

**박벽 공간 보-기둥과 뼈대구조의
자유진동 및 안정성 해석을 위한 일반이론**
**General Theory for Free Vibration and Stability Analysis
of Thin-walled Space Beam-Columns and Frames**

김 성 보* 구 봉 근** 한 상 훈***
Kim, Sung-Bo Koo, Bong-Kuen Han, Sang-Hoon

ABSTRACT

The general formulation of free vibration and stability analysis of unsymmetric thin-walled space frames and beam-columns is presented. The kinetic and total potential energy is derived by applying the extended virtual work principle, introducing displacement parameters defined at the arbitrarily chosen axis and including second order terms of finite semitangential rotations. In formulating the finite element procedure, cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions of the two node space frame element. Mass, elastic stiffness, and geometric stiffness matrices for the unsymmetric thin-walled section are evaluated. In order to illustrate the accuracy and practical usefulness of this formulation, finite element solutions for the free vibration and stability problems of thin-walled beam-columns and space frames are presented and compared with available solutions.

* 충북대학교 토목공학과 전임강사
** 충북대학교 토목공학과 교수
*** 충북대학교 토목공학과 교수

1. 서 론

Vlasov⁽¹⁾와 Timoshenko⁽²⁾에 의해서 박벽보 이론이 개발된 이후, 박벽보 및 뼈대구조의 안정성 및 자유진동이론에 대한 활발한 연구가 수행되었다. 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대부재의 비틀 및 횡좌굴에 대한 해석이론은 문헌^(1,2)에서 다루었으며, 김⁽³⁾등은 단면회전의 2차효과를 고려한 박벽 공간뼈대구조의 횡좌굴이론을 제시하였다. 이러한 이론들은 대부분 도심축과 전단중심축의 두축에서 변위 및 단면력이 정의되기 때문에 단면내부의 임의의 점에서 하중이 작용하거나, 부재축을 따라 변단면을 갖는 경우 또는 탄소성해석시 축방향 단면성질의 변화를 정확하게 모델링하기 어렵다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해서는 단면내부의 임의축에서 모든 변위파라미터 및 단면력의 성분을 정의하고 이에 대한 에너지식을 유도하는 일반이론이 요구된다.

본 논문에서는 박벽 보-기둥과 공간뼈대구조의 안정성거동을 조사하기 위하여, 전단변형효과를 무시하는 경우에 비대칭단면을 갖는 공간뼈대구조의 운동방정식을 유도하는 일반이론을 제시한다. 임의점을 통과하는 부재축과 두 개의 직각좌표를 도입하고, 이 축에 대한 박벽단면의 이동변위와 semitangential rotation⁽⁴⁾에 대응하는 회전변위 그리고 뒹으로 인한 비틀변위를 도입하여 연속체의 선형화된 에너지원리를 적용함으로써, 박벽공간뼈대구조의 운동에너지, 탄성변형에너지, 그리고 초기 단면력에 의한 포텐셜에너지식을 유도한다. 제시된 이론의 유한요소 정식화과정을 다루기

위하여, 전단효과를 무시하는 3차 Hermitian 다항식을 횡변위와 비틀각에 대한 형상함수로 사용하여 질량행렬, 탄성강도행렬, 그리고 기하학적 강도행렬을 산정한다. 비대칭 단면을 갖는 박벽공간뿔대구조의 자유진동 및 안정성해석을 위한 수치해석에가 제시되고 문헌의 결과 및 해석해와 비교, 검토를 통하여 본 이론의 타당성과 정확성을 입증한다.

2. 박벽 공간뿔대부재의 가상일의 원리

Total lagrangian 정식화에 따른, 3차원 연속체에 대한 가상일의 원리는 아래와 같이 표시된다.

$$\int_V {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\varepsilon_{ij} dV = \int_V ({}^t b - \rho {}^t\ddot{U}_i) \delta {}^tU_i dV + \int_s {}^tT \delta {}^tU_i ds \quad (1)$$

여기서 ${}^t\tau_{ij}$ 와 ${}^t\varepsilon_{ij}$ 는 각각 second Piola-Kirchhoff 응력과 Green-Lagrange의 변형도 텐서; ${}^t\ddot{U}_i$ 와 tU_i 는 각각 가속도와 변위벡터; ${}^t b_i$ 와 tT_i 는 물체력과 표면력을 나타낸다. 이때 δ 은 가상변위를 의미한다.

자유진동 및 정적 안정성해석을 수행하기 위하여 보존력을 받는 연속체를 생각한다. 초기변위는 없고 초기응력, 초기물체력 그리고 표면력이 자체로 평형을 이루는 경우를 고려하면 다음과 같이 선형화된 가상일의 원리를 얻는다.

$$\int_V [\rho \ddot{U}_i + \tau_{ij} \delta e_{ij} + {}^o\tau_{ij} \delta (\eta_{ij} + e_{ij}^*) - {}^o b_i \delta U_i^*] dV - \int_s {}^o T_i \delta U_i^* ds = \int_s T_i \delta U_i ds \quad (2)$$

여기서 e_{ij} , η_{ij} 그리고 e_{ij}^* 는 각각 U_i 로 인한 선형 및 비선형 변형도 그리고 U_i^* 로 인한 선형 변형도를 나타내며 U_i 와 U_i^* 는 식(7)에 제시되어있다. 첫 번째항은 박벽공간뿔대요소의 운동에너지, 두 번째항은 탄성변형 에너지를 나타낸다. 이에 반하여 초기응력으로 인한 기하학적 강도항은 비선형 변형도와 회전파라미터의 2차항의 결합된 효과로부터 얻는다. 그리고 마지막항은 부재력에 대응하는 포텐셜 에너지에 해당한다.

3. 박벽 공간뿔대부재의 총포텐셜에너지와 운동방정식

3.1 Semitangential Rotation과 박벽 공간뿔대부재의 변위장

본 연구에서는 박벽단면의 회전변위 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 를 Argyris⁽⁴⁾의 semitangential rotations으로 가정한다. Semitangential rotation은 3차원 강체회전시 회전순서에 상관없이 최종위치가 동일하다는 기하학적 성질을 갖기 때문에 기하학적 비선형해석 및 좌굴해석시 유일한 포텐셜에너지를 정의할 수 있다. 박벽 공간 뿔대부재 단면의 임의점의 위치벡터 X_0 에 대한 유한한 회전각 ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)에 의한 좌표변환관계에서 Argyris에 의하여 정의된 semitangential rotation의 변환규칙을 회전각의 2차항까지 고려하여 적용하면, 회전변위에 의하여 변환된 위치벡터 X 는 아래와 같이 표시된다.

$$X = TX_0 \quad (3a)$$

여기서,

$$T = \begin{bmatrix} 1 - (\omega_2^2 + \omega_3^2)/2 & -\omega_3 + \omega_1\omega_2/2 & \omega_2 + \omega_1\omega_3/2 \\ \omega_3 + \omega_1\omega_2/2 & 1 - (\omega_1^2 + \omega_3^2)/2 & -\omega_1 + \omega_2\omega_3/2 \\ -\omega_2 + \omega_1\omega_3/2 & \omega_1 + \omega_2\omega_3/2 & 1 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

결과적으로 semitangential rotation으로 인한 변환행렬 T 는 식(4)와 같이 표시할 수 있는데, 이는 이전의 연구결과⁽³⁾에 의한 변환행렬과 비교하였을 때 2차항까지 동일하다는 것을 알 수 있다.

$$X = TX_o = (I + S + \frac{1}{2}S^2)X_o \quad (4a)$$

여기서

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4b)$$

따라서, 박벽 공간빠대부재의 부재축 x_1 위치에서 단면내부의 임의점의 총변위 U 는 강체이동변위 U_o 와 회전변위 $(X - X_o)$ 의 합으로 식(5)와 같이 얻어진다.

$$U = U_o + (X - X_o) = U_o + (S + \frac{1}{2}S^2)X_o \quad (5a)$$

여기서

$$X_o^T = (o, x_2, x_3) \quad (5b)$$

$$U_o^T = (U_x + f\phi, U_y, U_z) \quad (5c)$$

식(5c)에서 f 는 단면의 뒀을 나타내는 변위파라미터이고 ϕ 는 좌표원점에 대하여 정의된 뒀함수이다. 이제, 총변위 U 에서 변위파라미터의 1차항과 2차항을 각각 U_i, U_i^* 으로 표시하면, 전단변형이 무시되는 경우($\omega_2 = -U_z'$; $\omega_3 = U_y'$; $f = -\omega_1' = -\theta'$)에 비대칭 박벽단면의 변위장은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$U^T = (U_1 + U_1^*, U_2 + U_2^*, U_3 + U_3^*) \quad (6)$$

여기서

$$U_1 = U_x - U_z' x_3 - U_y' x_2 - \theta' \phi \quad (7a)$$

$$U_2 = U_y - \theta' x_3 \quad (7b)$$

$$U_3 = U_z + \theta' x_2 \quad (7c)$$

그리고

$$U_1^* = \frac{1}{2}[-\theta' U_z' x_2 + \theta' U_y' x_3] \quad (7d)$$

$$U_2^* = \frac{1}{2}[-(\theta'^2 + U_y'^2)x_2 - U_z' U_y' x_3] \quad (7e)$$

$$U_3^* = \frac{1}{2}[-U_z' U_y' x_2 - (\theta'^2 + U_z'^2)x_3] \quad (7f)$$

3.2 단면상수 및 단면력의 변환관계

그림 1은 비대칭 박벽단면의 변위파라미터, 단면계수 그리고 단면력의 변환관계식을 유도하기 위하여 정의하는 세 개의 직각좌표계를 나타낸 것이다. 그림 1에서 (x_2, x_3) 좌표계는 임의로 선택한 직각좌표계이고, (x_2^c, x_3^c) 와 (x_2^s, x_3^s) 는 각각 도심과 전단중심에서 주축(principal axes)과 평행한 좌표축을 나타낸다. α 는 x_2^c 축이 반시계방향으로 x_2 축과 이루는 사이각이다.

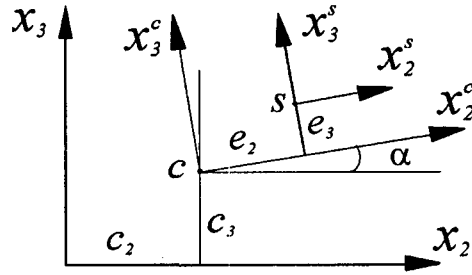


그림 1 세 개의 직각 좌표계

이들 세좌표축 사이의 변환관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_2^c &= x_2^s + e_2 & , & \quad x_3^c = x_3^s + e_3 \\ x_2 &= x_2^c \cos \alpha - x_3^c \sin \alpha + c_2 & , & \quad x_3 = x_2^c \sin \alpha + x_3^c \cos \alpha + c_3 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, c_2, c_3 는 (x_2, x_3) 축에서 도심의 좌표, e_2, e_3 는 (x_2^c, x_3^c) 축에서 전단중심의 좌표를 나타낸다. 한편, 임의의 좌표축 x_2, x_3 에 대하여 정의되는 단면상수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_A x_2 dA = c_2 A & , & \quad S_2 = \int_A x_3 dA = c_3 A \\ I_2 &= \int_A x_3^2 dA & , & \quad I_3 = \int_A x_2^2 dA & , & \quad I_{23} = \int_A x_2 x_3 dA \\ I_{2\phi} &= \int_A x_3 \phi dA & , & \quad I_{3\phi} = \int_A x_2 \phi dA & , & \quad I_\phi = \int_A \phi^2 dA \end{aligned} \quad (9)$$

(x_2^c, x_3^c) 와 (x_2^s, x_3^s) 의 두 좌표계에서 정의되는 단면상수들은 오른쪽 위첨자 c, s 를 식(9)의 기호에 삽입하여 표시토록 한다. 이 규칙은 변위파라미터, 단면력에 대하여도 적용되는 것으로 한다. 이제 식(8)을 고려하면 다음과 같이 세좌표계에서 정의되는 단면상수 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} I_2 &= I_3^c \sin^2 \alpha + I_2^c \cos^2 \alpha + c_3^2 A & \quad I_3 &= I_3^c \cos^2 \alpha + I_2^c \sin^2 \alpha + c_2^2 A \\ I_{2\phi} &= -I_3^c \sin \alpha d_3 + I_2^c \cos \alpha d_2 & \quad I_{3\phi} &= -I_3^c \cos \alpha d_3 - I_2^c \sin \alpha d_2 \\ I_{23} &= (I_3^c - I_2^c) \sin \alpha \cos \alpha + c_2 c_3 A & \quad I_\phi &= \int_A \phi^2 dA = I_\phi^s + I_3^c d_3^2 + I_2^c d_2^2 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, d_2, d_3 는 (x_2, x_3) 축의 원점에서 (x_2^c, x_3^c) 좌표축과 평행한 방향으로 전단중심까지의 거리를 나타낸다. ϕ 는 임의의 축 x_1 에 대한 뒀함수이며, 도심축 x_1^c 와 전단중심축 x_1^s 에 대하여 각각 정의된 뒀함수 ϕ^c, ϕ^s 와의 관계식은 다음과 같다.

$$\phi = \phi^s - x_2^c d_3 + x_3^c d_2 \quad (11a)$$

$$\phi^c = \phi^s - x_2^c e_3 + x_3^c e_2 \quad (11b)$$

식(11)에서 정의된 뒀함수가 단면에 대해 normalized 되어 있다고 가정하면 아래의 성질을 만족시킨다.

$$S_\phi = \int_A \phi dA = 0 \quad , \quad S_\phi^c = \int_A \phi^c dA = 0 \quad , \quad S_\phi^s = \int_A \phi^s dA = 0 \quad (12)$$

단면이 강체거동한다는 가정 때문에 면내변형도(ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{23})는 영으로 간주하고 박벽단면 내에서 평면응력상태를 가정하므로, 증분 단면력을 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA, \quad F_3 = \int_A \tau_{13} dA \\ M_1 &= \int_A (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) dA, \quad M_2 = \int_A \tau_{11} x_3 dA, \quad M_3 = - \int_A \tau_{11} x_2 dA \\ M_\phi &= \int_A \tau_{11} \phi dA, \quad M_R = \int_A (\tau_{12} \phi_{,2} + \tau_{13} \phi_{,3}) dA \\ M_P &= \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, F_1 , F_2 그리고 F_3 는 각각 축력과 전단력이다; M_2 와 M_3 는 각각 x_2 와 x_3 축에 대한 휨모멘트이다; M_1 은 x_1 축에 대한 비틀모멘트, M_R 와 M_ϕ 는 각각 x_1 축에 대한 구속된 비틀모멘트와 바이모멘트이다; M_P 는 임의축에서 정의된 Wagner effect⁽⁷⁾를 나타내는 단면력이다. 식(8)을 고려하면 다음과 같이 세좌표계에서 정의되는 단면력 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} F_2 &= F_2^s \cos \alpha - F_3^s \sin \alpha, \quad F_3 = F_2^s \sin \alpha + F_3^s \cos \alpha, \quad M_1 = M_1^s - F_2^s d_3 + F_3^s d_2 \\ M_2 &= -M_3^c \sin \alpha + M_2^c \cos \alpha + c_3 F_1^c, \quad M_3 = M_3^c \cos \alpha + M_2^c \sin \alpha - c_2 F_1^c \\ M_\phi &= M_\phi^s + M_3^c d_3 + M_2^c d_2, \quad M_R = M_R^s - F_2^s d_3 + F_3^s d_2 \end{aligned} \quad (14)$$

또한, 단면력에 대한 정의식(13)에 후크의 법칙을 적용하고, 변위-변형도 관계식의 변위를 대입하여 단면에 대하여 적분을 행하면 다음의 힘-변위 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} F_1 &= EA U_x' - ES_3 U_z'' - ES_2 U_y''' \\ M_2 &= ES_3 U_x' - EI_2 U_z'' - EI_{23} U_y'' - EI_{3\phi} \theta'' \\ M_3 &= -ES_2 U_x' + EI_{23} U_z'' + EI_3 U_y'' + EI_{2\phi} \theta'' \\ M_\phi &= -EI_{3\phi} U_z'' - EI_{2\phi} U_y'' - EI_\phi \theta'' \\ M_{st} &= GJ \theta \end{aligned} \quad (15)$$

3.3 총포텐셜에너지와 운동방정식

식(2)에 변위-변형도 관계식을 대입하고 단면력의 정의식(13)을 고려하여 단면에 대하여 적분을 수행하면 총 포텐셜에너지 Π 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi &= -\Pi_M + \Pi_E + \Pi_G - \Pi_{ext} \quad (16) \\ \Pi_M &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_L [A (\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2) + I_o \dot{\theta}^2 + I_3 \dot{U}_y'^2 + I_2 \dot{U}_z'^2 + I_\phi \dot{\theta}'^2 \\ &\quad - 2S_2 \dot{U}_x \dot{U}_z' - 2S_3 \dot{U}_x \dot{U}_y' + 2I_{23} \dot{U}_z' \dot{U}_y' + 2I_{2\phi} \dot{U}_z' \dot{\theta}' \\ &\quad + 2I_{3\phi} \dot{U}_y' \dot{\theta}' + 2S_3 \dot{U}_z \dot{\theta} - 2S_2 \dot{U}_y \dot{\theta}] dx_1 \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_L [& EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 + GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 \\ & - 2ES_2 U_x' U_z'' - 2ES_3 U_x' U_y'' \\ & + 2EI_{23} U_y'' U_z'' + 2EI_{3\phi} U_y'' \theta'' + 2EI_{2\phi} U_z'' \theta''] dx_1 \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = \frac{1}{2} \int_L [& {}^oF_1 (U_y'^2 + U_z'^2) + {}^oM_P \theta'^2 + {}^oM_1 (U_z' U_y'' - U_z'' U_y') \\ & + {}^oM_2 (U_y'' \theta - U_y' \theta') + {}^oM_3 (U_z'' \theta - U_z' \theta') + {}^oF_2 U_z' \theta + {}^oF_3 U_y' \theta] dx_1 \end{aligned} \quad (17c)$$

$$\Pi_{ext} = U_e^T F_e \quad (17d)$$

여기서 U_e 와 F_e 는 각각 부재양단의 변위벡터와 부재력벡터를 나타내며 식(16)을 4개의 변위성분 (U_x, U_y, U_z, θ)에 대하여 변분을 취하면 박벽공간뿔대부재의 운동방정식을 얻을 수 있다.

4. 유한요소법을 이용한 정식화

그림 2는 절점당 7개의 자유도를 갖는 2절점 Hermitian 뿔대요소를 보여준다. Hermitian 다항식 및 절점변위성분들로 구성된 벡터는 이전의 연구⁽⁹⁾와 동일하다. 형상함수와 절점변위벡터로 표현되는 변위장을 식(16)에 대입하여 부재길이에 대하여 수치적분을 수행하고 직접강도법에 의한 좌표변환을 수행하면 공간 박벽뿔대구조의 행렬 운동방정식을 얻는다.

$$M\dot{U} + [K_E + \lambda K_G]U = 0 \quad (18)$$

여기서 K_E 와 K_G 는 각각 전체구조물 탄성강도 및 기하강도 행렬이며 λ 는 하중파라미터이다. $U = e^{i\omega t} H$ 라고 가정하면 식 (18)은 다음과 같이 이중고유치문제로 귀결된다.

$$\omega^2 MH = (K_E + \lambda K_G)H \quad (19)$$

여기서 ω 는 구조물의 회전진동수를 나타낸다.

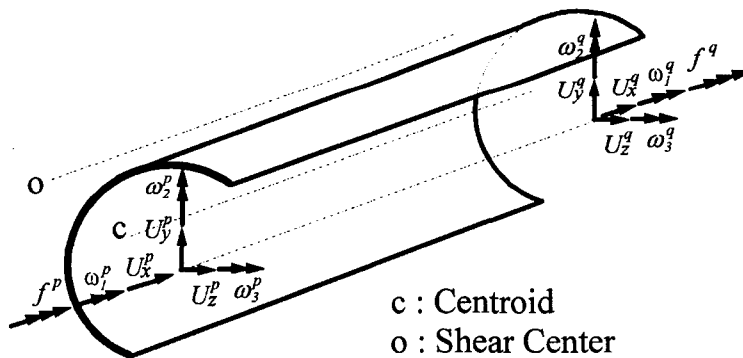


그림 2 2절점 Hermitian 뿔대요소

5. 수치해석예

5.1 단순지지된 박벽보의 안정성해석

본 예제에서는 축방향 하중을 받으며 비대칭단면을 갖는 단순지지된 박벽보의 안정성해석을 수행하였다. 2절점을 갖는 hermitian 보요소로서 단순보를 모델링할 때 6개의 요소를 사용하였다. 단면의 제원은 다음과 같다.

$$E = 10^4 N/cm^2, G = E/2, A = 30 cm^2, L = 100 cm, I_2^c = 100 cm^4, I_3^c = 800 cm^4$$

$$I_4^c = 150 cm^4, J = 10 cm^4, e_2 = 6 cm, e_3 = 10 cm, \beta_2^c = 5 cm, \beta_3^c = -10 cm,$$

단면의 형상이 비대칭이므로 휨 좌굴과 비틀 좌굴이 연계되어 발생하게 되고 그 결과를 표1에 나타내었다. 표1에서 Method1은 도심축에서 7개의 변위성분을 정의했을 때의 결과이고 Method2는 부재축을 도심축으로부터 (100,50)만큼 이동시키고 주축을 1 radian만큼 회전시켜서 해석을 수행한 결과이다 (즉, $C_2 = 100 cm, C_3 = 50 cm, \alpha = 1 rad.$).

표 1. 박벽보의 휨-비틀 좌굴하중 [N]

Mode	해석해 ⁽²⁾	Method 1	Method 2
1	279.897	279.901	279.902
2	1308.45	1308.57	1308.57
3	36513.6	36517.2	36517.2

5.2 단순지지된 박벽보의 자유진동 해석

본 예제에서는 축방향 하중을 받으며 비대칭단면을 갖는 단순지지된 박벽보의 자유진동 해석을 수행하였다.

표 2. 박벽보의 휨-비틀 고유진동수 [(radian/sec)²]

Mode	zero axial force			${}^0F_1 = -200 N$ at $(x_2, x_3) = (-5, 7)$		
	Analytic Solution ²⁾	Method 1	Method 2	Analytic Solution ²⁾	Method 1	Method 2
n=1	1.17287	1.17287	1.17285	.290794	.290794	.290824
	5.46156	5.46156	5.46155	5.11979	5.11979	5.11979
	136.963	136.963	136.963	134.184	134.184	134.184
n=2	5.50341	5.50342	5.50676	2.32697	2.32697	2.33032
	82.1628	82.1633	82.1633	80.4626	80.4632	80.4632
	1621.25	1621.26	1621.26	1612.80	1612.81	1612.81
n=3	14.2024	14.2025	14.2423	7.20439	7.20450	7.24393
	404.560	404.573	404.574	400.665	400.678	400.678
	5835.63	5835.82	5835.83	5822.04	5822.24	5822.24

단순보의 제원 및 유한요소모델링은 5.1의 예와 동일하며 해석결과를 표2에 나타내었다. 표2에서 Method1은 도심축에서 7개의 변위성분을 정의했을 때의 결과이고 Method2는 부재축을 도심축으로부터 (100,50)만큼 이동시키고 주축을 1 radian만큼 회전시켜서 해석을 수행한 결과이다 (즉, $C_2 = 100\text{ cm}$, $C_3 = 50\text{ cm}$, $a = 1\text{ rad.}$). 초기의 축력이 없는 경우 및 축력이 작용하는 경우에 대하여, 7개의 변위성분을 도심축에서 정의했을 때와 임의의 점에서 정의했을 때의 결과가 휨변위는 도심축에서 정의하고 비틀변위는 전단중심축에서 정의하여 구한 이론해⁽²⁾와 최대 1% 이내로 잘 일치함을 보여준다.

6. 결론

본 논문에서는 박벽공간 보-기둥과 공간뼈대구조의 자유진동 및 안정성거동을 조사하기 위하여, 전단변형효과를 무시하는 경우에 비대칭단면을 갖는 공간뼈대구조의 운동방정식을 유도하는 일반이론이 제시되었다. 임의점을 통과하는 부재축과 두 개의 직각좌표를 도입하고, 이 축에 대한 박벽단면의 이동변위와 semitangential rotation에 대응하는 회전변위 그리고 뒹으로 인한 비틀변위를 도입하여 연속체의 선형화된 에너지원리를 적용함으로써, 박벽공간뼈대구조의 운동에너지, 탄성변형에너지, 그리고 semitangential moment에 대응하는 초기 단면력에 의한 포텐셜에너지식을 유도하였다. 제시된 이론의 유한요소 정식화과정을 다루기 위하여, 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 질량행렬, 탄성강도행렬, 그리고 기하학적 강도행렬을 산정하였다. 비대칭 단면을 갖는 박벽공간뼈대구조의 안정성 및 자유진동에 대한 수치해석 결과와 다른 문헌들의 결과를 비교 분석하였다. 특히, 본논문에서 제시한 유한요소정식화에서는 뒹을 포함하여 7개의 변위파라미터를 단면내부의 임의의 한 점에서 정의하였기 때문에 서로 다른 유한요소 사이의 연결문제 및 탄소성 해석 시에도 유용하게 적용될 수 있다고 판단된다.

7. 참고문헌

- [1] V. Z. Vlasov, *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 1961.
- [2] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
- [3] M. Y. Kim, S. P. Chang and S. B. Kim, Spatial stability analysis of thin-walled space frames, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 39, 499-525 (1996).
- [4] J. H. Argyris and Sp. Symeonidis, Nonlinear finite element analysis of elastic systems under non-conservative loading - natural formulation. part I. Quasistatic problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 26(1), 75-124 (1981).
- [5] Y. B. Yang and S. R. Kuo, Frame buckling analysis with full consideration of joint compatibilities, *J. Eng. Mech. ASCE*, 118(5), 871-889 (1992).
- [6] H. Chen and G. E. Blandford, Thin-walled space frames. I: large-deformation analysis theory, *J. Struct. Eng. ASCE*, 117(8), 2499-2520 (1991).
- [7] W. F. Chen and T. Atsuta, *Theory of Beam-Columns, Vol. 2, Space Behavior and Design*, McGraw-Hill, New York, 1977.