

공액근사개념 및 변위장 반복계산에 의한 국부응력장 개선 연구

송기남

한국원자력연구소

대전광역시 유성구 덕진동 150

요 약

변위형 유한요소해에 기초하고 공액근사개념 및 Loubignac의 변위장 개선방법을 국부 영역에 적용하여 국부영역에서의 응력장의 정확도를 향상시킬 수 있는 방법을 제안하였다. 제안된 방법에서 계산된 국부영역의 응력장은 전체영역에 대한 응력장 개선 결과에 근접하며 유한요소 평형방정식을 잘 만족하고 있을 뿐만 아니라 수회 이내의 반복계산내에 수렴하고 있어서 계산시간이 크게 줄어들 수 있어서 국부영역에 대한 상세응력해석에 적절하게 이용될 수 있다.

1. 서 론

변위형 유한요소법은 여러 가지 공학문제에 대한 해를 구하는데 가장 보편적이며 효과적인 도구로 사용되고 있으며 상업용 프로그램에도 널리 이용되고 있는데 단점은 이 방법에서 얻은 일차적인 수치해인 변위장은 유한요소들의 경계에서 연속성(C^0 continuity)이 유지되며 정확도가 비교적 높은 편이나 변위-변형도 및 응력-변형도 구성방정식에서 구한 변위기초응력장은 요소경계면에서 불연속일 뿐만 아니라 정확도가 변위장에 비해 떨어진다는 것이다.¹⁾

이러한 단점을 해소하기 위해 크게 3가지 분야로 연구가 진행되어 왔다. 첫째, 응력의 불연속을 근본적으로 해결하기 위해 변위장이외에 응력과 변형도를 추가적인 독립변수로 취급하는 혼합 유한요소법이 발전되었으나 독립변수가 늘어남에 따라 해를 구하기 위한 수치계산량이 다소 늘어나며²⁾ 상업용 프로그램에의 사용이 일반화되고 있지 않다. 둘째, 변위형 유한요소법에서 얻은 불연속한 변위기초응력장을 기초로 하여 영역내에서 응력의 분포를 재구성하는 방법들이-즉, 개선된 응력장을 불연속한 변위기초응력장과 완전히 별개로 취급하여 최소자승오차법에 바탕을 둔 전체/국부 평탄화법³⁾, 공액근사(conjugate

approximation) 개념을 이용하여 전영역에서 연속인 응력분포를 계산하는 방법⁴⁾ 그리고 정해에 빠르게 수렴하는 절점응력 계산 방법등이⁵⁾ 제시되고 있다. 이들중 국부 평탄화법은 절점에서 응력의 불연속이 존재하지만 대부분의 경우 매우 개선된 절점응력을 구할 수 있으며 계산에 소요되는 계산량이 매우 작기 때문에 여러 상업용 유한요소 프로그램에 후처리과정으로⁶⁾ 널리 사용되고 있는 반면, 전체 평탄화법 및 공액근사법은 추가로 소요되는 계산량이 변위해를 얻는데 필요한 만큼 되어서, 그리고 빠르게 수렴하는 절점응력 방법은 연구단계에 있어서 아직까지는 상업용 프로그램에 널리 사용되고 있지 않다. 셋째, 변위형 유한요소법에서 얻은 연속 응력장은 영역내에서 유한요소 평형방정식을 만족하고 있지 않기 때문에 유한요소 평형방정식을 맞추기 위해 변위장을 반복적으로 개선하는 반복적 알고리즘을 개발하여 변위장을 개선하고 아울러 연속 응력장을 개선하는 것이다.^{7,8)} 그러나 이 방법은 반복적인 알고리즘의 특성상, 추가로 요구되는 계산량이 너무 많다는 단점을 갖고 있다.

본 연구에서는 계산량이 추가로 소요되어서 사용하는데 제한이 있으나 에너지 개념을 도입하여 물리적으로 의미가 있는 공액근사법의 특성과 반복적 알고리즘에 의한 변위장 개선 방법의 장점을 이용하고 이들 방법을 국부영역에 적용할 수 있는 근사방법을 제안함으로써 상세한 응력장 해석이 요구되는 국부영역에서의 응력장의 정확도를 향상시킬 수 있는 방안을 제시하고자 한다.

2. 선형 탄성문제의 변위형 유한요소해석 및 응력평가

선형 탄성문제를 변위형 유한요소법으로 해석하는 경우 유한요소(e)에서 응력벡터 $\{\sigma\}^e$ 와 변형률벡터 $\{\epsilon\}^e$ 그리고 변위벡터 $\{u\}^e$ 는 다음과 같이 표현된다.⁹⁾

$$\{u\}^e \approx [N] \cdot \{\Delta\}^e \quad \text{----- (1)}$$

$$\{\epsilon\}^e = [S] \cdot \{u\}^e \quad \text{----- (2)}$$

$$\{\sigma\}^e = [D] \cdot \{\epsilon\}^e = [D] \cdot [S] \cdot [N] \cdot \{\Delta\}^e \quad \text{----- (3)}$$

여기서 $[S]$, $[D]$, $[N]$ 은 각각 미분행렬, 구성행렬, 형상함수행렬이며 $\{\Delta\}^e$ 는 요소의 절점변위벡터이다.

3. 공액근사법에 의한 응력계산 방법

변위형 유한요소법에서 변위장은 유한차원 공간의 비직교성 기저함수들의 선형조합으로 근사화되며 변위장과 공액관계인 힘(응력)은 변위장을 근사화하는데 사용한 기저함수

들과 직교성을 갖는 새로운 기저함수로 표시되어야 하는 것이 물리적 의미에서 힘과 변위의 내적으로 표현되는 에너지 범함수에 근거한 유한요소법의 취지에 맞는다는 관점에서 공액근사이론이 제안되었다.⁴⁾ 공액근사법에 의한 응력계산 방법을 정리하면 다음과 같다.

1) 유한요소내에서 변위장(u_i)은 절점(Δ)에서의 기저함수($\phi_{\Delta}(x)$)와 절점변위(u_i^{Δ})를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$u_i = u_i^{\Delta} \phi_{\Delta}(x) \quad \text{----- (4)}$$

2) 변위기초응력장(σ^{ij})은 변위-변형률, 변형률-응력 구성식에서 다음과 같이 표현된다. 여기서 E^{ijmn} 은 재료의 탄성모듈 텐서이며 $\phi_{\Delta,n}(x)$ 은 형상함수를 공간좌표(x_n)로 편미분한 것이다.

$$\sigma^{ij} = E^{ijmn} u_m^{\Delta} \phi_{\Delta,n}(x) \quad \text{----- (5)}$$

3) 공액응력($S^{\hat{ij}}$)은 변위기초응력에 근거하여 다음과 같은 방정식에서 계산된다.

$$S_{\Delta}^{\hat{ij}} = \langle \sigma^{ij}, \phi_{\Delta}(x) \rangle = \int_{\Omega} \sigma^{ij} \phi_{\Delta}(x) d\Omega \quad \text{----- (6)}$$

$$C_{\Delta,r} S^{\hat{ij}} = S_{\Delta}^{\hat{ij}} \quad \text{----- (7)}$$

여기서, 기초행렬($C_{\Delta,r}$)은 유한요소 공간에서 변위장을 근사하는 기저함수들의 내적으로 정의된다. 즉,

$$C_{\Delta,r} = \langle \phi_{\Delta}(x), \phi_{\Gamma}(x) \rangle = \int \phi_{\Gamma}(x) \cdot \phi_{\Delta}(x) d\Omega \quad \text{----- (8)}$$

공액근사이론에 입각하여 응력을 나타낼 경우 식 (7)에서 보듯이 유한요소 방정식에 비전되는 방정식을 추가로 풀어야 하는 단점이 있다.

4. 국부영역의 응력장 개선방안

그림 1은 변위형 유한요소 모델에서 국부영역과 외부영역을 나타낸 것으로 전체영역에 대한 유한요소 방정식을 영역별로 구분하여 나타내면 다음과 같이 표현된다. 여기서 하첨자1은 국부영역, 하첨자2는 경계선(영역) 그리고 하첨자3은 외부영역을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \text{----- (9)}$$

식 (9)에서 세 번째 열의 식을 폐기하여 국부영역 및 경계선(영역)에서의 방정식으로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - K_{23} u_3 \end{pmatrix} \quad \text{----- (10)}$$

즉, $[K]_L u_L = f_L$ 로 표현된다. 여기서 하첨자 L 은 국부영역과 경계선(영역)을 지칭한다.

그림 1의 전영역에 대하여 공액근사법을 적용할 경우 식 (7)의 방정식을 영역별로 구분하여 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad \text{----- (11)}$$

여기서 S^i 는 공액응력을 나타내고 S_i 는 식 (6)에서와 같이 변위기초응력과 형상함수의 내적으로 정의되는 응력의 공액성분이다. 식 (11)에서 외부영역의 변위기초응력장에 근거한 절점의 평균응력(σ_3)이 비교적 충분히 정확하여 공액응력(S^3)과 비슷하다고 가정하고 공액 기저함수의 특성을 즉, 공액 기저함수들은 유한요소법의 기저함수들의 선형적인 관계로 나타내지며 아울러 공액 기저함수들은 기저점에서 멀어질수록 그 크기가 현격히 감소하는 감쇄특성이 있음-고려하여 식 (11)의 첫째와 둘째열만을 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - C_{23} \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{----- (12)}$$

윗식에서 얻은 절점(i)의 공액응력(S^i)과 형상함수(N_i^*)로 표시되는 유한요소 응력장(σ^*)을 유한요소 평형방정식에 대입하여 요소의 절점력을 계산하면 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma^* = N_i^* S^i \quad \text{----- (13)}$$

$$f_e = \int_{\Omega_e} [B]^T \sigma^* d\Omega_e = \int_{\Omega_e} [B]^T N_i^* d\Omega_e S^i \quad \text{----- (14)}$$

국부영역 및 경계선(영역)을 포함한 영역에서 절점력은 다음과 같이 표현된다.

$$f^* = \sum_{element} f_e = \sum_{element} \int_{\Omega_e} [B]^T \sigma^* d\Omega_e = \sum_{element} \int_{\Omega_e} [B]^T N_i^* d\Omega_e S^i \quad \text{----- (15)}$$

식 (15)의 절점력은 식 (10)의 유한요소 평형조건에서의 절점력과 일치하지 않으며 이러한 절점력 차이의 크기($\| \Delta f \|$)를 "힘 불균형의 크기"(force imbalance norm)으로 정의하여 국부영역에서 다음과 같은 반복적 알고리즘을 적용한다.

$$i) \Delta u_L^i = K_L^{-1} (f_L - f^*) \quad \text{----- (16)}$$

$$ii) u_L^{i+1} = u_L^i + \Delta u_L^i \quad \text{----- (17)}$$

$$iii) \sigma_L^{i+1} = [D] \cdot [B] u_L^{i+1} \quad \text{----- (18)}$$

iv) 식 (15)를 이용하여 영역에서의 절점력을 계산한다.

v) 식 (18)의 변위기초응력장을 이용하고 식 (12)의 방법으로 공액응력장을 계산한다.

vi) "힘 불균형의 크기"가 미리 정해는 값보다 크면 상기 (i)~(v)의 과정을 반복한다.

5. 수치계산 및 검토

본 연구에서 제안된 방법론을 내압을 받고 있는 두꺼운 실린더 문제에 적용하였다. 그림 2.a)는 실린더 해석 모델의 영역과 경계조건을 나타낸 것이며 그림 2.b)에서 빗금친 영역은 국부영역 모델을 나타낸 것이다. 그림 2.b)의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법(ANSYS code)으로 해석하여 얻은 응력장과 전체영역 모델 및 국부영역 모델에서 변위장을 개선하여 구한 응력장 그리고 엄밀해에서 얻은 응력장을 비교하였다.

그림 3은 전체영역 모델에 대하여 반복적인 변위장 개선 및 공역근사개념을 적용하였을 때에 개선된 연속 응력장에서 "힘 불균형 크기의 비"($\| \Delta f_i \| / \| f_0 \|$)가 반복계산 횟수에 따라 변화하는 모습을 나타낸 것이며 여기서 $\| f_0 \|$ 은 원래의 유한요소 평형방정식에서 "힘 크기"를 나타내며 $\| \Delta f_i \|$ 은 i 번째 반복계산 횟수에서의 개선된 응력장에 근거한 "힘 불균형 크기"를 나타낸다. 그림 3에서 보면 반복계산 횟수가 증가함에 따라 "힘 불균형 크기의 비"가 현격히 감소하고 있는데 이것은 반복계산 횟수가 증가함에 따라 응력장이 원래의 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 개선되고 있음을 보여준다. 그림 4는 그림 3의 빗금친 국부영역 모델에 대하여 반복적인 변위장 개선 및 공역근사개념을 적용하여 얻은 연속 응력장에서의 "힘 불균형 크기의 비"를 나타낸 것으로서 반복계산 횟수가 증가함에 따라 "힘 불균형 크기"가 감소하고 있어서 국부영역 모델에서도 원래의 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 응력장이 개선되고 있음을 보여주고 있다. 또한 그림 3 및 그림 4에서 보면 반복계산 초기에 "힘 불균형 크기의 비"가 급격히 감소하고 이후에는 점차로 감소량이 둔화되는 수렴현상을 보여주고 있어서 수차 이내의 반복계산 횟수에서도 응력장이 현격히 개선될 수 있음을 보여주고 있다.

그림 5는 그림 2.b)의 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대하여 응력장을 개선한 결과 실린더 내면에서 원주방향으로 반경방향응력(σ_r)의 분포를 나타낸 것이다. 그림 5에서 보면 다음의 2가지 사항을 관찰할 수 있다. 첫째, 변위형 유한요소 해석에서 얻은 반경방향응력은 엄밀해보다 21.53% 작으며 그림 2.b)의 모델에 사용된 유한요소보다 요소의 크기를 1/2로 세분화하여도(절점의 수가 99개에서 357로 증가) 변위형 유한요소 해석에서 얻은 반경방향응력은 엄밀해보다도 11.31% 작은 반면 그림 2.b)의 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대하여 본 연구에서 제시한 방법을 적용하여 얻은 응력은 엄밀해에 비하여 최대 3.47%정도밖에 차이가 나지 않아서 응력의 정확도가 크게 향상되었음을 알 수 있다. 둘째, 국부영역 모델에서 얻은 응력분포는 전체영역 모델에서 얻은 결과와 비교할 때 응력의 크기는 비교적 잘 일치하고 있으나 원주방향(θ)으로 응력값이 약간 진동

되는 현상이 발견되었다. 이러한 현상은 공액기저함수의 특성중의 하나로 전체영역 모델에서도 발견되고 있으나 국부영역 모델에서 다소 심화되는 것은 실제로 전체영역 모델에서는 국부영역 모델에 사용된 외부영역의 변위장(u_3) 및 응력장(S^3)이 반복계산시에 변화되고 있으나 본 연구에서의 국부영역 모델에서는 외부영역의 변위장 및 응력장이 고정되어 있다고 가정하여서 기인되는 것으로 추정된다.

한편 본 연구에서 제시한 방법으로 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대한 수치계산 시간을 비교한 결과 $\| \Delta f \|$ 가 $\| \Delta f \|_0$ 의 10% 이하가 될 때까지 소요된 수치계산 시간은 CYBER-960으로 계산할 때 전체영역 모델(절점수 99)에서는 316.052초 그리고 국부영역 모델(절점수 33)에서는 7.076초가 소요되고 있다.

7. 결 론

변위형 유한요소해의 변위장을 기초로 하고 공액근사개념 및 반복적인 변위장 개선 방법을 국부영역 모델에 적용하여 국부영역에서 응력장이 개선될 수 있는 방법을 제안하였다. 내압을 받는 두꺼운 실린더에 적용한 결과 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 응력장이 개선되고 있고 국부영역 모델에 대한 해석 결과가 전체영역 모델의 해석 결과와 비교할 때 응력의 정확도가 비견될 수 있을 정도로 근접하고 있을 뿐만 아니라 수치계산에 소요되는 계산시간이 훨씬 줄어들고 있어서 국부영역의 상세응력 해석에 효과적이고 적절하게 이용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. J. T. Oden and J. N. Reddy, 1983, "Variational Methods in Theoretical Mechanics," 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
2. Richard H. Gallagher, 1975, "Finite Element Analysis *Fundamentals*," Prentice Hall.
3. E. Hinton and J. S. Campbell, 1974, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp.461-480.
4. J. T. Oden, 1972, "Finite Elements of Nonlinear Continua," McGraw-Hill, pp.54-92.
5. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, 1992, "The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 101, pp.207-224.
6. ANSYS User's Manual for Revision 5.0, 1992, Swanson Analysis System, Inc.

7. G. Loubignac, G. Cantin and G. Touzot, 1977, "Continuous Stress Field in Finite Element Analysis," AIAA Journal, Vol. 15, No. 11, Nov., pp.1645-1646.
8. W. C. Hwang and C. T. Sun, 1987, "Iterative Study for Three-Dimensional Finite Element Stress Analysis," AIAA Journal, Vol. 25, No. 12, Dec., pp.1636-1638.
9. K-J. Bathe, 1982, "Finite Element Procedure in Engineering Analysis," Prentice-Hall.

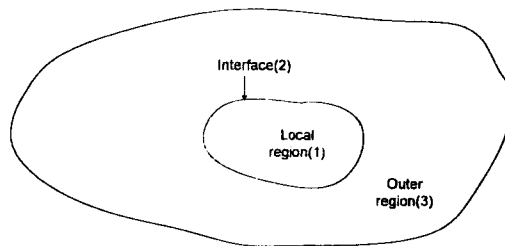


Fig.1 Illustration of the whole domain and the local region

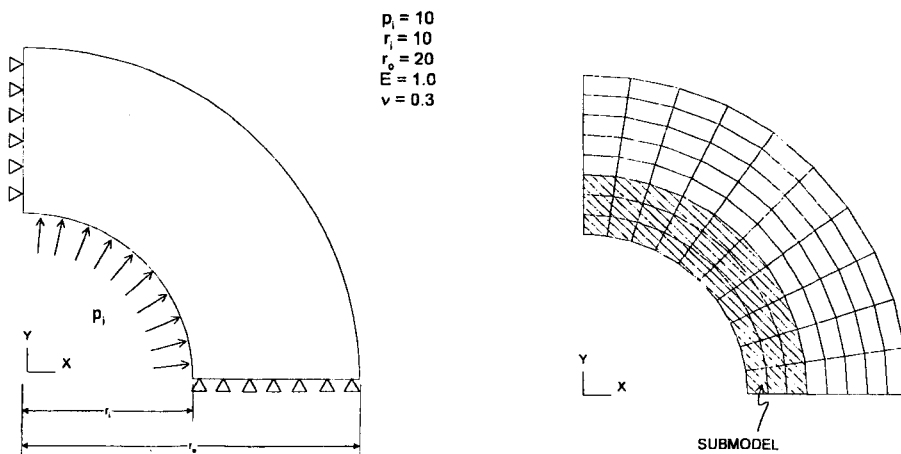


Fig.2.a) Thick Cylinder under Internal Pressure

Fig.2.b) Finite Element Model

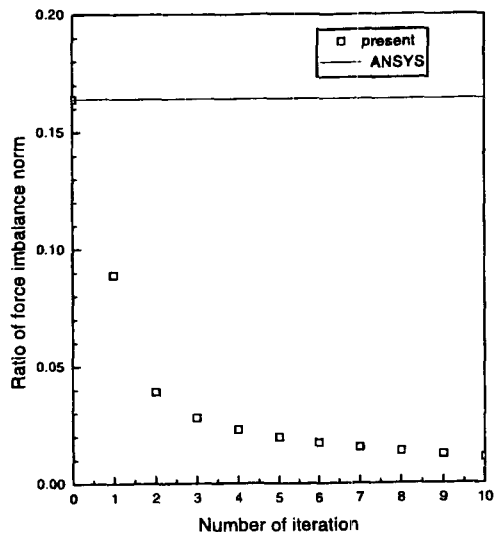


Fig.3) Ratio of Force Imbalance Norm vs. Number of Iteration in the Whole Domain

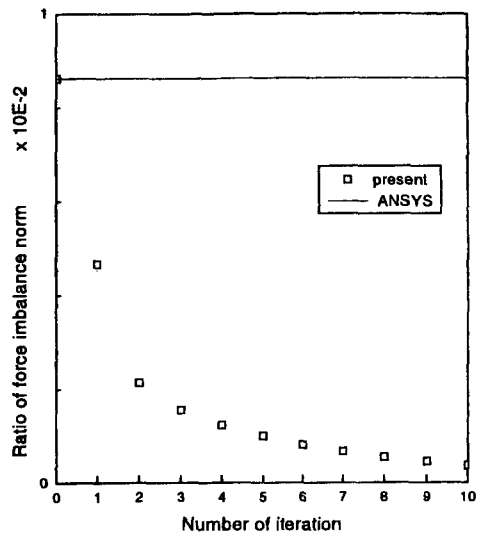


Fig.4) Ratio of Force Imbalance Norm vs. Number of Iteration in the Local Region

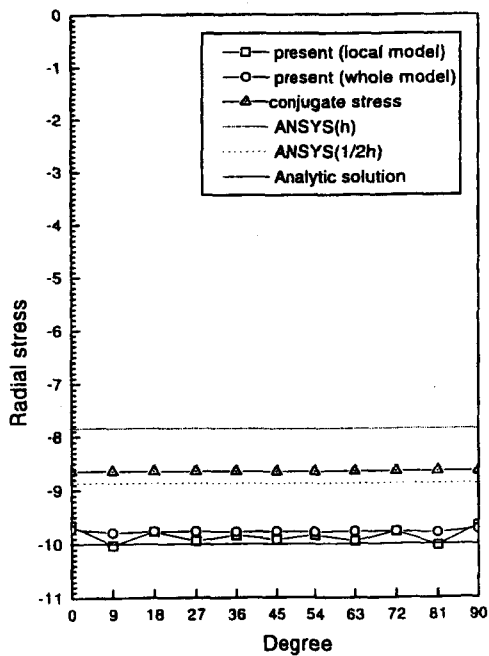


Fig.5 Radial Stress along the Inner Radius