

風荷重을 받는 현수교의 진동 解析에 있어서 모우드  
중첩법과 모우드 가속도법의 비교  
Comparsion of Mode Superposition Method and Mode Acceleration  
Method in Dynamic Analysis of Suspension Bridges under Wind Loads

김 태 남 \*  
Kim, Tae Nam

ABSTRACT

A method of stochastic dynamic analysis of suspension bridge subjected to random wind loads has been developed in this paper. Example analyses are carried out by mode superposition method(MSM), mode acceleration method(MAM) and advanced mode acceleration method(AMAM) in frequency domain for the Nam-Hae Bridge.

In this study the statistical characteristics of random wind loads are assumed to be Gaussian stationary zero mean processes. The considered structural response quantities are displacements, shear forces and bending moments. The mean extreme responses are approximately calculated by three times of standard deviations.

The followings are the conclusions from this study.

1. Numerical results which obtained by three methods of computer program developed in this paper agree reasonably well when the numbers of modes increase.
2. AMAM is simple, accurate, economic and reliable method compared with the MSM and the MAM.

1. 序 論

현수교는 경간이 길고 유연(flexible)한 구조적 특성 때문에 외적 하중에 큰 振幅으로 振動을 하게 된다. 따라서 동적 해석에 의해서만 그 거동이 효과적으로 해석 될 수 있다. 외적 하중으로는 비 대칭 차량하중, 바람(風), 지진 등을 생각 할 수 있으며, 1940년 완성된 Tacoma Narrows 교량이 18.9 m/sec 라는 그리 크지 않은 풍속조건 아래서 파괴 된 사고가 있었으며 여러가지 조사 결과 과도한 비틀림 振動에 의한 것이 파괴의 직접 동기라는 원인 규명이 밝혀진 이래 현수교의 耐風 安全性 문제는 수 많은 실험에 의해 급속한 발전을 이룩하게 되었다. 일반적으로 風荷重은 불규칙(random)한 성질을 갖게 되고, 따라서 推計學的(stochastic) 동적 해석에 의해서만 정확한 해를 얻을 수 있으며, 또 하중의 성격상 周波數 領域(frequency domain)에서 모우드 해석법에 의하는 것이 효과적인 方法이 된다. 현수교 보강형의 동적거동으로는 수직 振動, 비틀림 振動 및 횡 振動으로 나눌 수 있으나, 본 연구에서는 수직 振動의 경우를 우선 해석 하도록 하며,

\* 정회원. 상지대학교 토목공학과 조교수

여기서 사용되는 모우드 해석법으로는 Mode Superposition Method(MSM), Mode Acceleration Method(MAM)와 Advanced Mode Acceleration Method(AMAM)의 3 가지 방법에 의해 그 거동을 확률론적으로 해석하고자 한다. MAM에 대하여서는 Thomson(1972)과, Craig(1981)<sup>(5)</sup>가 그 우수성을 간단히 소개했고, 그 후 몇편의 研究<sup>(2,4,6)</sup>가 이루어지기는 했으나 채택된 예제가 극히 단순하고 확정론적(deterministic) 방법에 그치거나, 아니면 확률개념이 도입되기는 했으나 전부가 時間領域(time domain)에서의 연구 뿐인 것이다.

본 연구의 目的은 周波數 領域(frequency domain)에서 MAM 방법의 확률론적 동적 해석법을 公式化 하고, 또 MAM 방법의 단점을 보완하여 개선된(Advanced) MAM(AMAM) 해법에 의해서, 극히 적은 모우드 수(1- 2개) 만을 사용하여 컴퓨터 해석 시간을 대폭 줄일 수 있고, 또 보다 더 믿을 수 있고 정확한 해법이 될 수 있음을 수치 해석을 통하여 입증하고자 한다.

## 2. 風速 spectrum

보강형의 i, j 두 절점에서의 풍속 상관 관계를 고려한 풍속 spectrum은 아래와 같이 계산할 수 있다.<sup>(7)</sup>

$$S_{U_i U_j}(\omega) = S_U(\omega) \exp\left[-\frac{16\omega}{2\pi U} |X_i - X_j|\right] \quad (1)$$

$$S_{W_i W_j}(\omega) = S_W(\omega) \exp\left[-\frac{8\omega}{2\pi U} |X_i - X_j|\right] \quad (2)$$

$X_i, X_j$  : 절점 i, j의 X 축 좌표

$S_{U_i U_j}(\omega)$  : cross spectrum of longitudinal wind velocity fluctuations at node i and j

$S_{W_i W_j}(\omega)$  : cross spectrum of vertical wind velocity fluctuations at node i and j

$S_U(\omega)$  : spectrum of longitudinal wind velocity fluctuations

$S_W(\omega)$  : spectrum of vertical wind velocity fluctuations

## 3. 荷重 spectrum

보강형에 작용하는 active force의 power spectral density function은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S_{P_i P_j}(\omega) = [\rho U B L_j C_L(\alpha_0)]^2 S_{U_i U_j}(\omega) + \left[\frac{1}{2} \rho U B L_i C'_{LE}(\alpha_0)\right]^2 S_{W_i W_j}(\omega) + \frac{1}{2} [\rho U B L_i]^2 C_L(\alpha_0) C'_{LE}(\alpha_0) S_{U_i W_j}(\omega) + \frac{1}{2} [\rho U B L_i]^2 C_L(\alpha_0) C'_{LE}(\alpha_0) S_{W_i U_j}(\omega) \quad (3)$$

## 4. 推計學的 解法에 의한 振動 解析

### 4.1 Mode Superposition Method (MSM)

이 方法은 coupled equation을 좌표변환에 의해 uncoupled equation으로 변환하여 푸는 방법으로 일반적으로 다음과 같다.

$$[M] \ddot{\{v(t)\}} + [C] \dot{\{v(t)\}} + [K] \{v(t)\} = \{P(t)\} \quad (4)$$

$$\{V\} = [\phi'] \{Y\} \quad , \quad [\phi'] : N \times n \text{ 차수의 modal matrix } (n < N) \quad (5)$$

N : 전체 모우드수, n : 포함되는 모우드수

{Y} : generalized modal coordinate vector

{V} : independent displacement vector

$$\ddot{\{Y_n(t)\}} + 2[\xi_n][\omega_n]\dot{\{Y_n(t)\}} + [\omega_n^2]\{Y_n(t)\} = \frac{\{P_n(t)\}}{[M_n]} \quad (6)$$

[M<sub>n</sub>] = [φ']<sup>T</sup> [M] [φ'] = [I] ; diagonal generalized mass matrix

[C<sub>n</sub>] = [φ']<sup>T</sup> [C] [φ'] = 2 [ξ<sub>n</sub>] [ω<sub>n</sub>] [M<sub>n</sub>] = 2 [ξ<sub>n</sub>] [ω<sub>n</sub>]

: diagonal generalized damping matrix

[K<sub>n</sub>] = [φ']<sup>T</sup> [K] [φ'] = [ω<sub>n</sub><sup>2</sup>] [M<sub>n</sub>] = [ω<sub>n</sub><sup>2</sup>]

: diagonal generalized stiffness matrix

{P<sub>n</sub>(t)} = [φ']<sup>T</sup> {P(t)} : generalized force vector

[ω<sub>n</sub><sup>2</sup>] : diagonal natural circular frequency matrix

ξ<sub>n</sub> : n번째 모우드의 damping ratio

위의 식 (5)로부터 response spectrum은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$[S_{v_n v_n}(\omega)] = [\phi'] [S_{Y_n Y_n}(\omega)] [\phi']^T \quad (7)$$

이제 (6)식의 양변을 Fourier transform하여 F<sub>Y<sub>n</sub></sub>(ω)에 대하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$-\omega^2 F_{Y_n}(\omega) + 2i\xi_n \omega_n \omega F_{Y_n}(\omega) + \omega_n^2 F_{Y_n}(\omega) = \frac{1}{M_n} F_{P_n}(\omega) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$$F_{Y_n}(\omega) = \frac{F_{P_n}(\omega)}{\omega_n^2 M_n [1 + 2i\xi_n (\omega / \omega_n) - (\omega / \omega_n)^2]} = H_n(\omega) F_{P_n}(\omega) \quad (9)$$

$$F_{Y_n}^*(\omega) = H_n^*(\omega) F_{P_n}^*(\omega) \quad (10)$$

$$H_n(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 M_n [1 + 2i\xi_n (\omega / \omega_n) - (\omega / \omega_n)^2]} \quad (11)$$

$$H_n^*(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 M_n [1 - 2i\xi_n (\omega / \omega_n) - (\omega / \omega_n)^2]} \quad (12)$$

$$[S_{Y_n Y_n}(\omega)] = [H_n^*(\omega)] [S_{P_n P_n}(\omega)] [H_n(\omega)] \quad (13)$$

$$[S_{P_n P_n}(\omega)] = [\phi']^T [S_{P_i P_j}(\omega)] [\phi'] \quad (14)$$

표준편차는 作用하게 되는 하중 frequency에 대하여 적분함으로써 구할수 있고 또 최대 응답치의 確率的 기대값은 근사적으로 표준편차의 3배를 취하여 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{v_n v_n}(\omega) d\omega \quad (15)$$

$$V_{max} \approx 3\sigma_v \quad (16)$$

#### 4.2 Mode Acceleration Method (MAM)

이 방법에서는 (4)의 운동 방정식을 {v(t)}에 대하여 다음과 같이 정리하고 이로부터 response spectrum S<sub>v</sub>(ω)을 계산하는 것으로써 그 과정은 다음과 같다. 우선 식 (4)를 변환 시키면 다음의 식을 얻는다.

$$\{v(t)\} = [K]^{-1} \{P(t)\} - [K]^{-1} [C] \{\dot{v}(t)\} - [K]^{-1} [M] \{\ddot{v}(t)\} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned}
[K]^{-1} [C] \{\dot{v}(t)\} &= [\phi'] [\phi']^{-1} [K]^{-1} [\phi']^{-T} [\phi']^T [C] [\phi'] \{\dot{Y}(t)\} \\
&= [\phi'] [K_n]^{-1} [C_n] \{\dot{Y}_n(t)\} = 2 [\phi'] [\xi_n / \omega_n] \{\dot{Y}_n(t)\} \\
[K]^{-1} [M] \{\ddot{v}(t)\} &= [\phi'] [\phi']^{-1} [K]^{-1} [\phi']^{-T} [\phi']^T [M] [\phi'] \{\ddot{Y}(t)\} \\
&= [\phi'] [K_n]^{-1} [M_n] \{\ddot{Y}(t)\} = [\phi'] [1 / \omega_n^2] \{\ddot{Y}_n(t)\}
\end{aligned}$$

의 관계식이 대입 되면 다음과 같이 변형된다.

$$\{v(t)\} = [K]^{-1} \{P(t)\} - 2[\phi'] [\xi_n / \omega_n] \{\dot{Y}_n(t)\} - [\phi'] [1 / \omega_n^2] \{\ddot{Y}_n(t)\} \quad (18)$$

윗 식의 양변을 Fourier transform하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\{F_V(\omega)\} &= [K]^{-1} \{F_P(\omega)\} - 2[\phi'] [\xi_n / \omega_n] \{F_{\dot{Y}_n}(\omega)\} - [\phi'] [1 / \omega_n^2] \{F_{\ddot{Y}_n}(\omega)\} \\
&= [K]^{-1} \{F_P(\omega)\} - 2[\phi'] [\xi_n / \omega_n] [H_n(\omega)] [\phi']^T \{F_P(\omega)\} \\
&\quad - [\phi'] [1 / \omega_n^2] [H_n(\omega)] [\phi']^T \{F_P(\omega)\} \quad (19)
\end{aligned}$$

여기서  $[K_a] = [K]^{-1}$

$$[C_a] = -2[\phi'] [\xi_n / \omega_n] [H_n(\omega)] [\phi']^T$$

$$[M_a] = -[\phi'] [1 / \omega_n^2] [H_n(\omega)] [\phi']^T \text{ 으로 놓으면 아래와 같이 간단히 쓸 수 있다.}$$

$$\{F_V(\omega)\} = [K_a] \{F_P(\omega)\} + [C_a] \{F_P(\omega)\} + [M_a] \{F_P(\omega)\} \quad (20)$$

위의 식으로부터 spectral density function 정의에 따라  $S_{VV}(\omega)$  값을 아래의 식과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
[S_{VV}(\omega)] &= [K_a][S_{PIP_j}(\omega)][K_a]^T + [K_a][S_{PIP_j}(\omega)][C_a]^T + [K_a][S_{PIP_j}(\omega)][M_a]^T + [C_a]^*[S_{PIP_j}(\omega)][K_a]^T \\
&\quad + [C_a]^*[S_{PIP_j}(\omega)][C_a]^T + [C_a]^*[S_{PIP_j}(\omega)][M_a]^T + [M_a]^*[S_{PIP_j}(\omega)][K_a]^T + [M_a]^*[S_{PIP_j}(\omega)][C_a]^T \\
&\quad + [M_a]^*[S_{PIP_j}(\omega)][M_a]^T \quad (21)
\end{aligned}$$

이후의 과정은 mode superposition method 에서와 같은 방법으로 표준편차 및 應答의 확률적 기대치를 계산한다.

### 4.3 Advanced Mode Acceleration Method (AMAM)

앞에서 다루고 있는 MAM 방법은 식 자체가 매우 복잡하고, 특히 컴퓨터 프로그램에 있어서 그 과정이 난해하여 잘못하면 실수를 범하기 쉬운 몇가지 短點을 지니고 있음을 알 수 있었다. 이러한 단점을 극복 하려는 의도에서 지금까지 사용되어온 MAM 방법의 수정안을 제시하고자 한다. 우선 개선된(Advanced) Mode Acceleration Method (AMAM) 으로의 공식 전개는 運動 方程式의 일반식에 포함되어 있는 彈性力, 減衰力 및 慣性力의 세가지 힘을 하나의 힘으로 정리 하는것이 중요하다.

여기서, 일반적으로 하중의 주기에 비하여 상당히 작은 振動주기를 갖는 구조물의 경우 減衰力과 慣性力은 비교적 미소하여 “類似 靜的 解析”에서 처럼 彈性力이 지배적인 荷重이 된다는 사실에 유의하여 본다면 減衰力과 慣性力을 소거시켜 彈性力에 의한 표현으로 유도하는 것이 타당할 것이다. 이와 같은 사실에 근거하여 AMAM의 공식 유도는 다음의 과정과 같다. 앞의 (18)식 으로부터

$$\begin{aligned}
\{v(t)\} &= [K]^{-1} \{P(t)\} - 2[\phi_n] [\xi_n / \omega_n] \{\dot{Y}_n(t)\} - [\phi_n] [1 / \omega_n^2] \{\ddot{Y}_n(t)\} \\
&= [K]^{-1} \{P(t)\} + [\phi_n] [ -2 [ \xi_n / \omega_n ] \{\dot{Y}_n(t)\} - [1 / \omega_n^2] \{\ddot{Y}_n(t)\} ] \quad (22)
\end{aligned}$$

한편 MSM에서의 運動方程式의 일반식은 식 (6)으로 부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{\{Y_n(t)\}} + 2 [\xi_n] \omega_n \{\dot{Y}_n(t)\} + [\omega_n^2] \{Y_n(t)\} &= [M_n]^{-1} \{P_n(t)\} \quad n=1,2,3,\dots \\ &= [M_n]^{-1} [\phi_n]^T \{P(t)\} \end{aligned} \quad (23)$$

위의 식을 변형하면 아래의 식과 같다.

$$\frac{1}{[\omega_n^2]} \ddot{\{Y_n(t)\}} + 2 \frac{[\xi_n]}{[\omega_n]} \{\dot{Y}_n(t)\} + \{Y_n(t)\} = \frac{1}{[\omega_n^2]} [M_n]^{-1} [\phi_n]^T \{P(t)\} \quad (24)$$

이 식을 다시 정리하면 아래와 같다.

$$- 2 [\xi_n / \omega_n] \{\dot{Y}_n(t)\} - [1 / \omega_n^2] \ddot{\{Y_n(t)\}} = \{Y_n(t)\} - [1 / \omega_n^2] [M_n]^{-1} [\phi_n]^T \{P(t)\} \quad (25)$$

위식을 (22)에 대입하여 정리하면 減衰力과 慣性力이 소거되고 彈性力 만으로 표시 될 수있는 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \{v(t)\} &= [K]^{-1} \{P(t)\} + [\phi_n] [\{Y_n(t)\} - [1 / \omega_n^2] [M_n]^{-1} [\phi_n]^T \{P(t)\}] \\ &= [\phi_n] \{Y_n(t)\} + [ [K]^{-1} - [\phi_n] [\omega_n^2]^{-1} [M_n]^{-1} [\phi_n]^T ] \{P(t)\} \end{aligned} \quad (26)$$

Wilson교수는 時間 領域에서 위식의 가능성<sup>(6)</sup>을 보여 주었으며 이제 周波數 領域에서의 공식 유도는 다음의 과정으로 구할 수 있다.

$$\text{우선, } [ [K]^{-1} - [\phi_n] [\omega_n^2]^{-1} [M_n]^{-1} [\phi_n]^T ] = [ K^A(\omega_n) ] \quad (27)$$

으로 놓으면 위식은 다음과 같이 간략히 나타 낼 수 있다.

$$\{v(t)\} = [\phi_n] \{Y_n(t)\} + [ K^A(\omega_n) ] \{P(t)\} \quad (28)$$

위식의 양변을 Fourier transform 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{F_v(\omega)\} = [\phi_n] \{F_{Y_n}(\omega)\} + [ K^A(\omega_n) ] \{F_P(\omega)\} \quad (29)$$

이 식에  $F_{Y_n}(\omega) = H_n(\omega) F_{P_n}(\omega) = H_n(\omega) \{\phi_n\}^T F_P(\omega)$ 의 관계식을 대입 하여 정리 하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{F_v(\omega)\} &= [\phi_n] [ H_n(\omega) ] [\phi_n]^T \{F_P(\omega)\} + [ K^A(\omega_n) ] \{F_P(\omega)\} \\ &= [ [\phi_n] [ H_n(\omega) ] [\phi_n]^T + [ K^A(\omega_n) ] ] \{F_P(\omega)\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{여기서, } [ [\phi_n] [ H_n(\omega) ] [\phi_n]^T + [ K^A(\omega_n) ] ] = [ A_a(\omega, \omega_n) ]$$

으로 놓으면 다음과 같이 간략하게 쓸 수 있다.

$$\{F_v(\omega)\} = [ A_a(\omega, \omega_n) ] \{F_P(\omega)\} \quad (31)$$

위의 식과 spectral density function 의 정의에 의해서 應答 spectrum  $S_{vv}(\omega)$  는 다음과 같이 간단한 식으로 유도 된다.

$$[S_{vv}(\omega)] = [ A_a(\omega, \omega_n) ] [S_{PIP_j}(\omega)] [ A_a(\omega, \omega_n) ]^T \quad (32)$$

이렇게 하여 應答 spectrum이 계산 되면 이후 과정은 MSM에서와 같이 계산 할 수 있다. 위의 식은 MAM에서 사용되는 (21) 식과 비교하여 볼 때 대단히 간단한 식이 된다.

## 5. 數值 例 解析 및 檢討

### 5.1 解析 一般 過程

예제 해석으로는 남해대교를 택하여 평균 風速이 15.5, 25.5, 35.5 m/sec 인 경우에 이에 의하여 生成되는 風力을 spectrum으로 계산하여 周波數 領域에서 Mode Superposition Method(MSM), Mode Acceleration Method(MAM) 및 Advanced Mode Acceleration Method(AMAM)의 3가지 方法에 의해



우드가 포함될때 까지 단계별 수렴 과정을 검토 하였으며 이와 같은 방법으로 이루어진 數值 解析 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

1. 使用하는 모우드 수를 증가 시켜감에 따라 MSM, MAM 및 AMAM에 의한 數值 解析의 結果는 서로 잘 일치하고 있다.
2. MSM에 비하여 MAM에 의한 計算이 복잡하고 많은 spectrum식이 요구되나 使用 되는 모우드 수를 대폭 줄여도 정확한 값으로의 수렴 速度가 매우 우수함을 확인할 수 있었다.
3. MAM에 의한 方法이 복잡하고, 난해하여 그 短點을 보완하여 제시 한 AMAM 方法은 식이 훨씬 간단하고 計算 時間에 있어서 MAM 방법 보다 더욱 우수한 방법임을 알 수 있었다.

## 7. 참고문헌

1. Abdel-Ghaffar, A.M., "Vertical Vibration Analysis of Suspension Bridges.", J. of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No.ST10, October, 1980.
2. Anagnostopoulos, S.A., "Wave and Earthquake Response of Offshore Structures: Evaluation of Modal Solutions.", J. of Structural Division, ASCE, Vol.108, No.ST10, October, 1982.
3. Clough, R.W., and Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1975.
4. Cornwell, R., Craig, R.R., and Johnson, C.P., "On the Application of the Mode-Acceleration Method to Structural Engineering Problems.", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.11, 679-688, 1983.
5. Craig, R.R., Structural Dynamics An Introduction to Computer Methods, John Wiley & Sons, 1981.
6. Leger, P., and Wilson, E.L., "Modal Summation Methods for Structural Dynamic Computations.", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.16, 23-27, 1988.
7. Simiu, E., and Scanlan, R.H., Wind Effects on Structures, John Wiley & Sons, 1986.
8. 建設部, 南海大橋 建設誌, 1973.
9. 領南國土 建設局, 南海橋 設計報告書, 1968. 11.
10. 尹楨邦, 玄昌憲, 柳濟南., "랜덤 풍하중에 대한 현수교의 기하학적 비선형 거동의 동적 해석", 大韓土木學會 論文集, 第2卷, 第2號, 1988
11. 장승필, 장정환, 김호경, 주석범., "현수교의 동적 특성 파악을 위한 실교량 상시 진동 실험", 한국강구조학회 논문집, 제6권 제1호, 1994, 3.
12. 현창현, "현수교의 풍하중과 지진하중에 대한 추계론적 거동해석", 한국과학기술원, 박사학위논문, 1989. 5.
13. 김태남, "풍하중을 받는 현수교의 추계학적 진동: 비틀림 진동", 대한토목학회 논문집, 제16권, 제I-2호, 1996, 3

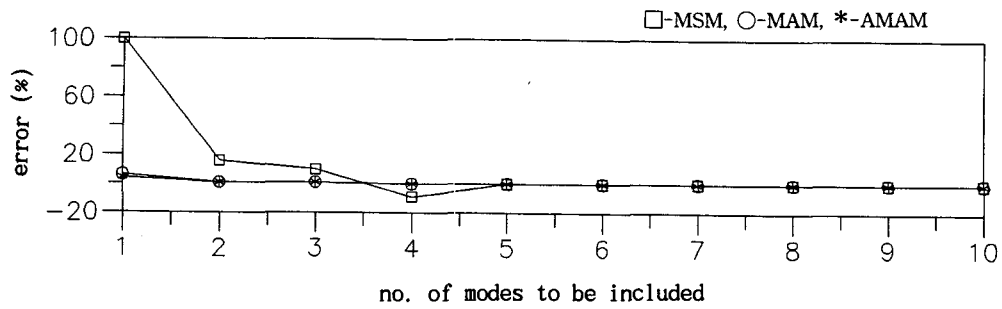


Fig.1 Convergence of displacement at node 2. (U=35.5)

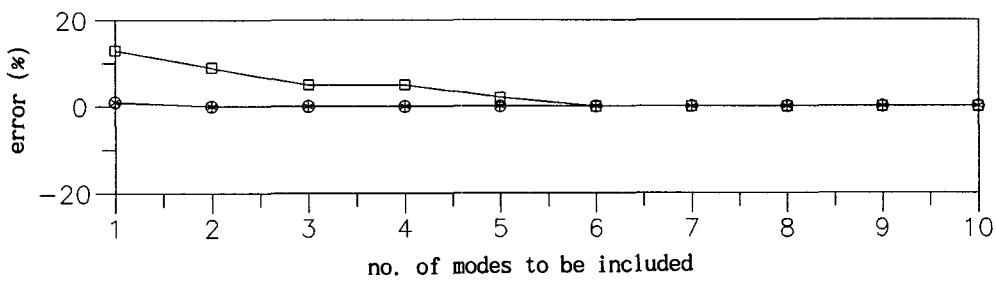


Fig.2 Convergence of displacement at node 6. (U=35.5)

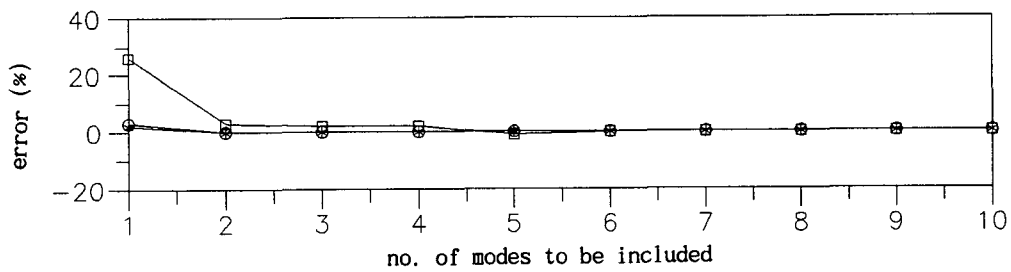


Fig.3 Convergence of displacement at node 9. (U=35.5)

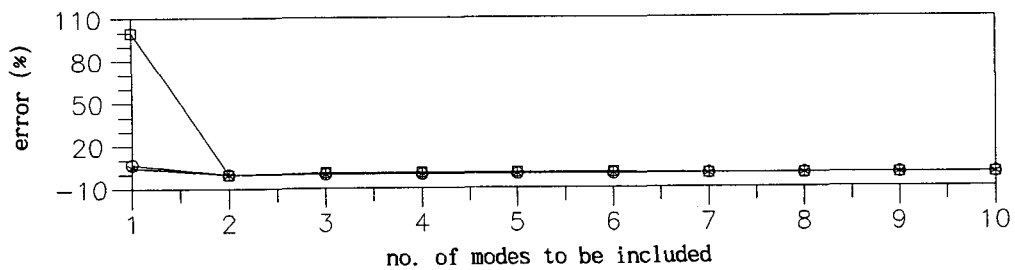


Fig.4 Convergence of displacement at node 12. (U=35.5)