

# 변위제약모드를 갖는 트러스구조물의 형태해석에 관한 연구

## A Study on the Shape Analysis of the Truss Structures under the Prescribed Displacement Mode

문 창 훈\*      김 진 기\*      최 옥 훈\*\*      한 상 을\*\*\*  
Moon, Chang-Hoon    Kim, Jin-Kee    Choi, Ok-Hun    Han, Sang-Eul

### ABSTRACT

The purpose of this study is to survey the shape finding of the plane truss structures under the prescribed displacement mode by the shape analysis. The shape analysis is performed by the existence condition of a solution and Moore-Penrose generalized inverse matrix, and the prescribed displacement mode is the homologous deformation of structures. The shape analysis of structures is a kind of inverse problem and become the problem of a nonlinear equation. Newton-Raphson method is used to improve the accuracy of approximated solution. To prove the accuracy and the effectiveness of this method, four different shape examples are analyzed.

### 제 1 장 서 론

구조해석이란 구조물의 형태조건에 따른 절점의 좌표와 구조물이 받는 외력 및 경계조건을 고려하여 평형방정식에 따른 연립방정식의 해를 구하는 것을 의미한다. 하지만 역으로 부재나 절점의 응력이나 변위를 준 후 그 제약조건으로 해석을 하여 구조물의 형태를 구한 다음에 구하여진 형태에 대해서 구조해석을 하게 되면, 시행착오를 통해 구조물을 설계하는 것보다 시간과 노력을 줄여서 구조물을 설계할 수 있다.

대공간구조물과 같이 큰 스패의 지붕이 자중에 의해 변형이 발생하였을 때 구조물의 형태를 유지하기 위해서는 절점에서 변형정도가 일치하여야 하며, 이러한 변형을 호모로지변형(homologous deformation)이라고 한다. 이에 본 연구에서는 대공간구조물의 최적설계를 하기 위한 준비단계로서 변위제약모드를 갖는 평면트러스 구조물의 형태를 해석하여 주어진 조건을 만족하는 구조물의 형태를 찾는 수치해석기법 및 프로그램개발을 목적으로 연구를 수행하였다.

\* 인하대학교 건축공학과 석사과정

\*\* 안동공전 건축과 교수

\*\*\* 인하대학교 건축공학과 교수

## 제 2 장 형태해석의 개념

### 2.1 형태해석과 구조해석

형태는 형(형상)+태(시스템)로 구성된다. 여기에서 형(形)은 기하학적인 의미로의 형상을 표시하고, 태(態)는 내부에 있는 시스템적인 구조를 표시한다. 형태=형상+구조를 의미하는 경우, 형태해석=형상해석+구조해석이 된다. 형태해석에서는 구조물의 형태를 설계하는 과정(형태설계과정)과 설계한 형태가 외부환경에 의해 변화하고 있는 과정(형태변화과정)을 고려한다.

시스템의 변형은 외부환경 등, 구조물에 영향을 주는 환경조건의 변화에 의하여 발생한다. 이러한 의미에는 종래의 구조해석은 형의 변화와 태의 변화에 대한 해석을 목표로 한다. 앞에서 설명한 것처럼 형태해석은 형상해석과 구조해석을 합한 것이나, 본 논문에서의 협의의 형태해석은 형태설계과정에 있어서의 수치해석법을 가리킨다.

### 2.2 역문제

입력되는 원인에 따라 그에 대한 결과를 구하는 문제를 순문제라 하며, 반대로 역문제란 어떤 결과가 있을 때, 이러한 결과가 나오게 되는 원인을 추정하는 것을 말한다. 즉, 역문제는 어떤 것을 결정해야 할 필요가 있는데 직접법에 의해서 해결되지 않을 때 발생하게 된다.

구조계산을 할 경우, 부재의 크기, 절점의 위치 그리고 하중의 작용점과 크기가 주어졌을 때 이에 의하여 부재의 응력과 절점의 변위를 구할 수 있으므로 이 경우는 순문제가 된다. 본 연구에서는 구조물의 절점변위가 주어진 상태에서 변위제약모드를 갖는 구조물의 나머지 절점의 위치를 구하는 문제이므로 이 경우는 역문제가 된다.

응력해석에서는 해의 존재조건과 유일성을 전제조건으로 하는 선형의 기초방정식해를 구하는 문제이지만, 형태해석에서는 특별한 경우를 제외하고는 기초방정식이 비선형방정식이 되므로 해의 존재성과 유일성을 보장할 수 없으며, 비선형문제가 된다. 이것을 해결하기 위해서는 비선형해석기법의 도입이 필연적이며, 본 연구에서는 뉴턴랩슨법을 사용하였다. 또한 역문제는 순문제와는 달리 다른 문제들이 같은 해답을 가질 수 있으므로 역문제해결을 통하여 구해진 근사해가 여러개 될 수 있으며, 해석결과 여러 개의 근사해를 가짐을 알 수 있었다.

### 2.3 형태해석의 분류

기초방정식에 의하여 분류하면, 구조물은 힘, 구조물의 형태, 재료에 관한 3개의 기본방정식으로 표현할 수 있고, 이 기본방정식들로부터 아래와 같이 6개의 형태해석으로 분류된다.

#### 1) 적합방정식 ( $\epsilon = A(x)d$ )

- (1) 불안정구조의 형태해석
- (2) 변형도를 지정한 형태해석

#### 2) 하중-응력관계식 ( $f = B(x)\sigma$ )

- (1) 자기응력을 만족하는 형태해석
- (2) 응력을 지정한 형태해석

#### 3) 평형방정식 ( $f = K(x)d$ )

- (1) 불안정상태의 형태해석
- (2) 변위를 지정한 형태해석

위와 같이 분류할 수 있으며, 본 연구에서는 3항의 두 번째에 해당하는 지정된 변위모드를

만족하는 형태해석을 수행하였다.

### 제 3 장 기초방정식의 유도

#### 3.1 평형방정식

구조형태를 표시하는 좌표매개변수를  $x$ 로 하고, 3개의 그룹으로 분리한다.

$x_h$  : 변위모드가 지정된 좌표매개변수

$x_f$  : 형태변화가 독립된 좌표매개변수

$x_c$  : 형태가 변화하지 않는 고정된 좌표매개변수

평형방정식은 다음식으로 한다.

$$f = K(x_f)d \quad (3.1)$$

여기서,  $f$ :  $n$ 차 하중벡터

$K(x_f)$ : 미지량  $x_f$ 를 포함한  $(n, n)$ 형 강성행렬

$d$ :  $n$ 차 변위벡터

$n$ : 전체자유도수( $h + f$ )이다.

변위모드지정을 받는 좌표매개변수  $x_h$ 와 형태변화를 받는 좌표매개변수  $x_f$ 에 대응하여 변위벡터  $d$ 를  $d_h$ 와  $d_f$ 로 분할한다.  $d_h$ 와  $d_f$ 에 대응하여 강성행렬과 하중벡터를 다음과 같이 분할한다.

$$\begin{bmatrix} K_{hh} & \vdots & K_{hf} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{fh} & \vdots & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_h \\ \dots \\ d_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_h \\ \dots \\ f_f \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

변위모드를  $d_0$ 로 가정할 경우,  $a$ 를 미지의 매개변수로 하면,  $d_h$ 는 다음식으로 주어질 수 있다.

$$d_h = a d_0 \quad (3.3)$$

식(3.3)을 이용하면, 식(3.2)는 다음식이 된다.

$$\begin{bmatrix} h_h & \vdots & K_{hf} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_f & \vdots & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \dots \\ d_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_h \\ \dots \\ f_f \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

변위모드를  $d_0$ 로 지정함으로써, 변위의 미지량  $h$ 는 1개로 감소하고, 전체미지량은  $m = 1 + f$ 가 된다. 이 때문에 식(3.4)의 계수행렬은  $(n, m)$ 형 장방행렬이 되며, 이 계수 행렬은  $x_f$ 의 함수가 된다. 식(3.4)를 정리하면 다음식과 같다.

$$\bar{K}(x_f)\bar{d} = \bar{f} \quad (3.5)$$

#### 3.2 무어-펜로즈(Moore-Penrose) 일반역행렬과 해의 존재조건

무어-펜로즈 일반역행렬이란 무어(Moore,1935)와 펜로즈(Penrose,1955)가 제안한 역행렬로서, 장방형행렬의 역행렬을 구하는 식이다.  $K$ 가  $(m, n)$ 형장방행렬( $m < n$ )일 경우에 다음의 4개의 조건을 전부 만족하는 행렬  $K^+$ 를  $K$ 의 무어-펜로즈 일반역행렬이라고 정의한다.

$$(KK^+)^T = KK^+, \quad (K^+K)^T = K^+K \quad (3.6)$$

$$KK^+K = K, \quad K^+KK^+ = K^+$$

무어-펜로즈 일반역행렬  $K^+$ 는  $K$ 의  $rank$ 가  $m$ 일 경우에는  $K^+ = K^T(KK^T)^{-1}$ ,  $KK^+ = I_m$ 이고,  $n$ 일 경우에는  $K^+ = (K^TK)^{-1}K^T$ ,  $K^+K = I_n$ 이다.  $x_f$ 를 변화시킬 때, 식(3.5)가 해를 가질 필요충분조건은  $K(x_f)$ 의 무어-펜로즈 일반역행렬  $K^+(x_f)$ 를 이용하면 다음식으로 주어진다.

$$[\overline{K}(x_f)\overline{K}^+(x_f) - I_n]f = 0 \quad (3.7)$$

여기서,  $I_n$ 은  $(n, n)$ 형 단위행렬이다. 위식의 좌변을  $g(x_f)$ 로 치환한다.

$$g(x_f) = [\overline{K}(x_f)\overline{K}^+(x_f) - I_n]f = 0 \quad (3.8)$$

변위모드지정의 형태해석은 식(3.8)을 만족하는 좌표매개변수  $\overline{x}_f$ 를 구하는 문제이고 식(3.8)의 함수  $g(x_f)$ 는 (이하,  $x_f$ 를  $x$ 로 표기한다.)  $x$ 에 관한 비선형방정식이 되므로 뉴턴랩슨법에 의해 근사해를 구할 수 있다.

### 3.3 뉴턴랩슨법

$x^{(n)}$ 을 근사해라 하고  $x^{(n)}$ 로 부터 미소거리  $\Delta x^{(n)}$ 만큼 떨어진 변한 값을  $x^{(r+1)}$ 로 한다.

$$x^{(r+1)} = x^{(n)} + \Delta x^{(n)} \quad (3.9)$$

따라서,  $x^{(r+1)}$ 의 좌표매개변수가 식(3.8)을 만족하는 것으로 가정하면, 다음식과 같다.

$$g(x^{(r+1)}) = 0 \quad (3.10)$$

위식에 식(3.9)를 대입한 후, 테일러전개하여 고차항을 생략하고 우변을 0벡터로 놓는다.

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right] \Delta x^{(n)} = -g(x^{(n)}) \quad (3.11)$$

불평형력  $g$ 가  $1 \times 10^{-6}$  kg 이하로 수렴할 때까지 반복하여 해  $\overline{x}_f$ 를 구하며, 식(3.11)의 계수행렬은 일반적인 계수행렬과는 달리 장방행렬이므로 무어-펜로즈 일반역행렬을 이용한다.

$$\Delta x^{(n)} = -\left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right]^+ g(x^{(n)}) \quad (3.12)$$

식(3.8)을 미분하면 다음식으로 된다.

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_i} \overline{K}^+ + \overline{K} \frac{\partial \overline{K}^+}{\partial x_i} \right] f \quad (3.13)$$

$rank(\overline{K}) = m$ 인 경우의 무어-펜로즈 일반역행렬을  $x_i$ 로 미분하면 다음과 같고, 식(3.14)를 식(3.13)에 대입하면 식(3.15)이 된다.

$$\frac{\partial \overline{K}^+}{\partial x_i} = \frac{\partial [\overline{K}^T \overline{K}]^{-1}}{\partial x_i} \overline{K}^T + [\overline{K}^T \overline{K}]^{-1} \frac{\partial \overline{K}^T}{\partial x_i} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \left[ (I_n - \overline{K} \overline{K}^+) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_i} \overline{K}^+ + \left[ \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_i} \overline{K}^+ \right]^T (I_n - \overline{K} \overline{K}^+) \right] f \quad (3.15)$$

## 제 4 장 해석모델 및 결과분석

### 4.1 해석모델

본 연구에서는 해석모델로서 2개의 지점과 4개의 절점간의 다양한 부재연결에 의하여 아래와 같이 4가지 모델을 설정하였다. 절점 1, 2, 3에는 수직방향으로 같은 크기의 하중이 작용하고 각 절점들은 완전한 핀이며, 각 부재들의 단면적과 재질은 동일하다고 가정하였다. 좌표축과 부재의 길이는 그림 1과 같다(이하에서 절점 1의 Y축좌표값은 Y(1)로 표시한다).

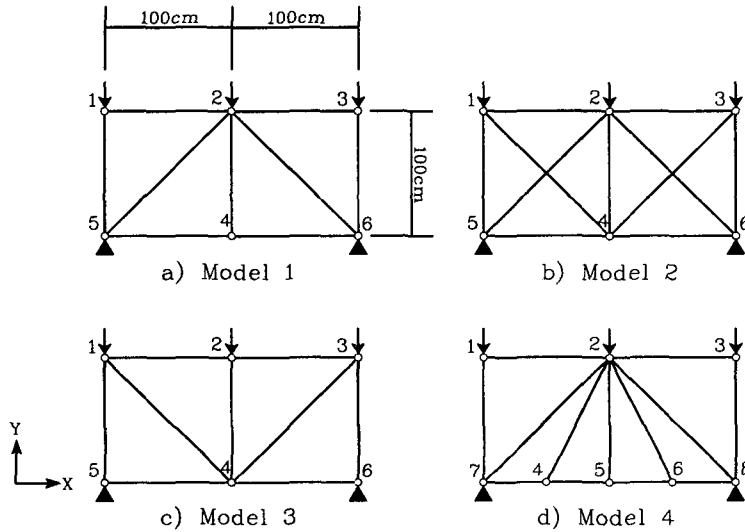


그림 1. 해석모델의 종류

### 4.2 해석결과

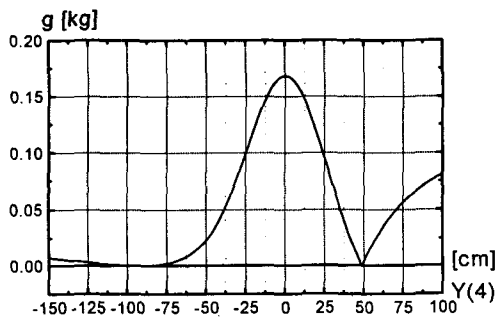


그림 2. 모델 1에서 Y(4)와 불평형력의 관계

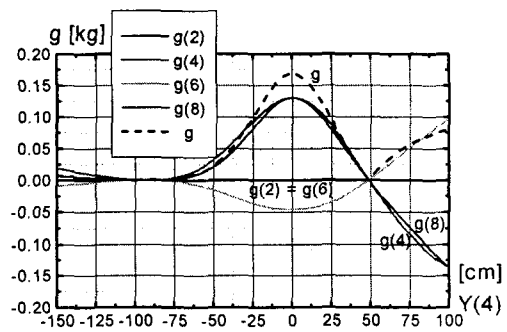


그림 3. 모델 1에서 g(2)~g(8)과 불평형력의 관계

본 해석법에서 구하고자 하는 해는 불평형력  $g$ 가 0이 되는 절점 4의 Y축의 좌표값이다. 모델 1의 경우, 48.7, -85.0, -100.0에서 3개의 근사해를 구할 수 있고, 구하여진 절점의 위치에 의하여 구조물이 호모로지변형을 만족하는 구조물의 형상이 된다. 그림 3은 각 절점에서 불평형력  $g(2)$ ,  $g(4)$ ,  $g(6)$ ,  $g(8)$ 과  $g(1) \sim g(8)$ 의 불평형력의 합  $g$ 의 크기변화를 나타낸 그래프이다. 불평형력들 사이의 크기증감형상이 전체적으로 일치함을 알 수 있다.

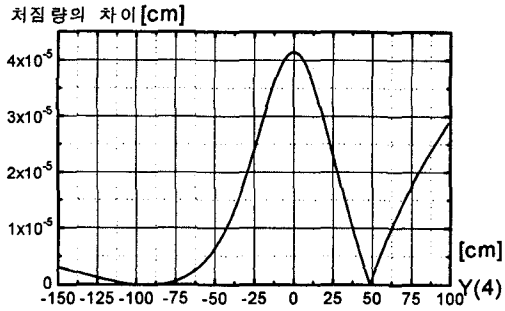
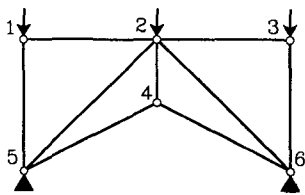
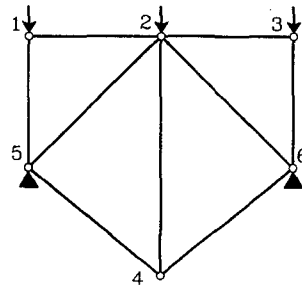


그림 4. 모델 1에서 Y(4)와 처짐량차이의 관계

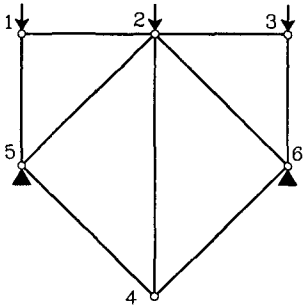
그림 4는 절점 1과 절점 2의 Y축으로 처짐량의 차이를 나타낸 그래프이다. 즉, 처짐량의 차이가 0인 Y(4)가 호모로지변형을 만족하는 절점위치이다. 그림 4도 그림 2와 3과 마찬가지로 Y(4)가 48.7, -85.0, -100.0이 됨을 알 수 있다. 결국, Y(4)가 근사해 48.7, -85.0, -100.0에서 모델 1이 호모로지변형함을 알 수 있다.



a) Y(4) = 48.7cm



b) Y(4) = -85.0cm



c) Y(4) = -100.0cm

그림 5. 모델 1에서 해석결과 얻어진 구조물의 형상들

그림 5는 해석결과 구하여진 호모로지변형을 만족하는 모델 1의 형상을 표시하고 있다. 절점 4의 Y축좌표는 구조물의 사용성을 고려하여 본래의 절점좌표위치로부터 -150cm ~ 100cm 범위에서 변형하는 근사해들을 구하였다.

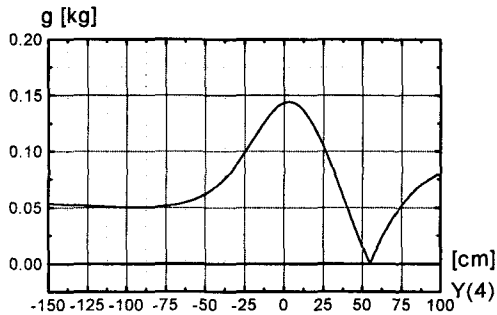


그림 6. 모델 2에서 Y(4)와 불평형력의 관계

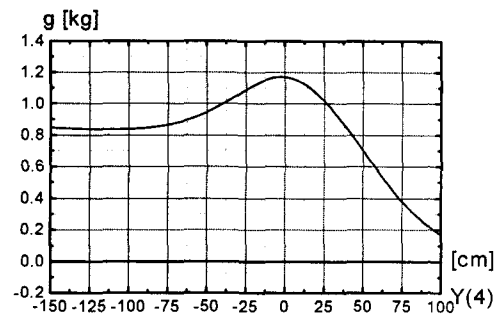


그림 7. 모델 3에서 Y(4)와 불평형력의 관계

모델 2와 3에서 해석을 통하여 구하여진 불평형력  $g$ 와  $Y(4)$ 의 관계는 각각 그림 6과 7로 나타내었다. 모델 2의 경우, 근사해는 53.3인 반면, 모델 3에서는 근사해를 구할 수 없었다.

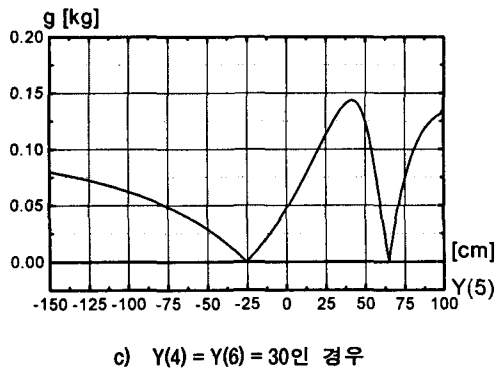
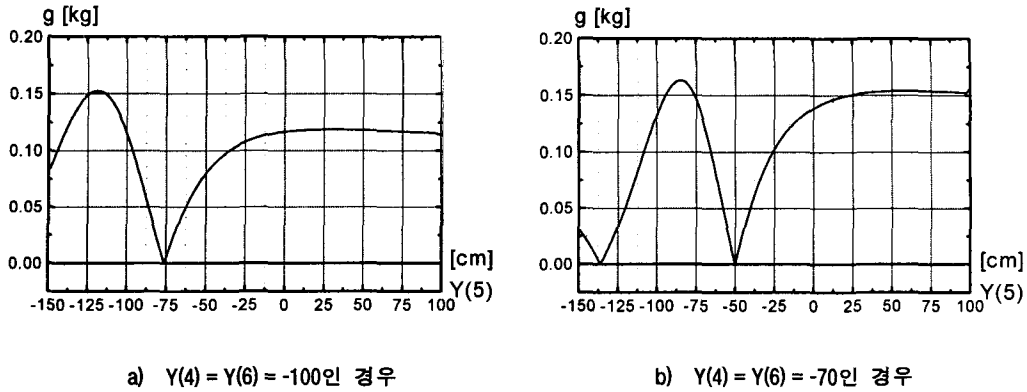


그림 8. 모델 4에서  $Y(5)$ 와 불평형력의 관계

그림 8은 모델 4에서  $Y(4)$ 와  $Y(6)$ 이 각각 -100, -70, 30인 경우,  $Y(5)$ 와 불평형력 사이의 관계를 나타낸 그래프이다.  $Y(4)$ 와  $Y(6)$ 의 초기치가 -100일 때는 -75.5, 초기치가 -70일 때는 -50.0과 -136.0 그리고 초기치가 30일 때는 -25.3과 65.0임을 알 수 있었다.  $Y(5)$ 뿐만 아니라  $Y(4)$ 와  $Y(6)$ 에 따라 불평형력이 변함을 알 수 있었다. 그림 9는 이 절점들과 불평형력의 관계를 나타낸 그래프이다.

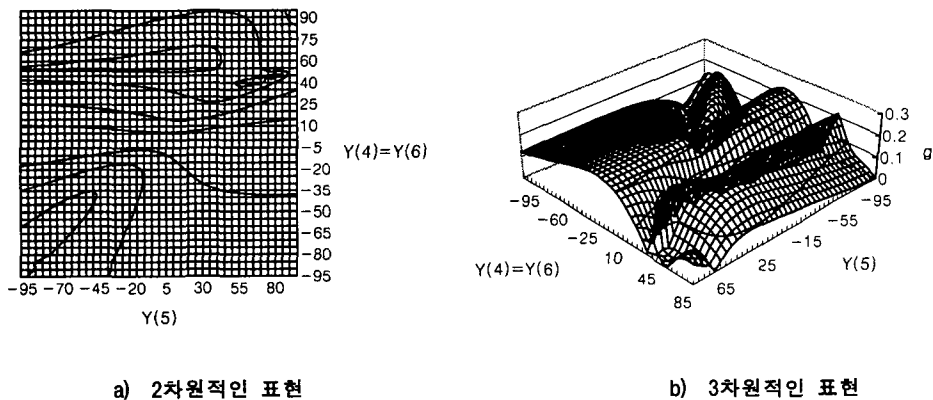


그림 9.  $Y(4) = Y(6)$ ,  $Y(5)$ 의 절점위치와 불평형력의 관계

절점 4와 6의  $Y$ 축좌표는 구조물의 대칭성을 고려하여 해석 중에 같게 놓고 해석하였다. 그림 9는 모델 4의 절점 4, 5, 6에서  $Y$ 절점좌표와 불평형력사이의 관계를 2차원적 및 3차원적으로 도식화하였다.

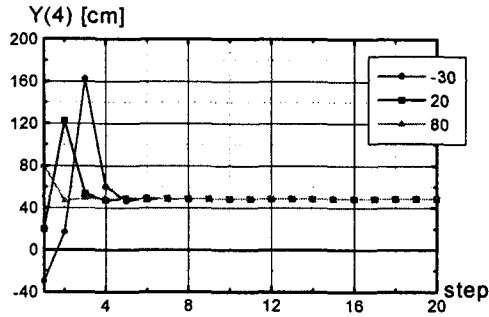


그림 10. 절점 4의 초기위치와 수렴도사이의 관계

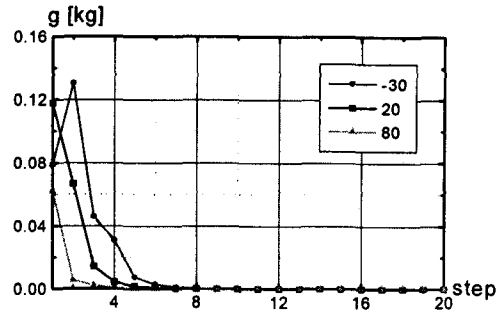


그림 11. 절점 4의 초기위치와 불평형력사이의 관계

본 연구에서는 비선형수치해석법으로 뉴턴랩슨법을 이용하였으며, 뉴턴랩슨법을 이용한 근사해의 수렴과정은 그림 10, 11과 같다. 여기서,  $Y(4)$ 의 초기위치가 각각 -30, 20, 80cm 인 경우에 대하여 해석하였다. 그림 10은 모델 1에서  $Y(4)$ 의 초기위치와 수렴도사이의 관계를 나타낸다. 10번째 스텝전후로 수렴함을 알 수 있었다. 그림 11은 모델 1에서  $Y(4)$ 의 초기위치와 불평형력  $g$ 사이의 관계를 나타내고 있으며, 역시 10번째 스텝전후에서 수렴됨을 알 수 있다.

## 제 5 장 결 론

이상으로 간단한 평면트러스구조물에서 호모로지변형이 제약모드로 주어진 경우에 대하여 형태해석을 수행하였다. 본 연구는 형태해석에 대한 기초적 연구로서 절점의 위치를 변수로 하였으며, 수치해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 본 논문에서는 평형방정식이 해를 가질 존재조건으로부터 유도된 수식을 통하여 트러스구조물의 형태해석을 하였다.
- 2) 호모로지변형을 만족하는 평면트러스구조물의 절점좌표를 구할 수 있었다.
- 3) 본 논문을 통하여 트러스구조물의 형태해석에 관한 기초적인 이론을 제시하고, 프로그램에 의한 수치해석을 통하여 그 정확성과 유효성을 검증하였다.

## 참고문헌

1. Topping, B. H. V., Shape Optimization of Skeletal Structures, A Review, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 8, pp.1933-1951, 1983.
2. 半谷裕彦, 形態解析 一般逆行列の應用, 培風館, 1991.
3. 半谷裕彦, 變位モード指定の構造形態解析法, 日本建築學會構造系論文報告集, 第453号, pp.95-100, 1993, 11.
4. William Weaver Jr., James M. Gere, Matrix Analysis of Framed Structures, 지성출판사, 1996.
5. 田島 稔, 小牧和雄, 最小二乗法の理論とその應用, 東洋書店, 1996.

## 감사의 글

본 연구를 지원해 주신 초대형 구조시스템 연구센터에 감사를 표한다.