395}{65\,536}e^{10}+\frac{1\,486\,485}{8\,388\,608}e^{12}+$$

$$D' = \frac{35}{3072}e^6+\frac{105}{4\,096}e^8+\frac{10\,395}{262\,144}e^{10}+\frac{55\,055}{1\,048\,576}e^{12}+$$

$$E' = \frac{315}{131\,072}e^8+\frac{3\,465}{524\,288}e^{10}+\frac{99\,099}{8\,388\,608}e^{12}+\cdot$$

$$F' = \frac{693}{1\,310\,720}e^{10}+\frac{9\,009}{5\,242\,880}e^{12}+$$

$$G' = \frac{1\,001}{8\,388\,608}e^{12}+\cdot$$

<표-4> 제안식의 항별 계수의 계산 결과 2

항	상수항	$\sin 2\phi$	$\sin 4\phi$	$\sin 6\phi$	$\sin 8\phi$	$\sin 10\phi$	$\sin 12\phi$
e^0	1						
e^2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$					
e^4	$\frac{45}{64}$	$-\frac{15}{32}$	$\frac{15}{256}$				
e^6	$\frac{175}{256}$	$-\frac{525}{1024}$	$\frac{105}{1024}$	$-\frac{35}{3072}$			
e^8	$\frac{11025}{16384}$	$-\frac{2205}{4096}$	$\frac{2205}{16384}$	$-\frac{105}{4096}$	$\frac{315}{131072}$		
e^{10}	$\frac{43659}{65536}$	$-\frac{72765}{131072}$	$\frac{10395}{65536}$	$-\frac{10395}{262144}$	$\frac{3465}{524288}$	$-\frac{693}{1310720}$	
e^{12}	$\frac{693693}{1048576}$	$-\frac{297297}{524288}$	$\frac{1486485}{8388608}$	$-\frac{55055}{1048576}$	$\frac{99099}{8388608}$	$-\frac{9009}{5242880}$	$\frac{1001}{8388608}$
계수	A′	B′	C′	D′	E′	F′	G′

따라서 각각의 부정적분 결과를 정리하면,

$$
\begin{aligned}
L_m = a(1-e^2)\{ A'(\varphi_2-\varphi_1) &- B'(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + C'(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) \\
&- D'(\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1) + E'(\sin 8\varphi_2 - \sin 8\varphi_1) \\
&- F'(\sin 10\varphi_2 - \sin 10\varphi_1) + G'(\sin 12\varphi_2 - \sin 12\varphi_1) + \cdots\}
\end{aligned}
$$

와 같이 본고에서 제안하는 식을 얻을 수 있다.

3. 벳셀타원체에의 적용

3.1. 벳셀타원체의 정수

우리 나라의 『측량법 제 5조 제1항 제1호』에서 지구의 형상과 크기는 벳셀값에 의하도록 규정하고 있다. 일반적으로 벳셀값에 대한 규정은 지구의 장반경과 편평률을 정하고 있으며, 그 값은 다음과 같다[12].

장반경 : $a = 6,377,397.155\,m$

편평률 : $f = \dfrac{1}{299.152813}$

한편, 좀더 정확한 계산을 위해서 벳셀타원체의 평편률을 $\dfrac{1}{299.1528128}$ 로[13),14)] 사용하기도 하지만, 여기서는 측량법에 의한 값을 사용하기로 한다.

여기서 제1이심율을 e 라고 하면,

$$e^2 = f(2-f) \qquad \langle 5 \rangle$$

$$e = \sqrt{e^2} \qquad \langle 6 \rangle$$

와 같이 편평률로부터 제1이심율을 구할 수 있다.

<표-5> 무른모에 따른 e^2 의 계산 결과

계산에 사용한 무른모	e^2 의 값	비 고
MS 엑셀 7.0	0.667 437 222 734 743 E-02	펜티엄 / 윈도우 95
로터스 1-2-3 5.0a	0.667 437 222 734 743 271 E-02	펜티엄 / 윈도우 3.1
터보베이직	0.667 437 222 734 743 3 E-02	펜티엄 / MS-DOS 6.20
볼랜드 C	0.667 437 222 734 743 301 E-02	486 / MS-DOS 6.20
매트랩 4.0	0.667 437 222 734 743 4 E-02	펜티엄 / 윈도우 95
채용 값	**0.667 437 222 734 743 E-02**	

이 값들에 대한 유효숫자를 판정하기 위해서 여러 가지 전산기의 운영체계, 중앙처리장치 및 무른모에 대하여 식 <5>와 식 <6>을 계산한 결과가 <표 5>와 <표 6>이다.

이 표들을 살펴보면 소수 15자리까지는 전산기 환경과 무관한 값을 갖는 다는 것을 알 수 있다. 이 정도의 유효숫자는 다음에 계산되는 자오선 길이에도 충분한 정도를 갖는다는 밝힐 것이며, 여기서는 다음과 같은 벳셀타원체 정수를 제안하고자 하며 이후에 계산에서는 다음의 값을 사용하기로 한다.

<표-6> 무른모에 따른 e 의 계산 결과

계산에 사용한 무른모	e 의 값	비 고
MS 엑셀 7.0	0.816 968 311 952 638 E-01	펜티엄 / 윈도우 95
로터스 1-2-3 5.0a	0.816 968 311 952 638 265 E-01	펜티엄 / 윈도우 3.1
터보베이직	0.816 968 311 952 638 30 E-01	펜티엄 / MS-DOS 6.20
볼랜드 C	0.816 968 311 952 638 304 0 E-01	486 / MS-DOS 6.20
매트랩 4.0	0.816 968 311 952 638 3 E-01	펜티엄 / 윈도우 95
채용 값	**0.816 968 311 952 638 E-01**	

$$e^2 = 0.667\,437\,222\,734\,743 \text{ E} - 02$$

$$e = 0.816\,968\,311\,952\,638 \text{ E} - 01$$

3.2. 계수값의 계산

위에서 계산된 값으로 기존식의 계수를 계산하면 <표 7>과 같다. 표에서 살펴보면 소수 15자리까지의 정도를 갖으려면 소수 15자리 이상의 값을 갖고 있는

e^{12} 항까지 계산되어야 함을 알 수 있다. 이 값을 제시한 서적 중에 가장 원전이라고 생각되는 『측지학서설』[15]에는 e^{10} 까지를 전개하고 소수 15자리까지 값을 제시하였는 데, 이는 실제의 값과 차이가 있을 뿐만 아니라 유효숫자를 잘 못 표기한 것으로 여겨지고 있다. 이 값으로 계산한 결과가 실제 사용하는 유효숫자에는 큰 영향을 미치지는 않고 있다.

<표-7> 기존식의 항별 계수의 계산 결과

항	A	B	C	D	E	F
e^0	1					
e^2	0.005 005 779 170 511	0.005 005 779 170 511				
e^4	0.000 031 322 281 380	0.000 041 763 041 840	0.000 010 440 760 460			
e^6	0.000 000 203 249 438	0.000 000 304 874 157	0.000 000 121 949 663	0.000 000 020 324 944		
e^8	0.000 000 001 335 366	0.000 000 002 136 586	0.000 000 001 068 293	0.000 000 000 305 227	0.000 000 000 038 153	
e^{10}	0.000 000 000 008 824	0.000 000 000 014 706	0.000 000 000 008 403	0.000 000 000 003 151	0.000 000 000 000 700	0.000 000 000 000 070
e^{12}	0.000 000 000 000 058	0.000 000 000 000 100	0.000 000 000 000 063	0.000 000 000 000 028	0.000 000 000 000 008	0.000 000 000 000 002
계	1.005 037 306 045 577	0.005 047 849 237 900	0.000 010 563 786 882	0.000 000 020 633 349	0.000 000 000 038 862	0.000 000 000 000 072

<표-8> 제안식의 항별 계수의 계산 결과

항	A'	B'	C'	D'	E'	F'
e^0	1					
e^2	0.005 005 779 170 511	0.002 502 889 585 255				
e^4	0.000 031 322 281 380	0.000 020 881 520 920	0.000 002 610 190 115			
e^6	0.000 000 203 249 438	0.000 000 152 437 079	0.000 000 030 487 416	0.000 000 003 387 491		
e^8	0.000 000 001 335 366	0.000 000 001 068 293	0.000 000 000 267 073	0.000 000 000 050 871	0.000 000 000 004 769	
e^{10}	0.000 000 000 008 824	0.000 000 000 007 353	0.000 000 000 002 101	0.000 000 000 000 525	0.000 000 000 000 088	0.000 000 000 000 007
e^{12}	0.000 000 000 000 058	0.000 000 000 000 050	0.000 000 000 000 016	0.000 000 000 000 005	0.000 000 000 000 001	0.000 000 000 000 000
계	1.005 037 306 045 577	0.002 523 924 618 950	0.000 002 640 946 720	0.000 000 003 438 892	0.000 000 000 004 858	0.000 000 000 000 007

<표-9> 적도에서 38 ° 까지의 거리

항	계수값 (10^{-15})	거 리	조정 계수값 (10^{-12})	조정 계수에 의한 거리	조정 계산과의 차
A'	1.005 037 306 045 570	4,222,583.544 990 04 m	1.005 037 306 045	4,222,583.544 987 64 m	0.000 002 39 m
B'	0.002 523 924 618 950	15,513.707 628 68 m	0.002 523 924 619	15,513.707 628 99 m	−0.000 000 31 m
C'	0.000 002 640 946 720	7.854 237 59 m	0.000 002 640 947	7.854 238 43 m	−0.000 000 83 m
D'	0.000 000 003 438 892	−0.016 189 26 m	0.000 000 003 439	−0.016 189 77 m	0.000 000 51 m
E'	0.000 000 000 004 858	−0.000 025 51 m	0.000 000 000 005	−0.000 026 26 m	0.000 000 75 m
F'	0.000 000 000 000 007	0.000 000 02 m	0	0 m	0.000 000 02 m
G'	0	0 m	0	0 m	0 m
계		4,207,077.707 762 69 m		4,207,077.707 760 60 m	0.000 002 09 m

2 μm

<표-10> 자오선의 총길이에 대한 계산 결과

항	계수값(10^{-15})	거 리	조정 계수값(10^{-12})	조정 계수에 의한 거리	조정 계산과의 차
A'	1.005 037 306 045 570	40,003,423.056 689 20 m	1.005 037 306 045	40,003,423.056 666 50 m	0.000 022 69 m
B'	0.002 523 924 618 950	−0.000 005 58 m	0.002 523 924 619	−0.000 005 58 m	0 m
C'	0.000 002 640 946 720	−0.000 000 01 m	0.000 002 640 947	−0.000 000 01 m	0 m
D'	0.000 000 003 438 892	0 m	0.000 000 003 439	0 m	0 m
E'	0.000 000 000 004 858	0 m	0.000 000 000 005	0 m	0 m
F'	0.000 000 000 000 007	0 m	0	0 m	0 m
G'	0	0 m	0	0 m	0 m
계		40,003,423.056 694 70 m		40,003,423.056 672 10 m	0.000 022 69 m

23 μm

이 서적에서 제시한 값이 오류가 있었음에도 불구하고, 이 서적으로부터 이 계수 값들을 그대로 사용한 서적들이 발견되어 초심자에게 정확한 정보를 제공하는데 문제가 있음을 지적하지 않을 수 없다.

<표 8>은 제안식의 계수 값을 정리한 것이며, 이 값은 기존의 계수 값과는 다음과 같은 관계가 있다.

$$A' = A, \quad B' = \frac{1}{2}B, \quad C' = \frac{1}{4}C, \quad D' = \frac{1}{6}D,$$

$$E' = \frac{1}{8}E, \quad F' = \frac{1}{10}F, \quad G' = \frac{1}{12}G$$

3.3. 제안식의 유효숫자

본 연구에서는 제안식의 계수에 대한 유효숫자를 어느 정도를 정하는 것이 바람직한 것인가를 여러 가지 실험해 보았다. 그 중에서 적도에서 우리 나라 좌표계의 원점이 있는 북위 38와의 거리와 지구타원체 전체에 대한 자오선 길이에 대하여 계산하였다. 계산 값이 전산기에 종속되지 않도록 하기 위하여,

$$a(1-e^2) = 6,334,832.032\,55\ m$$

와 같이 소수 5자리까지의 값을 취하여 이 값으로 계산한 자오선의 길이의 결과가 <표 9>와 <표 10>이다. 일반적으로 계수의 값을 15자리 이하의 유효숫자를 제시하고 있다. 이에 대하여 자오선 상의 길이를 계산하는 할 경우에 $0.01\ mm$까지 계산한다고 가정하여도 12자리만으로도 충분하다는 것을 <표 9>와 <표 10>에 잘 나타나 있다.

참고적으로 미소한 길이(1″)에서와 광범위한 길이(360 °)까지의 오차를 비교한 결과가 <표 11> 이다.

<표-11> 위도차에 대한 적도로부터의 거리 계산에 대한 비교

위도차	기존식에 의한 계산	제안식에 의한 계산	차이
360 °	40,003,423.057 800 40 m	40,003,423.057 777 70 m	0.000 022 69 m
90 °	10,000,855.764 450 10 m	10,000,855.764 444 40 m	0.000 005 67 m
38 °	4,207,077.707 762 69 m	4,207,077.707 760 60 m	0.000 002 09 m
10 °	1,105,748.494 581 63 m	1,105,748.494 582 32 m	0.000 000 69 m
1 °	110,563.788 917 29 m	110,563.788 917 40 m	0.000 000 10 m
1 ′	1,842.727 942 67 m	1,842.727 942 67 m	0 m
1 ″	30.712 132 37 m	30.712 132 37 m	0 m

4. 결론

본 연구에서 여러 가지 실험을 종합한 결과를 분석하면 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 10^{-7} 이상의 정확도를 요구하는 경우 벳셀타원체의 자오선 길이에 관한 계산식을 다음과 같이 제안한다.

$$L_m = a(1-e^2)\{ A(\varphi_2-\varphi_1) - B(\sin2\varphi_2 - \sin2\varphi_1) + C(\sin4\varphi_2 - \sin4\varphi_1) - D(\sin6\varphi_2 - \sin6\varphi_1) + E(\sin8\varphi_2 - \sin8\varphi_1) - F(\sin10\varphi_2 - \sin10\varphi_1) + \cdots\}$$

A = 1.005 037 306 045 577

B = 0.002 523 924 618 950

C = 0.000 002 640 946 720

D = 0.000 000 003 438 892

E = 0.000 000 000 004 858

F = 0.000 000 000 000 007

2. 자오선 길이를 간이적으로 계산하거나, 기타 응용을 위해서 정확한 계산할 때에도 전산기의 환경에 종속되지 않으면서 필요한 정도의 유효숫자로 결과를 얻을 수 있는 벳셀타원체 상에서 자오선 길이에 대한 계산식을 다음과 같이 제안한다.

$$L_m = a(1-e^2)\{ A(\varphi_2-\varphi_1) - B(\sin2\varphi_2 - \sin2\varphi_1) + C(\sin4\varphi_2 - \sin4\varphi_1) - D(\sin6\varphi_2 - \sin6\varphi_1) + E(\sin8\varphi_2 - \sin8\varphi_1) + \cdots\}$$

A = 1.005 037 306 046

B = 0.002 523 924 619

C = 0.000 002 640 947

D = 0.000 000 003 439

E = 0.000 000 000 005

- 참고문헌 -

1. 坪川家恒 外, "測地學序說", 山海堂, 1969, pp. 23~24.
2. 일본측량협회, "測量の數學的基礎", 현대측량학 제1권, 1981, pp. 31~32.
3. 일본측량협회, "測量の數學的基礎", 현대측량학 제1권, 1981, p. 25.
4. 坪川家恒 外, "測地學序說", 山海堂, 1969, p. 23.
5. 유복모 , "測量學原論(I)", 박영사, 1995, pp. 134~135.
6. Richard H. Rapp, "GEOMETRIC GEODESY PART I", The Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, 1989, p. 9.
7. 국립지리원, "精密1次基準點測量作業規程(案)", 1988, pp. 42~43.
8. 坪川家恒 外, "測地學序說", 山海堂, 1969, p. 23.
9. Richard H. Rapp, "GEOMETRIC GEODESY PART I", The Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, 1989, p. 37.
10. 국립지리원, "精密1次基準點測量作業規程(案)", 1988, pp. 42~43.
11. Raymond E. Davis et al., "SURVEYING : Theory and Practice", McGraw-Hill, 1981, pp. 573.
12. 국립지리원, "精密1次基準點測量作業規程(案)", 1988, p. 41.
13. 坪川家恒 外, "測地學序說", 山海堂, 1969, p. 17.
14. Ministry of Defence, "Military Engineering: Survey Computations", 1978, p. E-1.
15. 坪川家恒 外, "測地學序說", 山海堂, 1969, pp. 23~24.