일반관리분야(A)-4

linear graph로 표현되는 시스템의 빠른 신뢰도 계정에 관한 연구

이광원* 이용현** 이현규*

호서대학교 안전공학부* 쌍용자동차 산업안전과**

1. 서론

공학적 신뢰도 문제에서 부품의 신뢰도나 가동도가 주어진 후 시스템의 신뢰도 평가를 위한 수치적 계산이 자주 요구된다. 이때 주어진 system은 graph나 fault tree등으로 신뢰도 특성을 표현하게 된다. 보통 network이나 교통망 등은 graph로 표현되며 부품과 graph의 선이 1 : 1로 대응되는 linear graph 이다. 이러한 그래프에 대한 신뢰도를 분석하는 방법 중에 여러 가지가 있으나 본 연구에서는 domination이론을 이용하여 신뢰도를 계산한다.

즉 어떤 graph G의 신뢰도를 얻기 위하여는 graph G의 모든 minimal cutset (m. cutset)들과 이들의 조합으로 구성되는 subgraph들의 domination값을 필요로 한다. 본 연구에서는 첫째로 m. cutset의 산출없이 직접 신뢰도 계산에 필요한 모든 subgraph의 domination 값을 구하는 식을 유도한다. 지금까지는 관찰되어지는 그래프가 cycle을 포함치 않을 경우에만 관찰이 가능하였으며 이는 실용화에 있어서 커다란 제약이었다. 본 논문에서 graph가 cycle을 포함한 경우에 사용될 수 있는 domination식을 유도하고 이를 기초로 하여 빠른 신뢰도 계산을 위한 알고리즘을 제시한다.

2. 이론

2 - 1. 수학적 배경

어떤 graph로 표현되는 시스템에서 i번째 m. cutset에 포함되는 모든 부품들이 고장인 사상을 A_i 라하고, m. cutset들의 수를 p라 하자. 이때 시스템의 고장도 Q(G)를 구하는 방법은 고전적으로 3가지가 있다. 즉 Inclusion - Exclusion 식, Sum of disjoint method, Pivotal - decomposition (factoring)방법이 있으며 이중 Inclusion - Exclusion 식을 적용하여 보면 그래프의 고장도Q(G)는

$$Q(G) = q[\bigcup_{i=1}^{r} A_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} q(A_i) - \sum_{i=1}\sum_{j<i} q[A_iA_j] + \cdots + (-1)^{p-1} q[A_1A_2\cdots A_p] \quad (1)$$

with A_i : i번째 cutset에 포함되는 모든 부품이 고장나는 사건

$q(A_i)$: 사건 A_i가 일어날 확률

로 표현된다. 이 식은 $2^p - 1$개의 항을 포함하게되며, 이때 이들 항중에서 서로 다른 두 항이 같은 사상을 나타내고 부호가 반대라면 서로 소거되어 진다.
식(1)에 나타나는 모든 사상에 해당되는 subgraph들 중 소거되어지는 것과 중복되어지는 것을 정리하면 훨씬 적은 수의 subgraph와 이들이 갖는 상수가 있게된다. 이러한 reduced inclusion - exclusion 식에 존재하는 항들에 대응하는 각각의 subgraph G_k에 대한 이들 상수를 signed domination이라 부르고 $d(G_k, C(G))$로 표시한다(여기서 C(G)는 graph G의 m. cutset family).
어떤 subgraph G_k의 domination 값은 결국 G_k의 홀수 formation의 수에서 G_k의 짝수 formation의 수를 뺀 값이다. 어떤 subgraph G_k의 formation이란 윗식에 나타난 어떠한 $A_i, A_j, \cdot\cdot\cdot, A_k$가 G_k에 포함되는 모든 선집합 E_k를 포함하는 경우이 항을 G_k의 formation이라 한다. 만약 formation이 홀수(짝수)개의 최소 cutset을 갖는다면 홀수(짝수) formation이다.
이 계수의 절대치는 domination이라 하고 $D(G_k, C(G)) = |d(G_k, C(G))|$이다. 이 수는 비방향성 network에서 factoring algorithm의 계산에서 복잡성의 정도를 나타내주기도 한다.
어떤 임의의 subgraph G_k의 domination은 결국 cutset을 중심으로 관찰한 경우 식(1)에서 G_k를 구성하는 항들 중에서 홀수개의 m. cutset으로 구성된 항의 개수(G_k의 홀수 formation갯수)에서 짝수개의 m. cutset으로 구성된 항의 개수(G_k의 짝수 formation갯수)를 빼주면 구할 수 있다.

2 - 2. cycle을 포함치 않는 경우

m. cutset을 사용한 domination 연구[1]에서 C(G)를 기초로한 어떤 그래프 G의 부분그래프 G_a의 domination 결정이 m. path를 사용한 경우처럼 그 부분그래프의 절점수 n과 선수 b로 표현될 수 없는 경우(부분그래프가 bipartite 구조를 갖을 때)가 있음을 밝혔다. 그러나 위 논문에서는 어떤 acyclic-p-graph G를 관찰할 때 다음의 사실을 증명하였다.

- domination이 0이 아닐 수 있는 모든 부분그래프의 수(즉, 식(1)에서 소거되지 않는 항의 수)는 최대 3^n이 되며(n은 내부절점수),

- 이들 부분그래프들은 관찰하는 그래프 G에서 incut(A)와 outcut(B)에 포함되는 선들을 제거함으로써 구해지며(단 A, B는 내부절점의 부분집합이고 서로 공유하는 절점이 없다. 즉, $A \subseteq N$, $B \subseteq \{N-A\}$이며 N은 모든 내부절점의 집합 $(=\{V-s-t\})$을 의미하고 incut(A)는 절점 A에 도착되어 지는 모든 선들의 집합을, outcut(B)는 출발되어지는 모든 선들의 집합을 의미한다.

- acyclic 그래프 G의 고장도는 다음 식으로 표현된다.

$$Q(G) = \sum_{\forall A \in A(G)} Q_A, \ \text{with } Q_A = \frac{q(O_i)}{q(I_i - O_{\{N-A+i\}})} \cdot \left(1 - q(I_i - O_{\{N-A+i\}})\right) \cdot Q_{A-i} \tag{2}$$

$$\text{with} \begin{cases} i: \text{그래프 구조상 절점 집합A 중에서 제일 나중에 오는 절점} \\ Q_\phi = q(O_s) \\ A(G) = \left\{ \begin{array}{c} \forall A \subseteq N, \text{ with } \forall a \in A: I_a \text{는 절점집합}\{A,S\}\text{에서 최소한 하나의 나가는} \\ \text{선들이 존재하여야 한다.} \end{array} \right\} \end{cases}$$

G가 n개의 내부 절점을 포함한다면 식(2)의 계산 시간은 최대 2^n에 비례하게 된다.

2 - 3. cycle을 포함하는 경우

cycle이 포함되어지는 일반적인 그래프인 경우 본 연구에는 다음과 같은 식이 성립하며 이 경우 계산되어져야 될 항의 수는 최대 3^n(n은 내부절점수)임을 증명하였다.

$$Q(G) = \sum_{M \subseteq M(G)} q(C_M) \cdot Q_M, \ \text{with } Q_M = 1 - \sum_{L \subset M} q(C_L - C_M) Q_L \tag{3}$$

또는

$$Q(G) = \sum_{M \subseteq MN(G)} q(O_{S,M} - I_M)Q_{M,} \text{ with } \begin{cases} Q_M = 1 - \sum_{L \subset M} q(O_{S,L} \cap I_{(M-L)})Q_L \\ Q_\phi = 1 \end{cases} \tag{4}$$

여기서 $MN(G) = \{ {}^7M \subseteq N$, 단 M에 속하는 모든 절점들은 절점 S로부터 M에 속하는 절점들을 통하여 도달할 수 있어야 한다.}

[예 1]

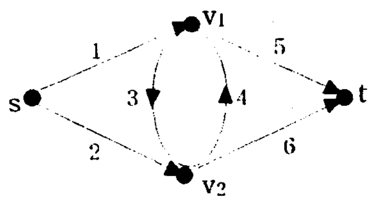


Fig.1 bridge structure

그림과 같은 graph G에서 절점 s에서 t로 연결되지 못할 확률 Q(G)는 다음과 같다. 첫 번째로 MN(G)를 구하면 $MN(G) = \{ \varnothing, \{V_1\}, \{V_2\}, \{V_1, V_2\}\}$가 된다.

i) $M=\varnothing$일 때

$q(C_\phi) = q(O_S) = q(1,2)$, $Q_\phi = 1$

ii) $M=\{V_1\}$일 때

$q(C_1) = q(O_{S,1} - I_1) = q(2,3,5)$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 - \sum_{L \subset \{V_1\}} q(C_L - C_M) \cdot Q_L \\ &= 1 - q(C_\phi - C_1) \cdot Q_\phi \\ &= 1 - q(1,2 - 2,3,5) \cdot 1 \\ &= 1 - q(1) \end{aligned}$$

iii) M={V2}일 때

$$q(C_2) = q(O_{S,2} - I_2) = q(1,4,6)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= 1 - \sum_{L \subset \{V_2\}} q(C_L - C_M) \cdot Q_L \\ &= 1 - q(C_\phi - C_2) \cdot Q_\phi \\ &= 1 - q(1,2 - 1,4,6) \cdot 1 \\ &= 1 - q(2) \end{aligned}$$

iv) M={V1, V2}일 때

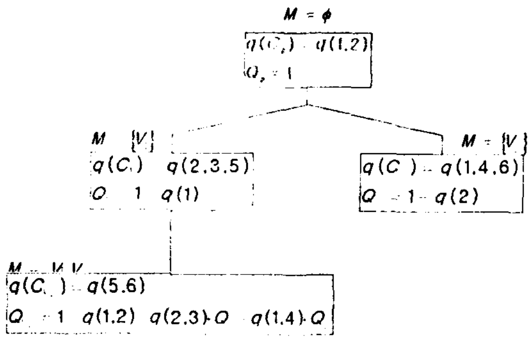
$$q(C_{12}) = q(O_{S,1,2} - I_{1,2}) = q(5,6)$$

$$\begin{aligned} Q_{1,2} &= 1 - \sum_{L \subset \{V_1 V_2\}} q(C_L - C_M) \cdot Q_L \\ &= 1 - \left(q(C_\phi - C_{1,2}) \cdot Q_\phi + q(C_1 - C_{1,2}) \cdot Q_1 + q(C_2 - C_{1,2}) \cdot Q_2\right) \\ &= 1 - q(1,2) - q(2,3)(1-q(1)) - q(1,4)(1-q(2)) \end{aligned}$$

결국

$$\begin{aligned} Q(G) = {} & q(1,2) + q(2,3,5)(1-q(1)) + \\ & q(2,4,6)(1-q(2)) + q(5,6)(1-q(1,2) - q(2,3) \cdot Q_1 - q(1,4)Q_2) \end{aligned}$$

이 된다.



3. 결론

본 연구에서는 network의 빠른 신뢰도 계산을 위해 많은 이론들 가운데 domination이론을 사용하였다. 이 이론은 network의 신뢰도를 계산하는 고전적인 inclusion-exclusion, sum of disjoint, pivotal decomposition의 3가지 방법 중에 inclusion-exclusion식의 변형된 이론이며, '왜 고장인가? 어떻게 고장나는가?'라는 정성적인 면을 관찰할 수 있는 cutset을 중심으로 관찰하였다.

본 연구에서는 system의 신뢰성적 특성을 표현하는 그래프에서 cycle을 포함한 경우 빠르게 신뢰도를 평가할 수 있는 두 식(3)과 (4)를 유도하였으며, 또한, cycle이 포함되지 않는 acyclic graph에서는 식(2)를 사용할 수 있다.

위의 두 가지 식인 cyclic graph에서의 가장 빠른 계산방법과 acyclic graph에서의 가장 빠른 계산방법을 기초로 graph의 빠른 신뢰도 계산 알고리즘을 제시하였다.

앞으로의 연구과제로 여러 개의 terminal을 갖는 system의 신뢰도 계정에 관한 연구와 fault tree와 같은 non-linear graph에서의 빠른 신뢰도 계정에 관한 연구들이 이루어져야 할 것이다.

REFERENCES

[1] 이광원, 이일재, 강신재, Domination 이론에서의 새로운 식과 이의 신뢰성 계산에 대한 적용, 한국 산업 안전 학회지, vol.11, No.1, 1996.

[2] 이광원, Domination 이론을 이용한 acyclic digraph의 빠른 신뢰도 계산을 위한 연구, 한국 산업 안전 학회지, vol.11, No.1, 1996.

[3] Kwang-won Rhie, Zur Domination und Zuverlässigkeit linearer Graphen aufgrund ihrer Minimalschnitte, *Kissertation, Technische Universität in Berlin*, July 1994

[4] A. Satyanarayana, "A unified Formula for Analysis of Some network Reliability Problems," *IEEE Trans. Reliability*, vol R-31, No. 1, April 1982.