

탄성지지된 복합재료 상판의 고유 진동수

Natural Frequency of Elastic Supported Building Slab

김 덕현¹⁾
Kim, Duk-Hyun

이 정호²⁾
Lee, Jung-Ho

박 정호³⁾
Park, Jung-Ho

ABSTRACT

A method of calculating the natural frequency corresponding to the first mode of vibration of beams and tower structures, with irregular cross-sections and with arbitrary boundary conditions was developed and reported by D. H. Kim in 1974. This method has been developed for two-dimensional problems including the laminated composite plates and was proved to be very effective for the plates with arbitrary boundary conditions and irregular sections.

In this paper, the result of application of this method to the subject problem is presented. This problem represents the building slabs with a kind of passive and active control devices. Any method may be used to obtain the deflection influence surfaces needed for this vibration analysis. Finite difference method is used for this purpose, in this paper. The influence of the modulus of the foundation on the natural frequency is thoroughly studied.

1. 서론

모든 대형 구조물의 설계 및 건설에서 문제가 되는 것은 자중의 증가에서 오는 건설비의 막대한 증가와 이론적인 치수의 한계이다. 예를 들어 현수교(사장교 포함)의 경우 강재를 사용할 때 가능한 이론적 최대 지간은 5000m~7000m이다. 즉 강재를 사용하는 한 이 이상의 지간 건설은 불가능하다는 이야기이다. 반면, 유리섬유 복합재료를 사용하면 이의 2배가 가능하고, 탄소 섬유 복합재료를 사용하면 이의 3배가 가능하다. 이 내용은 일찍이 1984년에 발표된 내용이다. 2주일 전 기술이 고물이되는 현재, 또 매월 수십(several scores) 종류의 신소재가 나오는 현재, 새로운 소재를 사용할 때 일어나는 변화는 상상하기조차 힘들다.

고층건물 설계 건설도 예외는 아니어서, 경량화를 하지 않는 한 층고의 한계에 부딪치고 막대

* KOREA COMPOSITES

** 강원대학교 토목공학과 박사과정

*** 강원대학교 토목공학과 석사과정

한 건설비의 증가를 초래하게 된다. 이 문제의 해결을 위해 첨단 복합 재료가 사용되어야 함은 설명이 필요 없다고 본다. 이럴 경우 치수효과를 고려한 강도 이론, 최적화 설계 및 제작 공정 등 토의 및 연구되어야 할 과제가 많지만, 본 논문에서는 대표적 건물 상판의 동일 작용 활하중을 견디는 콘크리트와 복합재료 상판의 몇 가지 형태의 무게비와 처짐비를 검토하고, 단성지지된 경우의 고유 진동수를 구하는데 국한하였다. 구조물의 강도 측정이나 유지 보수등 결정에 고유 진동수가 사용되는데, passive 또는 active control용 장비의 많은 종류는 이론적으로 단성지지된 것과 같이 작용한다. 흔히 현장 측정치와 설계도면에 의한 이론치와 비교하여 강도의 감소 유무를 결정하는데, 이 발표 논문 제목과 같은 문제 해결은 상당한 어려움이 있다.

불규칙단면을 갖는 보와 타워의 제 1모드에서의 고유진동수를 구하는 정확한 방법은 1974년 김덕현에 의해 발표되었다. 최근 이 방법은 복합판을 포함하는 2차원 문제로 확장되었으며, 전단변형의 영향에 따른 다양한 경계조건을 갖는 복합재료판에도 적용되었으며, 1990년의 제8회 ASCE(American Society of Civil Engineers)를 포함한 여러 국제학술회의에서 발표되었다.

이 논문에서는 표제의 문제 해결을 위해 김덕현의 방법을 이용하였으며 이 방법에 필요한 변위의 영향면은 유한 차분법으로 구했다. 특별지교 복합판의 휨에 대한 지배방정식은 처짐 w 에 관한 4차의 단일 미분항을 갖는다. 따라서 중심차분법을 사용한다 하더라도 소요되는 pivotal point의 수가 5개가 되므로, 가상점을 소거시키는데 계산상 번잡을 일으킨다. 그러나 평형방정식을 3개의 종속변수 w, M_x, M_y 를 가진 2차 연립편미분 방정식으로 나타낼 수 있다. 그래서 이 3개의 방정식을 풀게 되면 최종적으로 처짐과 모멘트를 한 번에 구할 수 있는 장점이 있다. 차분법에 의한 matrix는 경계조건 등을 포함하고 방대한 크기가 되는데, tri-diagonal matrix해법으로 간단히 계산될 수 있다.

2. 이 논문에 사용된 이론

2.1. 유한 차분법

경계 조건이 단순지지일 경우 Navier 해법을 사용할 수 있다. 그러나 단순지지나 아니거나 변단면 동일 경우는 쉽게 해결되지 않는다. 공학적으로 충분히 정확하고도 비교적 쉽게 해결할 수 있는 방법이 유한 차분법이다. 이 논문에서는 유한 차분 모형을 사용하여 처짐 영향계수를 구하였다.

2.2. 사용된 진동 이론

고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇 개의 점에서 최대 처짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i,j)(1) = W(i,j)(1). \quad (1)$$

여기서 (i,j) 는 고려한 점을 나타낸다.

이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한(최대) 진폭에 대응하는 동적힘은

$$F(i,j)(1) = -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \quad (2)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 “새로운” 변위는 F의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} w(i,j)(2) &= f \{ m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \\ &= \sum \Delta(i,j,k,1) \{ -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다.

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)(1)$ 과 $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1)/w(i,j)(2) = 1. \quad (4)$$

이 방정식으로 부터 (i,j) 의 각 점에서의 $\omega(i,j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i,j)$ 의 충분한 같은 값이 모든 (i,j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선 될 수 있다.

2번째 cycle의

$$w(i,j)(3) = f \{ m(i,j)[\omega(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2) \} \quad (5)$$

에서 $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. Composite 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 간단하지 않은 지지조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판을 몇개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다.

첨가질량의 영향은 각각의 mass point에서 처짐의 영향면에 첨가질량을 곱함으로써 얻을 수 있다. 처짐 영향면을 얻는 것은 패널의 설계와 해석에 있어서 첫 번째 단계이다. 이러한 값들을 얻기위해서 여러 방법이 사용되어질 수 있다. 예로 거더와 가로보를 갖는 교량 격자구조의 경우에 있어서 F. Leonhardt(1950), H. Homberg(1951,1956), C. Massonnet(1954), N. Watanabe(1965), 김덕현(1972) 등에 의한 방법 및 테이블이 사용될 수 있다.

3. 수치 해석

3.1. 프로그램의 오차 계산

임의의 경계조건을 갖는 판에 대한 해석해가 없기 때문에 부득이하게 네변이 모두 단순지지 되었을 경우의 Navier해법과 비교하였다.

고려된 특별직교이방성 적층판의 물성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 67.36 \text{ Gpa}, & E_2 &= 8.12 \text{ Gpa}, & G_{12} &= 3.0217 \text{ Gpa}, \\ \nu_{12} &= 0.272, & \nu_{21} &= 0.0328 & r &= 1. \end{aligned}$$

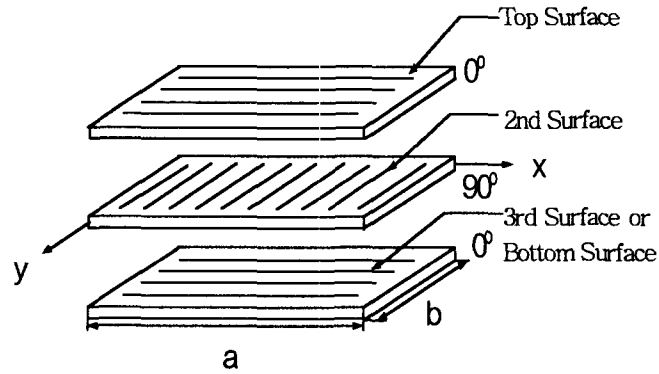


그림 1. $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]_r$ Special orthotropic laminated plate

여기에 등분포 활하중 1N/m^2 를 재하하여 각 점의 처짐값을 구하여 Navier 해와 비교하여 표 1.에 나타내었다. 한 개의 ply두께는 0.00125m , 판의 형상은 $7.5\text{m} \times 6\text{m}$ 로 하였다. 요소의 수는 10×10 으로 분할하여 mesh중양점의 처짐값을 비교하였다.

표 1. Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비(10×10 mesh size)

| | | F. D. M/NAVIER | | | | |
|------|--|----------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| Y(m) | | 0.75 | 2.25 | 3.75 | 5.25 | 6.75 |
| X(m) | | | | | | |
| 0.6 | | 0.1005+01 | 0.1003+01. | 0.1003+01 | 0.1003+01 | 0.1005+01 |
| 1.8 | | 0.1001+01 | 0.9998+00 | 0.9994+00 | 0.9998+00 | 0.1001+01 |
| 3.0 | | 0.1001+01 | 0.9993+00 | 0.9989+00 | 0.9993+00 | 0.1001+01 |
| 4.2 | | 0.1001+01 | 0.9998+00 | 0.9994+00 | 0.9998+00 | 0.1001+01 |
| 5.4 | | 0.1005+01 | 0.1003+01 | 0.1003+01 | 0.1003+01 | 0.1005+01 |

3.2. 수치해석

수치해석 예로 그림 2와 같은 사변 탄성지지된 빌딩 슬래브를 고려하였다.

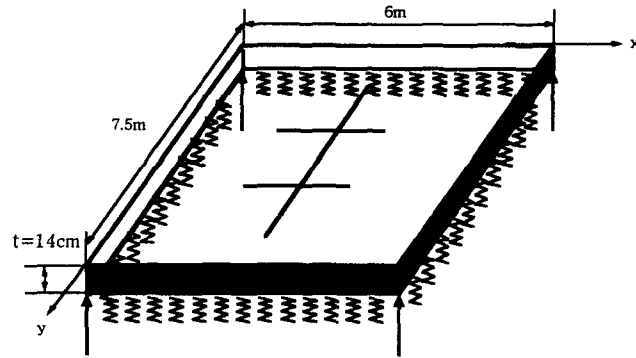


그림 2. Building slab

길이는 7.5m이고 폭은 6m이다. 슬래브의 각 모서리는 기둥에 지지되어 있고, 사변이 탄성지지 되었다고 보았다. 이때 스프링 상수 k 는 10MN/m^2 에서 60MN/m^2 까지 변화시켜 보았다.

철근 콘크리트 슬래브

$\sigma_{ck} = 210\text{kg/cm}^2 = 20.5942926\text{MPa}$, $E_c = 15000\sqrt{\sigma_{ck}} = 21.317118060\text{GPa}$, 콘크리트의 프와송비는 $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.18$ 이고 콘크리트의 사하중은 $= 2.5t/\text{m}^2 = 24500\text{Pa}$ 이다.

콘크리트 슬래브에서는 힘에 대한 인장 철근만 고려하였으며, 이때 시방서 규정에 근거한 종방향 철근과 횡방향 철근의 단위 폭당 철근의 배치를 그림 3에 나타내었다.

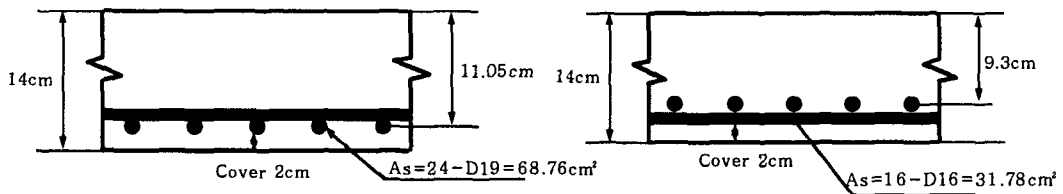


그림 3. Cross section of concrete slab with unit width

샌드위치 패널 슬래브

64kg/m³의 자중을 가지는 Form 코어를 사용하였으며, 상·하 [A, B, A]형태의 적층판을 사용하였다. 여기서 A = 0°, 이고 B = 90°이다. 사용된 물성치는 프로그램 오차 계산시 사용된 물성과 같다. 5개 형태의 샌드위치 판이 검토 되었다.

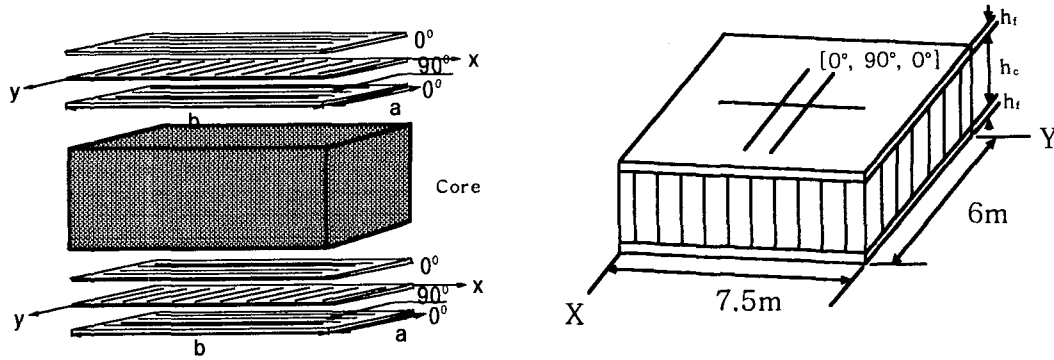


Fig.4 Sandwich panel slab

콘크리트 슬래브와 5개 형태의 샌드위치 패널 슬래브의 강성을 표1.에 나타내었다.

표 2. Flexural stiffness (Unit : N · m)

| Type | | Concrete | Sandwich | | | | |
|-----------------------------|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Stiffness | | | Type 1 | Type 2 | Type 3 | Type 4 | Type 5 |
| Height (m) | h _c | 0.14 | 0.4630 | 0.3550 | 0.2980 | 0.2620 | 0.2370 |
| | h _f | | 0.0011 | 0.00185 | 0.00265 | 0.00335 | 0.00415 |
| Weight (kg/m ²) | Core | 350 | 29.632 | 22.72 | 19.072 | 16.768 | 15.168 |
| | Face | | 4.29 | 7.215 | 10.335 | 13.065 | 16.185 |
| D ₁₁ | | 5381013.5 | 3502847.56 | 3451719.17 | 3429166.23 | 3435699.65 | 3466960.02 |
| D ₂₂ | | 2155713.75 | 2259821.97 | 2226836.81 | 2212286.77 | 2216501.47 | 2236668.48 |
| D ₁₂ | | 906163.38 | 264367.24 | 260508.46 | 258806.33 | 259299.41 | 261658.68 |
| D ₆₆ | | 2064038.75 | 501641.71 | 494319.60 | 491089.78 | 492025.41 | 496502.17 |

위 계산된 휨강성 값들을 사용하여 사변 단성 지지된 빌딩 슬래브의 영향면을 계산하고 김덕현의 방법으로 고유진동수를 계산하였다. 이때 하중은 자중과 일반 빌딩 사무실의 전형적인 점유하중인 2.4kN/m²을 고려하였으며, 기둥의 강성은 무한대로 하였다. 이 수치계산의 결과는 표 3.과 표 4.에 나타내었다.

표 3. 콘크리트에 대한 샌드위치의 처짐비(Sandwich/Concrete)

| k \ 자중비 | Type 1 | Type 2 | Type 3 | Type 4 | Type 5 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 10.29 | 11.65 | 11.94 | 11.69 | 11.20 |
| 10 MN/m ² | 0.6889 | 0.6867 | 0.6884 | 0.6889 | 0.6873 |
| 20 MN/m ² | 0.7946 | 0.7932 | 0.7961 | 0.7961 | 0.7939 |
| 30 MN/m ² | 0.8457 | 0.8441 | 0.8473 | 0.8481 | 0.8449 |
| 40 MN/m ² | 0.8757 | 0.8749 | 0.8783 | 0.8792 | 0.8757 |
| 50 MN/m ² | 0.8968 | 0.8959 | 0.8995 | 0.8995 | 0.8959 |
| 60 MN/m ² | 0.9103 | 0.9099 | 0.9133 | 0.9133 | 0.9102 |

* 처짐비=샌드위치 처짐/콘크리트 처짐 [하중(L+D) 작용시 중앙점]

* 자중비=콘크리트 자중/샌드위치 자중

표 4. Natural Frequency (Unit : rad/sec)

| Type \ k | Concrete | Type1 | Type2 | Type3 | Type4 | Type5 |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 10 MN/m ² | 0.6029E+01 | 0.7425E+01 | 0.7437E+01 | 0.7429E+01 | 0.7426E+01 | 0.7433E+01 |
| 20 MN/m ² | 0.6974E+01 | 0.7948E+01 | 0.7955E+01 | 0.7943E+01 | 0.7941E+01 | 0.7953E+01 |
| 30 MN/m ² | 0.7399E+01 | 0.8146E+01 | 0.8151E+01 | 0.8138E+01 | 0.8135E+01 | 0.8149E+01 |
| 40 MN/m ² | 0.7640E+01 | 0.8250E+01 | 0.8253E+01 | 0.8239E+01 | 0.8237E+01 | 0.8252E+01 |
| 50 MN/m ² | 0.7796E+01 | 0.8314E+01 | 0.8316E+01 | 0.8302E+01 | 0.8300E+01 | 0.8315E+01 |
| 60 MN/m ² | 0.7905E+01 | 0.8357E+01 | 0.8359E+01 | 0.8344E+01 | 0.8281E+01 | 0.8358E+01 |

복합재료의 인장 및 압축 강도는 콘크리트에 비해서 월등히 강하므로, 상판의 재하능력 비교는 변위로 평가 되었다. 표 3.을 보면 샌드위치 상판이 무게가 콘크리트 무게의 1/10 이하이지만 모든 형태의 것의 처짐은 모든 k값의 경우에 콘크리트의 처짐보다 작다. 표 4.를 보면, 모든 형태의 샌드위치 판의 고유 진동수가 모든 k값의 경우에 콘크리트의 값 보다 크다. 이것은 고려된 모든 형태의 샌드위치 판이 콘크리트 판보다 높은 강성을 갖고 있음을 의미한다.

4. 결론

이 논문에서는 김덕현에 의해 개발된 정확하고 간편한 진동 해석 방법을 소개하고, 이 방법을 탄성지지원 복합재료판에 응용한 결과가 주어져 있다. 건물의 대표적 상판 크기를 고려하고, 콘크리트 상판도 복합재료 개념으로 취급하고, 다섯 가지 형태의 복합재료 샌드위치 판을 고려하였다. 시방서에 의한 활하중 2.4kN/m²이 작용할 때, 모든 샌드위치 판의 변위가 콘크리트 판의 것 보다 작다. 또 모든 샌드위치 판의 고유 진동수는 콘크리트의 것보다 높다. 즉 높은 “강성”을 갖고 있음을 의미한다. 이때 모든 샌드위치 판들의 무게는 콘크리트 무게의 10분의 1보다 작다. 복합

재료 인장 및 압축 강도가 콘크리트와는 비교할 수 없게 높다는 것을 염두에 두면 적은 변위 높은 진동수는 선택된 샌드위치판이 콘크리트 판보다 구조적으로 강함을 나타낸다. 즉 콘크리트 무게의 10분의 1로 콘크리트보다 강한 구조가 가능한 것을 의미한다. 진동해석에 필요한 변위의 영향면은 유한 차분법으로 구하였다.

5. 참고 문헌

1. Kim Duk Hyun, "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Members", 제 1차 산업기지 건설을 위한 국제회의, 서울, 1974, 10.
2. Kim, D. H., Park, J. S., & Kim, K. J., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates II", JISSE2, Tokyo, 1991. 12.
3. Kim, D. H., "Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type," 16th Congress of Applied Mechanics, Tokyo, Japan, 1966. 10. 19.
4. Kim D. H., "The Effect of Neglecting the Radial Moment Terms in Analyzing a Finite Sectorial Plate by Means of Finite Differences," International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, 1967. 5.
5. 김덕현, "電子計算器에 의한 超大型 Matrix의 解法," 大韓土木學會誌, 15卷 1號, 1967
6. Kim D. H., Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, E&FN SPON, Chapman & Hall, London, 1995.