

3차원 케이블망의 정적 비선형 해석 및 초기 평형상태의 결정

Non-linear Static Analysis and Determination of Initial Equilibrium States of Space Cable Nets

김 문영* 김 남일**
Kim, Moon Young Kim, Nam Il

ABSTRACT

A geometrically non-linear finite element formulation of spatial cable networks is presented using three cable elements. Firstly, derivation procedures of tangent stiffness and mass matrices for the space truss element and the elastic catenary cable element, and the isoparametric cable element are summarized. The load incremental method based on Newton-Raphson iteration method and the dynamic relaxation method are presented in order to determine the initial static state of cable nets subjected to self-weights and support motions. Furthermore, static non-linear analysis of cable structures under additional live loads are performed based on the initial configuration. Challenging example problems are presented and discussed in order to demonstrate the feasibility of the present finite element method and investigate static non-linear behaviors of cable nets.

1. 서 론

전통적인 구조해석은 주로 미소 변위를 일으키는 구조물에 관심을 가져왔고, 이러한 구조물은 선형의 하중-변위관계를 나타내게 된다. 그러나 케이블 부재는 전체적인 형상에 영향을 미치는 대변형을 일으키는데 이러한 대변형은 하중-변위관계에서 기하학적 비선형성을 수반하게 된다. 따라서 전체적인 거동을 지배하는 비선형 편미분 방정식을 갖는 케이블 구조물의 정적 및 동적거동을 파악하는 것은 쉽지 않다. Irvine⁽¹⁾은 Lagrangian 좌표를 사용하여 케이블 부재에 대하여 정적 및 동적해석을 수행하였고, Leonard와 Recker⁽²⁾는 2절점 유한요소를 사용하여 케이블의 정적 및 동적 거동을 규명하였으며, Argyris와 Sharp⁽³⁾는 케이블망의 기하학적 비선형 해석을 수행하여 펜헨올림피 주경기장 설계에 적용하였다. Henghold와 Russel⁽⁴⁾은 다절점 곡선요소를 이용하여 케이블 부재를 해석하였으며 Gamhir와 Batchelor⁽⁵⁾은 케이블 부재를 해석하기 위하여 3차의 보간다항식을 사용하는 2절점 곡선 유한요소를 제시하였다. 안⁽⁶⁾은 탄성현수선 케이블요소를 공간좌표에서 직접적으로 정식화하고 분포질량행렬(consistent mass matrix)을 사용하였다. Lewis⁽⁷⁾는 케이블망

* 성균관 대학교 토목공학과 부교수

** 성균관 대학교 토목공학과 석사과정

과 같은 매우 유연한 구조물의 자중에 의한 초기형상을 결정하기 위하여 dynamic relaxation method를 제시하였다. 이러한 연구에도 불구하고 자중에 의한 케이블망의 초기형상 결정문제는 아직 분명한 해결을 보지 못하고 있다.

본 연구에서는 이러한 케이블망의 기하학적 비선형 문제를 풀기 위하여 유한요소 해석기법을 제시한다. 먼저, 공간 트러스요소, 탄성현수선 케이블요소, 그리고 등매개 케이블요소에 대한 접선강도행렬 및 질량행렬을 유도한다. 지점 변위를 일으키고 자중을 받는 케이블망의 초기평형 상태를 결정하기 위하여, Newton-Raphson 반복법에 근거한 하중증분법과 viscous damping을 고려한 dynamic relaxation법을 제시한다. 또한 초기의 정적평형상태를 기준으로 추가하중에 대한 케이블망의 정적 비선형해석을 수행한다. 지점변위와 외력을 받는 케이블 구조에 대하여 비선형해석을 수행하고, 해석결과들을 기존의 문헌의 결과와 비교, 검토하므로써 본 논문에서 제시한 이론 및 해석방법의 타당성을 입증한다.

2. 공간 트러스요소의 접선강도행렬 및 질량행렬

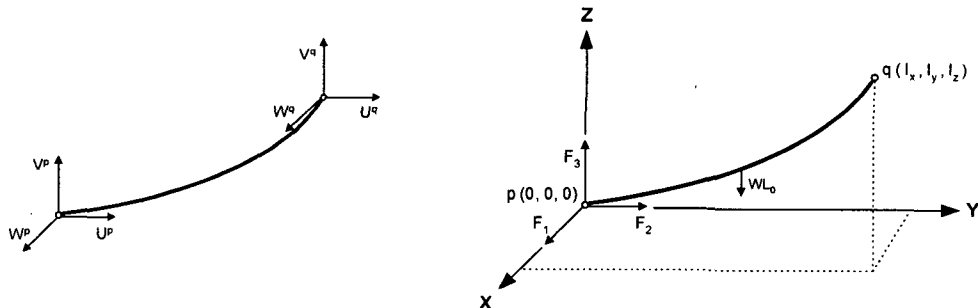


그림 1 부재좌표계에서 트러스요소의 부재변위벡터

그림 1은 트러스요소의 부재변위벡터($U^p, V^p, W^p, U^q, V^q, W^q$)를 나타낸다. 1차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 공간 트러스요소의 강도행렬과 질량행렬을 산정하고 전체좌표계로 좌표변환하여 구조물의 강도행렬과 질량행렬을 산정한다.

3. 탄성 현수선 케이블요소의 접선강도행렬 및 질량행렬

그림 2는 케이블 자중 w 의 작용하에서 장력에 의한 케이블요소의 평형상태를 나타낸 것이다. 이때 케이블요소의 적합방정식은 다음과 같이 구할 수 있으며 이들의 자세한 유도과정은 안⁽⁶⁾의 연구를 참조할 수 있다.



(a) 탄성현수선 케이블요소의 부재변위벡터 (b) 자중과 장력을 받는 탄성현수선요소
그림 2 케이블 자중과 장력을 받는 탄성현수선 케이블요소

$$\begin{aligned}
l_x &= -\frac{F_1 L_o}{EA_o} + \frac{F_1}{w} \left[\sinh^{-1}\left(\frac{F_3 - wL_o}{H}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{F_3}{H}\right) \right] \\
l_y &= -\frac{F_2 L_o}{EA_o} + \frac{F_2}{w} \left[\sinh^{-1}\left(\frac{F_3 - wL_o}{H}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{F_3}{H}\right) \right] \\
l_z &= -\frac{F_3 L_o}{EA_o} + \frac{wL_o^2}{2EA_o} + \frac{1}{w} (T_q - T_p)
\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $H = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

$$\begin{aligned}
T_p &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \\
T_q &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (F_3 - wL_o)^2} \text{ 이다.}
\end{aligned} \tag{2}$$

식 (1)에서 EA_o , H , L_o 는 각각 케이블의 축강성, 수평장력성분, 그리고 초기의 무응력상태에서의 길이를 나타내며, F_1 , F_2 , F_3 는 P 단의 장력 T_p 의 벡터성분을 의미한다. l_x , l_y , l_z , L_o 가 주어지는 경우에 식 (1)은 케이블 부재력 F_1 , F_2 , F_3 를 미지수로 하는 비선형 연립방정식으로서 Newton-Raphson 방법을 사용하여 해를 구해야만 한다. 탄성현수선 케이블 요소의 질량행렬은 집중질량행렬(lumped mass matrix)을 사용한다.

4. 등매개 케이블요소의 접선강도행렬 및 질량행렬

4.1 3차원 연속체의 증분운동방정식

Total Lagrangian formulation에 의한 증분운동방정식은 다음과 같이 표현되어질 수 있으며, 구체적인 유도과정은 참고문헌⁽⁸⁾을 참조할 수 있다.

$$\int {}^o\rho {}^{t+dt} \ddot{u}_i \delta u_i d^o v + \int ({}^o C_{ijrs} {}^o e_{rs} \delta {}^o e_{ij} + {}^t S_{ij} \delta {}^o \eta_{ij}) d^o v = {}^{t+dt} R - \int {}^t S_{ij} \delta {}^o e_{ij} d^o v \tag{3}$$

케이블요소의 길이방향으로 변형도성분을 유도하기 위하여 다음의 변형도 정의식을 생각한다.

$$d^t s^2 - d^o s^2 = 2 {}^t \epsilon^* d^o s^2 \tag{4}$$

결과적으로, 식 (3)에서 사용되는 선형 및 비선형 변형도증분은 각각 다음과 같이 표시된다.

$${}^o e = \frac{d^o x_i}{d^o s} \frac{du_i}{d^o s} + \frac{d^t u_i}{d^o s} \frac{du_i}{d^o s} \tag{5}$$

$${}^o \eta = \frac{1}{2} \frac{du_i}{d^o s} \frac{du_i}{d^o s} \tag{6}$$

4.2 등매개 보간함수와 케이블요소의 변위-변형도 변환행렬

케이블요소내의 임의점의 증분변위와 총변위성분을 보간함수행렬 H 와 절점변위벡터 U_e , ${}^t U_e$ 의 행렬관계식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
U(r) &= H \cdot U_e \\
{}^t U(r) &= H \cdot {}^t U_e
\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $U^T(r) = \{ u_1(r), u_2(r), u_3(r) \}$ (8a)

$$H = [h_1 I_3 : h_2 I_3 : \dots : h_N I_3] \tag{8b}$$

$$U_e^T = \{ u_1^1 u_2^1 u_3^1 ; u_1^2 u_2^2 u_3^2 ; \dots ; u_1^N u_2^N u_3^N \} \tag{8c}$$

윗식 (7)을 이용하여 증분운동방정식 (3)은 다음과 같이 케이블요소의 행렬운동방정식으로 나타낼 수 있다.

$$M_e {}^{t+\Delta t} \ddot{U}_e + ({}^t K_L + {}^t K_{NL}) U_e = {}^{t+\Delta} R_e - {}^t F_e \quad (9)$$

여기서 M_e , ${}^t K_L$, ${}^t K_{NL}$, ${}^t F_e$ 는 질량, 선형 및 비선형강도행렬, 그리고 절점력벡터를 나타낸다.

5. 케이블망의 초기정적 평형상태결정

5.1 하중증분법

비선형 유한요소해석을 수행하는 경우에 변위증분벡터 $\Delta U (= {}^{t+\Delta t} U - {}^t U)$ 를 산정하기 위한 증분평형방정식은 다음과 같다.

$${}^t K_T^{(i)} \cdot \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda P - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (10a)$$

$${}^{t+\Delta t} U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (10b)$$

$$\text{초기조건 : } {}^{t+\Delta t} U^{(0)} = {}^t U, \quad {}^{t+\Delta t} F^{(0)} = {}^t F \quad (10c)$$

여기서 ${}^t K_T^{(i)}$ 는 i 번째 반복계산시 구조물의 접선강도행렬을 나타내고, λ 는 하중파라미터 그리고 P 는 작용하중의 상대적인 비를 나타내는 하중벡터를 의미한다. F 는 절점력벡터이다.

본 연구에서는 케이블망의 초기평형상태를 결정하기 위하여, 케이블 각 부재를 초기길이 L_0 로 펼쳐놓은 상태에서 총자중과 최종 지점까지의 총이동량을 n 으로 분할하고 이를 순차적으로 재하시켜서 Newton-Raphson 반복법으로 평형상태를 찾아가는 방법을 사용한다. 이때 지점이동은 penalty method⁽⁸⁾를 적용한다. 위의 방법에 근거한 하중증분법을 사용하여 케이블의 초기평형상태를 찾는 알고리즘은 다음과 같다.

단계 1) 첫번째 반복계산에서는 증분하중 $\Delta \lambda \cdot P$ 를 외력으로 작용시키며, 지점증분변위가 있는 경우에는 지점이동량에 스프링상수를 곱한 값을 외력성분에 포함시킨다.

단계 2) 두번째 반복계산이후는 불평형하중을 외력으로 작용시킨다.

단계 3) 구조물 접선강도행렬을 구성하고 증분방정식 (10)으로부터 증분변위벡터 $\Delta U^{(i)}$ 를 구한다. 지점변위가 있는 경우에 스프링상수 값을 강도행렬의 지점이동에 대응하는 대각선 성분에 포함시킨다.

단계 4) 총변위벡터 ${}^{t+\Delta t} U^{(i)}$ 로부터 절점력벡터 ${}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}$ 를 산정한다.

5.2 Dynamic Relaxation Method

5.1 절의 하중증분법은 탄성형수선 케이블요소를 사용하는 경우, 외력과 지점이동량에 따라 수렴하지 못하는 경우가 종종 발생한다. 이러한 문제점을 해소하기 위하여 본 절에서는 총외력과 지점의 이동량을 일시에 재하시키고 가상의 viscous damping을 도입하여, 동적 비선형해석법을 이용하여 케이블망의 정적 평형상태를 찾는 dynamic relaxation method를 제시한다. 이를 위하여 감쇄행렬 C 를 viscous damping으로 가정하면 케이블망의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M {}^{t+\Delta t} \ddot{U} + C {}^{t+\Delta t} \dot{U} + {}^t K_T \cdot \Delta U = {}^{t+\Delta t} \lambda P - {}^{t+\Delta t} F \quad (11)$$

$$C = \beta M \quad (12)$$

여기서 M 은 구조물의 질량행렬, β 는 감쇠계수이다. 식 (11)에 변위와 속도벡터에 대한 Newmark의 가정을 도입하면 다음의 증분방정식을 얻을 수 있다.

$$({}^t K_T + a_0 M + a_1 C) \Delta U = {}^{t+\Delta t} \lambda P - {}^t F + M(a_2 {}^t \dot{U} + a_3 {}^t \ddot{U}) + C(a_4 {}^t \dot{U} + a_5 {}^t \ddot{U}) \quad (13)$$

여기서
$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (14)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

$$\delta \geq 0.50, \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

dynamic relaxation method를 적용하기 위하여 식 (13)에서 관성력을 무시하면 다음과 같다.

$$('K_T + a_1 C) \Delta U = {}^{t+\Delta t} \lambda P - 'F + C(a_4 {}^t \dot{U} + a_5 {}^t \ddot{U}) \quad (15)$$

식 (15)를 이용하여 동적 평형상태를 찾는 Newmark 알고리즘은 문헌⁽⁹⁾을 참조할 수 있다. 결과적으로 본 연구에서 제안하는 dynamic relaxation method는 시간간격 Δt 과 감쇠계수 β 를 적절히 선택하여 적은 횟수의 시간단계(time step)안에 자중과 지점변위를 받는 케이블구조가 정적평형상태에 도달하도록 한다. 각 시간단계에서는 지점이동의 영향을 고려한 하중증분법의 반복계산과정과 감쇠행렬의 영향으로 인한 유효하중벡터, 유효강도행렬, 속도 및 가속도벡터의 계산을 포함한다.

6. 수치해석 예

본 장에서는 2장 - 4장에서 제시한 트러스요소와 탄성현수선 케이블(elastic catenary cable)요소, 그리고 등매개 케이블(isoparametric cable)요소로 모델링된 케이블 부재를 하중증분법 및 dynamic relaxation method를 사용하여 자중과 지점변위의 작용하에서 정적 평형상태를 찾는다. 또한, 초기의 케이블형상이 결정되면 이 상태를 기준으로 추가 하중에 대하여 정적 비선형해석을 수행한다. 본 연구의 결과의 타당성을 검증하기 위하여 서로 다른 요소를 사용하여 얻어진 기존의 문헌의 결과와 비교한다.

6.1 평면 케이블

본 적용예에서는 2 차원 수평케이블 부재에 자중만이 작용하는 경우와 자중과 집중하중이 작용하는 경우에 대하여 하중 재하지점의 정적 수직처짐을 구한다. 그림 3은 자중과 집중하중을 받는 케이블 형상을 나타낸다. 그림 4에서는 자중과 집중하중 작용시 케이블부재의 수렴속도를 보여주고 있다. 또한 집중하중만을 받을 때의 정적 수직처짐의 해석결과를 2개의 곡선 케이블요소(O'Brien and Francis)⁽¹⁰⁾, 10개의 직선요소(string polygon method of Michalos and Birnstiel)⁽¹¹⁾로 모델링하여 얻어진 결과와 비교한다.

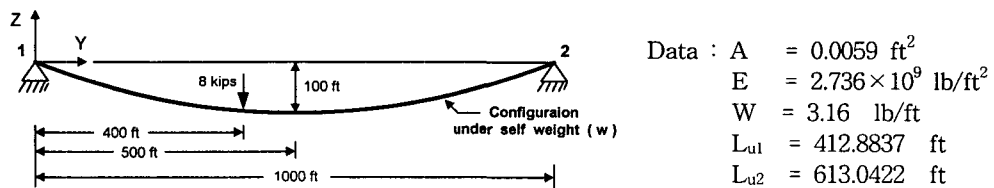


그림 3 자중과 집중하중을 받는 케이블

표 1 Vertical displacement at the loading point using the truss element (ft)

elements		3	5	7	10	20
self-weight	general method	105.951	97.9986	97.0460	96.5240	96.1676
	dynamic relaxation	105.951	97.9986	97.0460	96.5240	96.1676
self-weight + 8 kips	general method	114.874	114.592	114.552	114.528	114.513

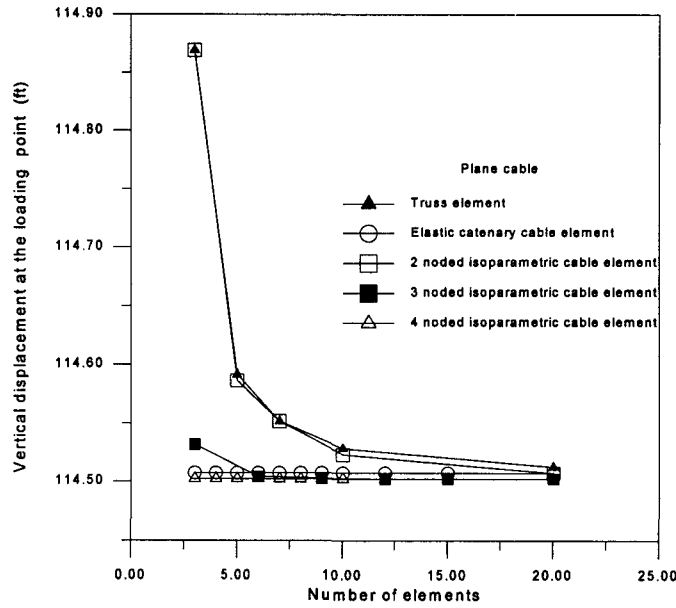


그림 4 케이블 부재의 수렴 속도

표 2 Vertical displacement at the loading point using the elastic catenary cable element (ft)

elements		2	3	5
self-weight	dynamic relaxation	96.0497	96.0497	96.0497
self-weight + 8 kips	dynamic relaxation	114.508 ●	114.508 ●	114.508

표 3 Vertical displacement at the loading point using the isoparametric cable element (ft)

2 noded elements		3	5	7	10	20
self-weight	general method	105.951	97.9985	97.0460	96.5238	96.1675
	dynamic relaxation	105.951	97.9985	97.0460	96.5238	96.1675
self-weight + 8 kips	general method	114.869	114.586	114.552	114.523	114.507
3 noded elements		3	6	9	12	15
self-weight	general method	101.213	97.0200	96.3919	96.1884	96.1207
	dynamic relaxation	101.213	97.0200	96.3919	96.1884	96.1207
self-weight + 8 kips	general method	114.532	114.504	114.503	114.502	114.502
4 noded elements		4	6	8	10	20
self-weight	general method	96.0524	96.0498	96.0496	96.0495	96.0495
	dynamic relaxation	96.0524	96.0498	96.0496	96.0495	96.0495
self-weight + 8 kips	general method	114.502	114.502	114.502	114.502	114.502

표 4 Vertical displacement at the loading point under load only (ft)

example	truss 20	elastic catenary 2	isoparametric cable element			O'Brien & Francis	Michalos & Birnstiel
			2noded 20	3noded 15	4noded 4		
Vertical	18.345	18.458	18.340	18.382	18.450	18.460	17.953

● - time increment : 10000., damping coefficient : 10000.
 others - time increment : 100., damping coefficient : 10000.

6.2 21 절점을 갖는 케이블망

그림 5와 같은 케이블 부재에 -Z 방향으로 하중 200 kips (절점 7) 재하시 정적 수직처짐을 구한다.

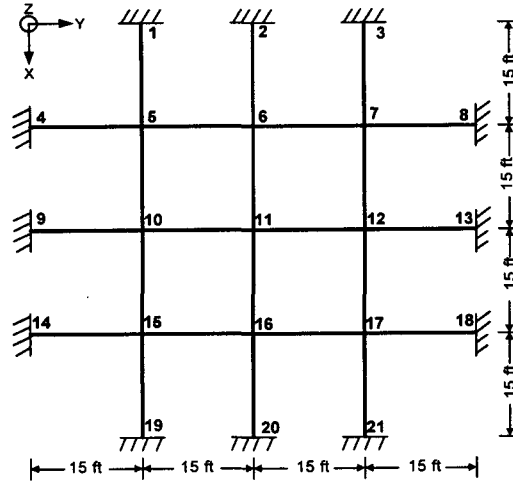


그림 5 21절점 케이블망

Data : $A = 2.4 \text{ in}^2$, $E = 23000 \text{ kips/in}^2$, $W = 1.55031 \text{ lb/in}$

표 5 Vertical displacement at the node 7 using the truss element (ft)

elements		1	2	3	6
self-weight	general method	5.18459	5.06858	5.04873	5.03704
	dynamic relaxation	5.18459	5.06858	5.04873	5.03704
self-weight + 200 kips	general method	34.7199	34.7194	34.7193	34.7192

표 6 Vertical displacement at the node 7 using the elastic catenary cable element (ft)

elements		1
self-weight	dynamic relaxation	5.03317
self-weight + 200 kips	dynamic relaxation	34.7192 •

표 7 Vertical displacement at the node 7 using the isoparametric cable element (ft)

2 noded elements		1	2	3	6
self-weight	general method	5.18399	5.06798	5.04813	5.03643
	dynamic relaxation	5.18399	5.06798	5.04813	5.03643
self-weight + 200 kips	general method	34.6178	34.6173	34.6172	34.6171
3 noded elements		1	3		
self-weight	general method	5.04887	5.03281		
	dynamic relaxation	5.04887	5.03281		
self-weight + 200 kips	general method	34.6171	34.6171		
4 noded elements		1	2		
self-weight	general method	5.03257	5.03257		
	dynamic relaxation	5.03257	5.03257		
self-weight + 200 kips	general method	34.6171	34.6171		

• - time increment : 100., damping coefficient : 1000000.

others - time increment : 100., damping coefficient : 10000.

7. 결 론

본 논문에서는 트러스요소와 탄성현수선 케이블요소, 그리고 2절점, 3절점, 4절점 등매개 케이블 요소를 사용하여, 지점 변위를 일으키고 자중을 받는 케이블망의 초기평형 상태를 결정하고 추가 하중에 대한 정적 비선형 유한요소해석을 수행하였다. 비선형해석시 Newton-Raphson 반복법에 근거한 하중증분법과 viscous damping을 고려한 dynamic relaxation법이 적용되었다. 케이블망의 기하학적 비선형해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 자중에 의한 초기평형상태를 찾기위한 비선형해석에서 탄성현수선 케이블요소를 이용한 모델은 지점과 교차점을 연결하는 최소한의 부재를 사용하여도 엄밀한 해석결과를 나타내었고, 트러스요소와 2절점 등매개요소는 많은 수의 요소로 모델링하여야 엄밀해에 수렴하였으며, 3절점 및 4절점요소는 상대적으로 적은 수의 요소로 모델링하여도 트러스요소에 비하여 빠르게 엄밀해에 수렴함을 알 수 있었다.

2) 자중에 추가하여 절점하중이 작용하는 경우에는 적은 수의 트러스요소로 모델링하여도 충분한 정확도로 만족할만한 값에 수렴함을 알 수 있었다. 이는 케이블 자중의 영향이 추가절점하중에 비하여 상대적으로 작기 때문에 나타나는 현상으로 판단된다.

3) 탄성현수선 케이블요소를 제외한 대부분의 케이블요소를 이용한 하중증분법이 자중 및 지점 이동을 고려한 케이블망의 초기평형상태에 충분한 정확도로 수렴하였다.

4) 탄성현수선 요소를 이용한 초기 정적 비선형해석에서는 dynamic relaxation method가 하중 증분법에 비하여 안정적인 수렴성을 나타내었다.

참 고 문 헌

1. H. M. Irvine, Cable structures. MIT Press (1981).
2. J. W. Leonard and W. W. Recker, Nonlinear dynamics of cables with low initial tension, *J. Engng Mech. Div., ASCE* 98, 293-309 (1972).
3. J. H. Argyris and D. W. Scharpf, Large deformation analysis of prestressed networks, *J. Struct Div., ASCE* 48, 633-654 (1972).
4. W. H. Henghold and J. J. Russell, Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach), *Comput. struct.* 6, 267-271 (1976).
5. M. L. Gambhir and B. Batchelor, A finite element for 3-D prestressed cable nets, *Int. J. Numer. Mech. Engng.* 11, 1699-1718 (1977).
6. Ahn. S. S, Static and dynamic nonlinear analysis of spatial cable networks using elastic catenary cable element, M.S. Dissertation, Seoul National University (1991)
7. W. J. Lewis, The efficiency of numerical methods for the analysis of prestressed nets and pin-jointed frame structures. *Comput. struct.* 33, 791-800 (1989).
8. K. J. Bathe, Finite element procedures. Prentice-Hall (1996).
9. K. J. Bathe, H. Ozdemir, E. L. Wilson, Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis. University of California, Berkeley (1974).
- 10 W. T. O'Brien and A. J. Francis, Cable movements under two dimensional loads. *J. Struct. Div. ASCE* 90 ST3, 89-123 (1964).
- 11 J. Michalos and C. Birnstiel, Movement of a cable due to changes in loading. *J. Struct. Div. ASCE* 86 ST12, 23-38 (1960).