

# PPC 구조의 최소경비설계를 위한 DCOC방법의 응용

## Application of DCOC for Minimum Cost Design of PPC Structures

조 홍 등\*                      이 상 근\*                      구 봉 근\*\*                      한 상 훈\*\*  
Cho, Hong-Dong              Lee, Sang-Kuen              Koo, Bong-Kuen              Han, Sang-Hoon

### ABSTRACT

This paper describes the application of discretized continuum-type optimality criteria (DCOC) for the multispan partially prestressed concrete beams. The cost of construction as objective function which includes the costs of concrete, prestressing steel, non-prestressing steel and formwork is minimized. The design constraints include limits on the maximum deflection, flexural and shear strengths, in addition to ductility requirements, and upper and lower bounds on design variables as stipulated by the design code. Based on Kuhn-Tucker necessary conditions, the optimality criteria are explicitly derived in terms of the design variables-effective depth, eccentricity of prestressing steel and non-prestressing steel ratio. The prestressing profile is prescribed by parabolic functions. The self-weight of the structure is included in the equilibrium equation of the real system, as is the secondary effect resulting from the prestressing force. Two numerical examples of multispan PPC beams with rectangular cross-section are solved to show the applicability and efficiency for the DCOC-based technique.

### 1. 서론

구조최적화는 크게 수학적계획방법들을 이용한 수치적기법과 최적성기준에 근거한 해석적기법의 두 갈래로 발달되어왔다. 일반적으로 수치적 방법들은 설계변수와 제약조건의 수가 제한적일 경우 해석적 방법들보다 좀 더 효율적이라고 알려져 있다. 그러나, 설계변수의 수가 증가하게 되면 최적해에 도달하기 위해 재설계과정에 요구되는 시간 그리고 구조 재해석의 수가 증가하게 되어 수치적 구조최적화방법들의 능력에 제한을 받게 된다. 일반적으로 설계변수와 제약조건의 수가 많게 되면 최적성 기준에 근거를 둔 해석적 방법들이 보다 효율성을 갖게 된다. 이러한 점은 응력제약들과 하나의 변위제약을 갖는 문제들에 연속형 최적성기준(Continuum-type Optimality Criteria, COC)방법과 유한요소해석을 연결하여 반복알고리즘을 개발한 Rozvany와 Zhou<sup>1)</sup>, 그리고 이를 철근 콘크리트 보의 최소경비설계에 응용한 Adamu와 그의 공동연구자들<sup>2)</sup>에 의해 입증되었다. 그러나, COC에 근거한 방법들은 이산성향을 지닌 복잡한 구조물의 가상수반(adjoint)시스템의 해석에서 기변형률 효과(prestrain effect)를 다루는데 어려움이 있기 때문에 실제 적용성이 결여되었고, 간단한 구조물에만 제한되어 적용되었다.

이러한 제한적 요소를 제거하기 위하여 이산성 연속형 최적성기준(Discretized Continuum-type Optimality Criteria, DCOC)에 근거한 방법들이 Zhou와 Rozvany<sup>3,4)</sup>에 의해 개발되었다. 그들은 이산성

\* 충북대학교 대학원 토목공학과 박사과정

\*\* 충북대학교 공과대학 토목공학과 교수, 공학박사, 정회원

구조시스템에 대한 일반적인 최적성규준을 유연도정식화에 의한 구조해석과 Khun-Tucker 최적성 조건을 이용하여 유도하였다. 그러나, 실제 수치과정에서 구조해석은 보다 효율적인 강성도법을 이용하여 수행되고 있다. Adamu와 Karihaloo<sup>5,6)</sup>는 강성도법에 의한 구조해석과 Khun-Tucker 최적성조건을 이용하여 철근콘크리트보 시스템을 위한 최적화 알고리즘을 개발하였으며 이 방법의 효율성과 적용성을 입증하였다.

본 연구에서는 단지간 PPC구조의 적용가능 연구<sup>7)</sup>에 이어 이산성 연속형 최적성규준방법을 직사각형 단면을 갖는 다지간 부정정 부분 프리스트레스트 콘크리트(Partially Prestressed Concrete, PPC)보에 확장·적용하였다. 최적성규준과 수치알고리즘이 다지간 PPC보의 최소경비설계문제를 풀기 위해 유도되었다. 여기서, 사용된 설계변수로는 보의 유효깊이(단, 지간에 따라 변화를 고려하면서 동일 지간내에선 일정), 매개변수를 포함하여 포물선 형상으로 가정한 긴장재의 최대편심거리, 그리고 지간내에서 요소에 따라 자유롭게 변하는 것을 허용한 철근비로 취하였다.

목적함수는 콘크리트 경비, 긴장재 경비, 그리고 철근과 거푸집 경비를 포함하는 건설비용이며, 제약조건으로는 주어진 지간에서의 최대허용처짐 그리고, 콘크리트 표준 시방서<sup>8)</sup>에 의한 휨과 전단강도 제약 및 연성제약을 고려하였다. 한편, 자중과 긴장력에 의한 이차 효과들의 영향은 실제 시스템의 해석에서 고려하였다. 다지간 PPC보에 대한 최적성규준의 유도에 있어서 처짐제약은 항상 활성제약인 것으로 가정하였다. 또한 설계변수들의 개선을 위한 반복과정을 유도하였다.

## 2. 최적설계문제

### 2.1 설계변수

설계변수는 각 지간에서의 보 단면의 유효깊이  $x_2^m$ , 긴장재의 최대 편심거리  $x_3$ , 그리고 보 요소별 철근비  $x_4^{em}$ 로 취하였다. 단면의 폭  $x_1$ , 긴장재의 단면적  $A_p$ , 그리고 매개변수  $\beta$  (그림 1 참조)는 상수값이며, 이들은 프로그램의 입력자료로 주어지고, 최소 경비에 상응하는  $\beta$  값을 구하였다. 각 지간에서의 긴장재비(tendon steel ratio)  $x_4^m$ 은  $A_p = x_1 x_2^m x_4^m$ 의 관계식으로부터 계산하였다. 상첨자  $em$ 은 지간  $m$ 의 요소  $e$ 에 관한 설계변수임을 가리키고, 상첨자  $m$ 은 지간  $m$ 에서 일정하게 유지되는 설계변수임을 나타낸다.

### 2.2 긴장재 형상

등분포하중 재하시의 긴장재 형상은 포물선 형상으로 가정하였다. 지지조건에 따라 형상은 그림 1(a)~(c)와 같은 세 가지 유형들로 구성되며 다음과 같이 표현될 수 있다.

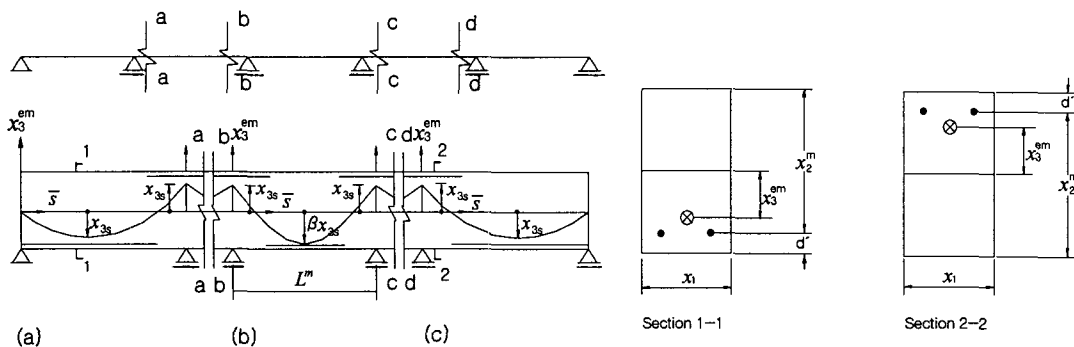


그림 1 다지간 PPC보 : (a) Type A-좌측단부에 단순지지된 외측지간, (b) Type B-내측지간, (c) Type C-우측단부에 단순지지된 외측지간 [  $\bar{s}$  와  $x_3^{em}$ 의 원점은 각 지간의 좌측단부임 ]

## 2.3 주요단면력의 결정

### 2.3.1 휨강도 요구조건을 위한 최대설계모멘트

설계를 위한 최대휨모멘트는 다음과 같으며,

$$M_{max}^{em} = M_{dl}^{em} + M_{pxm}^{em} \quad (1)$$

여기서,  $M_{dl}^{em}$  은 외부설계하중에 의한 최대모멘트이고,  $M_{pxm}^{em}$  은 최대모멘트 발생 단면에서 긴장력에 의한 2차모멘트이다.

### 2.3.2 복부파괴에 대한 최대설계전단력

최대전단력은 다음과 같으며,

$$V_{max}^{em} = V_{Al}^{em} - \omega_d^m s_v^{em} + \frac{M_l^m + M_r^m}{L^m}, \quad \begin{cases} M_l^m = M_{AE}^{1m} + Pe_l \\ M_r^m = M_{BE}^{4m} - Pe_r \end{cases} \quad (2)$$

여기서,  $M_{AE}^{1m}$  와  $M_{BE}^{4m}$  는 각각 임의의 지간 내에서 첫 번째 요소의 좌측단 그리고 네 번째 요소 ( $N_e = 4$ ) 의 우측단에서의 절점 휨모멘트이다.  $P$  는 긴장력이고,  $e_l$  과  $e_r$  은 지간  $m$  의 좌측과 우측단에서의 편심거리이다.

## 2.4 목적함수

$N_m$  개의 지간을 갖고 각 지간은  $N_e$  개의 요소로 나누어진 다지간 보에 대한 목적함수는 건설경비로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \phi^{em}(x_2^m, \bar{x}_{3a}, x_5^{em}) \quad (3)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \phi^{em} &= \left[ x_2^m m_1 + x_2^m x_5^{em} m_2 + m_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{x}_{3a}}{L^m} \right) + \bar{c}_1 \right] L^{em} \\ m_1 &= (x_1 + 2c_{fc})c_c & m_2 &= x_1(c_{sc} - 1.0)c_c \\ m_3 &= 2A_p(c_{pc} - 1.0)c_c & \bar{c}_1 &= c_1[x_1 d' + (x_1 + 2d')c_{fc}]c_c \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.5 설계제약조건

### 2.5.1 처짐제약

PPC보의 처짐계산을 위한 지간의 각 요소에서의 휨강성도는 다음과 같은 간편식<sup>5)</sup>을 사용하였다.

$$EI^m = I_1(x_2^m)^3, \quad \text{여기서, } I_1^m = 0.045E_c x_1 \quad (5)$$

처짐 제약은 다음과 같이 표현된다.

$$D_{max} - \Delta_{al} \leq 0, \quad \text{여기서, } D_{max} = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{I_1(x_2^m)^3} \quad (6)$$

## 2.5.2 휨강도제약

본 연구에서는 극한휨강도만을 고려하였으며, 휨강도 제약은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_f^{em} = \frac{|M_{ur}^{em}|}{M_{ur}^{em}} - 1.0 \leq 0 \quad (7)$$

여기서,

$$M_{ur}^{em} = \phi_m \left[ \sigma_{ps} A_p \left( d_p - \frac{a}{2} \right) + \sigma_y A_s \left( d - \frac{a}{2} \right) \right]$$

## 2.5.3 전단강도제약

전단강도제약(복부파괴에 대한 전단강도 제약만을 고려)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_s^{em} = \frac{|V_{ur}^{em}|}{V_{ur}^{em}} - 1.0 \leq 0, \quad (8)$$

여기서,

$$V_{ur}^{em} = 0.93 \phi_v \sqrt{\sigma_{ck}} x_1 x_2^m$$

## 2.6. 증대 라그랑지안 함수

하나의 변위제약과 여러개의 강도제약 및 한계제약을 갖는 최적화 문제의 증대 라그랑지안(augmented lagrangian)함수는 다음과 같다.

Minimize  $\bar{\Phi} =$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \phi^{em} + \mu \left[ \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left( \frac{Q_1^{em} + Q_2^{em}}{l_2^{em} (x_2^m)^3} \right) - \Delta_{al} + \eta \right] \\ & + \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{em} [g_j^{em} + \omega_j^{em}] \\ & + \{\alpha^v\}^T [\{P\} - [B]\{F\}] + \{\alpha^v\}^T [\{\bar{P}^v\} - [B]\{\bar{F}_j\}] \\ & + \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_s} \beta_i^{em} (-x_i^{em} + x_{il}^{em} + t_i^{em}) + \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_t} \gamma_i^{em} (x_i^{em} - x_{iu}^{em} + \bar{t}_i^{em}) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $\mu$ ,  $\lambda_j^{em}$ ,  $\{\alpha^v\}$ ,  $\{\alpha^v\}$ ,  $\beta_i^{em}$ , 그리고  $\gamma_i^{em}$ 들은 라그랑주 승수들이고,  $\eta$ 는 일정한 슬랙(slack)변수이며,  $\omega_j^{em}$ ,  $t_i^{em}$ ,  $\bar{t}_i^{em}$ 들은 슬랙함수들이다. 식 (9)의 우변의 네 번째와 다섯번째 항은 각각 실제와 가상시스템의 평형방정식을 나타낸다.

## 3. 반복과정

### 3.1 최적성기준

1) 각 시간  $m$  ( $m=1, \dots, N_m$ )에서  $x_2^m$ 에 대한  $\bar{\Phi}$ 의 변분

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_2^m} - \frac{3\mu(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_1 (x_2^m)^4} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{ur}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2^m} \right. \\ & \left. - \lambda_2^{em} \frac{|V_{ur}^{em}|}{(V_{ur}^{em})^2} \frac{\partial V_{ur}^{em}}{\partial x_2^m} + \mu \bar{u}_c^{em} \right\} - (\beta_2^{em} - \gamma_2^{em}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

2)  $x_{3s}$ 에 대한  $\Phi$ 의 변분

$$\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_{3s}} + \frac{\mu}{l_1(x_2^m)^3} \frac{\partial Q_2^{em}}{\partial x_{3s}} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_{3s}} - M_{ur}^{em} \frac{\partial |M_{max}^{em}|}{\partial x_{3s}} + \frac{\lambda_2^{em}}{V_{ur}^{em}} \frac{\partial |V_{max}^{em}|}{\partial x_{3s}} - (\beta_3^{em} - \gamma_3^{em}) \right\} = 0 \quad (11)$$

3) 시간  $m$ 의 각 요소에서  $x_5^{em}$ 에 대한  $\Phi$ 의 변분

$$\left\{ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_5^{em}} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_5^{em}} - (\beta_5^{em} - \gamma_5^{em}) \right\} = 0 \quad (12)$$

### 3.2 설계변수의 개선

시간별로 설계변수  $x_2^m$ 을 취하고 각 시간에서의 세 설계변수  $x_2^m$ ,  $x_3^m$ , 그리고  $x_5^{em}$ 의 배치를 조정하는 거동제약조건들의 가능한 조합은 다음과 같다.

- 1) 처짐과 휨강도제약의 조합 (D-F)
- 2) 처짐제약과  $x_5^{em}$ 의 하한치와의 조합 (D-L)
- 3) 휨강도와  $x_5^{em}$ 의 상한치와의 조합(F-U)
- 4) 전단강도제약과 휨강도제약과의 조합 (V-F)
- 5) 깊이  $x_2^m$ 의 하한치와 다른 제약과의 조합

이상의 조합들에서 최적성 기준을 통해 각각의 관련 설계변수에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

### 3.3 라그랑주승수와 고정단력계산

주지배 제약조건을 확인하기 위해 주설계변수로 시간의 보 깊이를 취하고 강도가 요소를 지배하는 경우에 대한 라그랑주승수들의 결정식 그리고 기변형률로부터 발생한 고정단력들은 다음과 같은 활성 제약조건들의 여러조합으로부터 고려하였다.

- 1) 처짐과 휨강도 제약조건이 설계를 지배하는 경우
- 2)  $x_{3s}$ 와  $x_5^{em}$ 의 상한치와 휨강도제약이 설계를 지배하는 경우
- 3) 전단력 제약조건과 다른 제약조건과의 조합이 설계를 지배하는 경우

결국, 라그랑주승수  $\mu$ 는 처짐제약조건으로부터 계산된다. 설계가 처짐에 의해 지배되는 시간들을  $N_m^D$ 로 나머지 시간들을  $N_m^L$ ( $N_m = N_m^D + N_m^L$ )로 표시하여 식(13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu^{\frac{3}{4}} = \frac{\sum_{N_m^D} \sum_{e=1}^{N_e} \{ (Q_1^{em} + Q_2^{em}) / [l_1 (\bar{x}_2^m)^{3/4}] \}}{\Delta_{al} - \sum_{N_m^L} \sum_{e=1}^{N_e} \{ (Q_1^{em} + Q_2^{em}) / [l_1 (x_2^m)^3] \}} \quad (13)$$

## 4. 수치예

수치예 적용시 각 시간은 4개의 요소로 나누었고( $N_e = 4$ ), 등분포하중 하에서 주어진 시간의 최대 처짐은 그 시간의 중간지점에서 발생한다고 가정하였다. 그리고, 다시간보에서 처짐제약조건들의 명시적 포함은 등가허용처짐 개념을 사용하여 수행하였다<sup>6)</sup>. 표 1은 수치예들에서 사용된 재료의 특성과 설계 데이터이다.

표 1 재료특성 및 설계데이터

재 료 특 성 치			상 대 경 비*
콘 크 리 트	철 근	긴 장 재	$c_{sc} = 95.89$ $c_{pc} = 42.78$ $c_{fc} = 0.12$
$\sigma_{ck} = 35\text{MPa}$ $E_c = 29800\text{MPa}$ $w_c = 24.5\text{KN/m}^3$	$\sigma_y = 400\text{MPa}$	$\sigma_{pu} = 1910\text{MPa}$ $\sigma_{py} / \sigma_{pu} = 0.91$	

\*)  $C_c = 53,210\text{원/m}^3$ ,  $C_p = 5,102,500\text{원/m}^3$ ,  $C_s = 2,276,500\text{원/m}^3$ ,  $C_f = 6,500\text{원/m}^2$ 로부터 산출된 상대 경비임.

4.1 3지간 PPC보

표 2 3지간 PPC보의 최소경비설계에 대한 매개변수 연구

$\beta$	$x_{20}$	$x_{3s}$	$x_{50}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{3s}$	$\phi_{int}$	$\phi_{opt}$	$\beta_{opt}$	$A_{s1}$	$A_{s2}$	$A_{s3}$	$A_{s4}$	$A_{s5}$	$A_{s6}$
	mm	mm		mm	mm	mm	mm				mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>
1.360	1000	200	0.005	747	956	831	293	17.421	15.448	1.360	535	535	535	2730	1854	1064
											F-L	F-L	F-L	F-U	D-F	D-F
1.360	1200	220	0.005	747	956	831	293	20.439	15.448		$A_{s7}$	$A_{s8}$	$A_{s9}$	$A_{s10}$	$A_{s11}$	$A_{s12}$
											mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>
1.360	1500	250	0.006	747	956	831	293	25.437	15.448	1.360	1064	2565	3179	846	925	925
											D-F	D-F	F-U	F-F	F-F	F-F

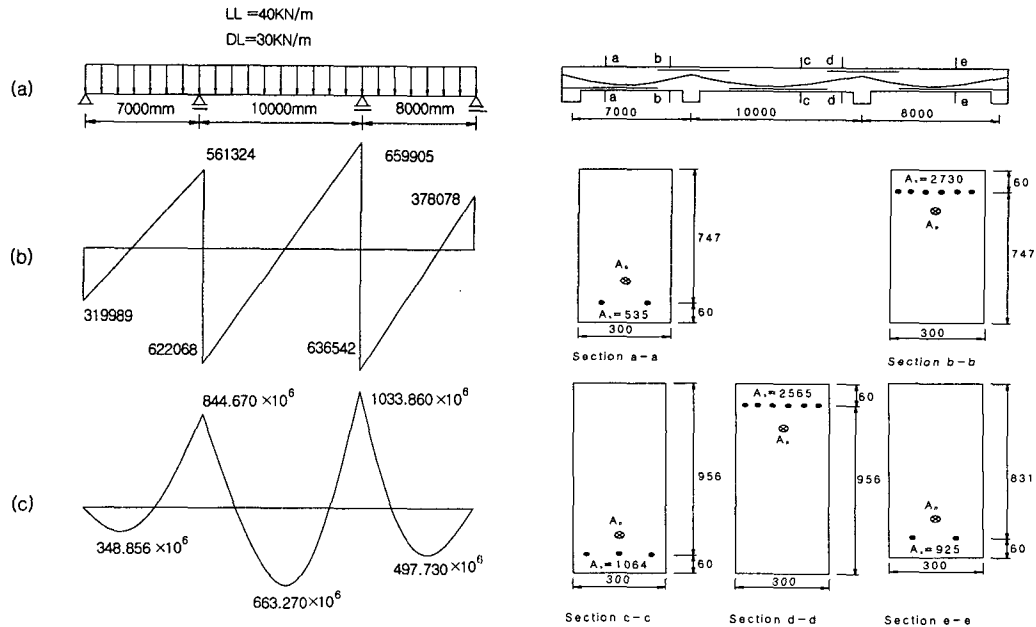


그림 2 3지간 PPC보의 최적단면에 대한 단면력 분포 : (a) 형상과 하중, (b) 전단력도(N), (c) 휨모멘트도(N-mm) [전단력과 휨모멘트는 프리스트레싱의 효과를 포함한다.]

## 4.2 4지간 PPC보

표 3 4지간 PPC보의 최소경비설계에 대한 매개변수 연구

$\beta$	$x_{20}$ mm	$x_{3s}$ mm	$x_{50}$	$x_{21}$ mm	$x_{22}$ mm	$x_{23}$ mm	$x_{24}$ mm	$x_{3s}$ mm	$\phi_{int}$	$\phi_{opt}$
1.320	2000	600	0.006	2153	2543	1919	1497	662	196.679	194.264
1.320	2200	620	0.006	2156	2540	1918	1487	662	214.020	194.248
1.320	2500	650	0.006	2159	2538	1918	1497	662	240.033	194.239

$\beta_{opt}$	$A_{s1}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s2}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s3}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s4}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s5}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s6}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s7}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s8}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s9}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s10}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s11}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s12}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s13}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s14}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s15}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s16}$ mm <sup>2</sup>	
1.320	2573	2573	2573	5521	4050	3246	3246	7056	11153	2821	2821	4732	7509	1420	1420	1420	
	D-L	D-L	D-L	D-F	D-F	D-L	D-L	D-F	F-U	F-F	F-F	F-F	F-F	F-U	F-L	F-L	F-L

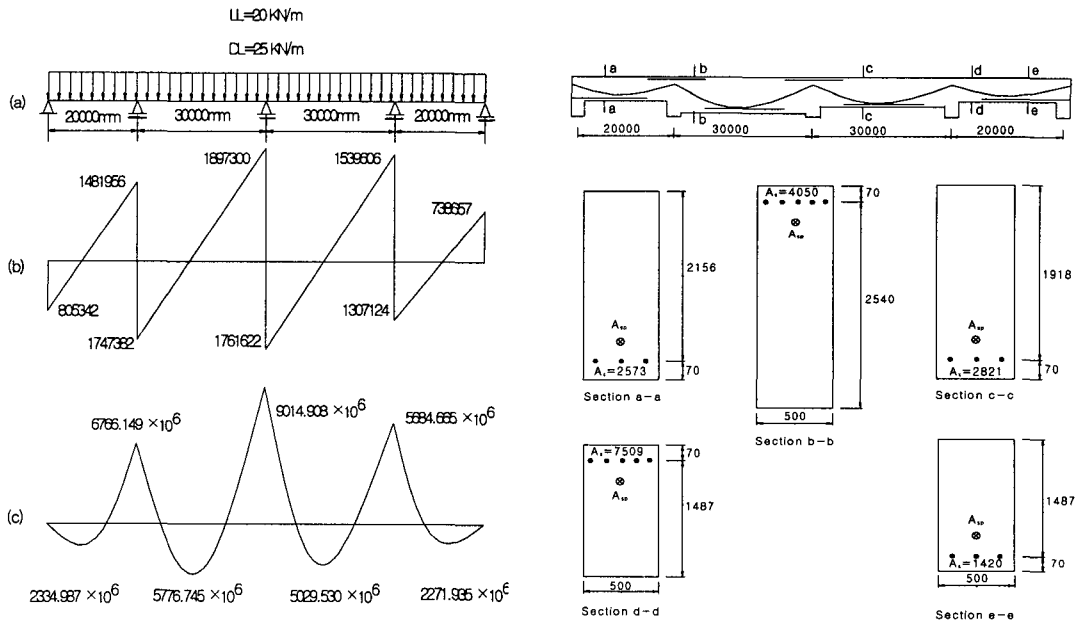


그림 3 4지간 PPC보의 최적단면에 대한 단면력 분포 : (a) 형상과 하중, (b) 전단력도(N), (c) 휨모멘트도(N-mm) [전단과 휨모멘트는 프리스트레싱의 효과를 포함한다.]

## 5. 결론

직사각형단면을 갖는 다지간 부분 프리스트레스트콘크리트보에 대한 최소경비설계를 위해 DCOC에 기초한 기법을 응용하였다. 목적함수와 설계제약조건들은 설계변수들로 구성된 고차의 비선형함수이다. 긴장재의 긴장으로 인한 단면력들의 2차효과에 대한 계산이 복잡하기 때문에 해석과정에서 고려될 수 있도록 하는 방법을 도입하였다. 그리고, 본 연구에서는 긴장재 형상을 3가지 형태의 포물선함수로 취하므로써 최적규준식들의 유도과정과 설계변수들의 개선과정에서 명시적인 표현이 가능하였다. 또한, 자중의 효과를 평형방정식에 포함하여 고려하였다. 다지간 부분프리스트레스트 콘크리트보의 설계를 위해 개발된 DCOC에 기초한 알고리즘의 다양성과 유효성을 보이기 위하여 실제적인 설계예들을 고려하였고, 매우 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

## References

1. Rozvany, G. I. N., and Zhou, M., Continuum-based Optimality Criteria (COC) Method : An Introduction. In; Rozvany, G. I. N. (ed) Optimization of Large Structural Systems. (Proc. NATO ASI, Berchtesgaden, Germany, 1991), Kluwer, Dordrecht, pp. 1~26, 1993.
2. Adamu, A., Karihaloo, B. L., and Rozvany, G. I. N., Minimum Cost Design of Reinforced Concrete Beams using Continuum-type Optimality Criteria, *Struct. Opt.*, 7, pp. 91~102, 1994.
3. Zhou, M., and Rozvany, G. I. N., DCOC : An Optimality Criteria Method for Large Systems, Part I : Theory, *Struct. Opt.*, 5, 12~25, 1992.
4. Zhou, M., and Rozvany, G. I. N., DCOC : An Optimality Criteria Method for Large Systems, Part II : Algorithms, *Struct. Opt.*, 6, pp. 250~262, 1993.
5. Adamu, A., and Karihaloo, B. L., Minimum Cost Design of RC Beams using DCOC, Part I : Beams with Freely-varying Cross-sections, *Structure. Opt.*, 7, pp. 237~251, 1994.
6. Adamu, A., and Karihaloo, B. L., Minimum Cost Design of RC Beams using DCOC, Part II : Beams with Uniform Cross-sections, *Struct. Opt.*, 7, pp. 237~259, 1994.
7. Han, S. H., Adamu, A., and Karihaloo, B. L., Application of DCOC to Optimum Prestressed Concrete Beam Design, *Eng. Opt.*, 25, (3), pp. 179~200, 1994.
8. 건설교통부, '콘크리트표준시방서', 대한토목학회, 1996.
9. Gilbert, R. I., and Mickleborough, N. C., Design of Prestressed Concrete, *Unwin Hyman, London*, 1990.
10. 신현목, "프리스트레스트 콘크리트", 동명사, 1997.