

복합적층 쉘구조의 기하학적 비선형해석

Geometrically Nonlinear Analysis of Laminated Composite Shell Structures

유 승 운*
Yoo, Seung-Woon

Abstract

The finite element analysis of plate and shell structures has been one of the major research interests for many years because of the technological importance of such structures. Quite often these structures are constructed by laminated composites. This is due to the high specific stiffness and strength of composite structures.

The main objective of this paper is to extend the use of an improved degenerated shell element to the large displacement analysis of plates and shells with laminated composites. The total Lagrangian approach has been chosen for the definition of the deformation and the solution to the nonlinear equilibrium equations is obtained by the Newton-Raphson method.

1. 서 론

셸 및 평판구조는 그 자체의 구조역학적 효율성과 미학적 특성 때문에 여러분야의 공학적 구조에 가장 많이 사용되는 구조형태 중의 하나이다. 이러한 구조의 유한요소해석은 지금까지 그 중요성 때문에 많은 주목을 받고 있다. 또한 이러한 구조는 최근에 복합적층(laminated composite) 재료로 건설되는 경우가 있다. 이러한 복합재료는 그 자체의 높은 비강성(specific stiffness), 비강도(specific strength)와 내구성등의 특징을 갖고 있다. 처음 항공우주분야에서 사용이 시작되어 제품의 우수성뿐만 아니라 그 가격이 점차 낮아짐에 따라 여러 분야에서 사용되어지고 있다.

복합적층 구조물은 각 단층(lamina)의 방향성과 적층구조에 기인한 이방성(anisotropic)에 의하여 복잡한 기계적인 거동을 보이게 되는바 이와같은 복합적층 쉘구조의 해석방법으로 본 연구에서는 유한요소법을 채택한다. 유한요소법은 그동안 많은 고체역학의 복잡한 문제의 해석에서 그 효율성이 입증되었고 특히 임의의 형상을 갖는 구조물을 그대로 모형화하여 해석할 수 있는 점에 있어서 그 범용성을 인정 받고 있다.

* 관동대학교 토목공학과 조교수

본 연구에서 사용된 개선된 감절점(degenerated) 쉘요소는 전단구속(shear locking) 현상을 제거 하기위해 가장 효과적인 대체 전단변형률장(shear strain fields)를 사용하고, 막변형도에 감차적분기법을 사용함으로써 막구속(membrane locking) 현상을 제거하며, 쉘요소 전체의 거동을 유연하게 하기위해 비적합변위형을 선택적으로 추가한다. 이와같은 개선된 쉘요소는 전단구속과 막구속현상이 제거되며, 전달가능한 거짓 영에너지모드(commutable spurious zero energy mode)도 발생하지 않으며 수렴성이 양호하였다.^[3]

본 연구에서는 등방성재료 문제에서 우수한 결과를 보여준 개선된 쉘 유한요소를 복합적층을 갖는 쉘구조의 기하학적 비선형해석 문제로 그 적용범위를 확장하고자 한다. 기하학적 비선형거동을 total Lagrangian 수식화를 사용하고, 비선형 수치해석은 Newton-Raphson 반복해법을 사용하여 쉘의 비선형 해석을 행한다.

2. 대변형 감절점 쉘유한요소 정형화

본 연구의 곡면 쉘요소의 정형화에는 절점당 3개의 이동변위(u,v,w) 와 2개의 회전변위(α, β)를 갖는다.

2.1 쉘요소의 형상화

요소의 변위장은 중립면에 위치한 각각의 절점에서 전체좌표계 방향의 변위자유도와 쉘의 중립면의 각각의 절점에서 정의되는 절점좌표계에 관한 회전자유도등 모두 5개의 절점자유도로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \zeta \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix}_{mid} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \zeta \mathbf{b}_k \quad (1)$$

여기서 대회전변형을 고려하기위해 \mathbf{b}_k 를 다음과 같이 표현한다.^[9]

$$\mathbf{b}_k = \frac{h_k}{2} [\sin \alpha_k \cos \beta_k \bar{v}_{1k} - \sin \beta_k \bar{v}_{2k} + (\sin \alpha_k \cos \beta_k - 1) \bar{v}_{3k}] \quad (2)$$

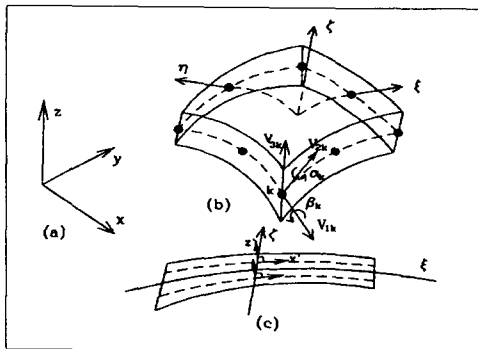


Fig.1 (a)global (b)nodal and curvilinear (c)local coordinate systems

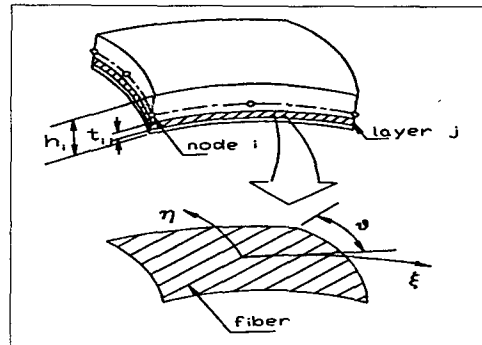


Fig.2 Geometry of laminated shell element

현재 고려대상으로 한 복합적층구조의 경우 여러 단층으로 구성되어 있으므로 그림 2 에 도시한 셀의 두께와 각 단층의 두께는 각각의 절점에서의 단층 두께로부터 보간하여 계산된다.

2.2 비선형 유한요소 방정식

국부좌표계에 의한 Green-Lagrangian 변형률은 다음과 같이 표현 할 수 있다.^[9]

$$\epsilon = \epsilon^o + \epsilon^{NL}$$

$$\epsilon^o = \begin{bmatrix} u'_{,x} \\ v'_{,y} \\ u'_{,y} + v'_{,x} \\ u'_{,z} + w'_{,x} \\ v'_{,z} + w'_{,y} \end{bmatrix}, \quad \epsilon^{NL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(u'_{,x})^2 + (v'_{,x})^2 + (w'_{,x})^2] \\ \frac{1}{2}[(u'_{,y})^2 + (v'_{,y})^2 + (w'_{,y})^2] \\ u'_{,x}u'_{,y} + v'_{,x}v'_{,y} + w'_{,x}w'_{,y} \\ u'_{,x}u'_{,z} + v'_{,x}v'_{,z} + w'_{,x}w'_{,z} \\ u'_{,y}u'_{,z} + v'_{,y}v'_{,z} + w'_{,y}w'_{,z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

또한, Green-Lagrangian 변형률은 변위의 미분항으로 나타낼 수 있다. 즉, \mathbf{E} 를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z]^T$$

$$\mathbf{E}_x = [u'_{,x}, v'_{,x}, w'_{,x}]^T \quad \mathbf{E}_y = [u'_{,y}, v'_{,y}, w'_{,y}]^T \quad \mathbf{E}_z = [u'_{,z}, v'_{,z}, w'_{,z}]^T \quad (4)$$

그러면

$$\epsilon^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \mathbf{H}\mathbf{E}, \quad \epsilon^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_y^T & 0 \\ \mathbf{E}_y^T & \mathbf{E}_x^T & 0 \\ \mathbf{E}_z^T & 0 & \mathbf{E}_x^T \\ 0 & \mathbf{E}_z^T & \mathbf{E}_y^T \end{bmatrix} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{E} \quad (5)$$

위의 Green-Lagrangian 변형률의 선형, 비선형 부분에 대해 변분을 취하면 다음과 같다.

$$d\epsilon = d\epsilon^o + d\epsilon^{NL} = \mathbf{H}d\mathbf{E} + \mathbf{A}d\mathbf{E} = (\mathbf{H} + \mathbf{A})d\mathbf{E} = \mathbf{B}d\mathbf{u} \quad (6)$$

2.3 증분 평형 방정식

정적상태에서 평형방정식(equation of static equilibrium)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.^[4,9]

$$\Psi = \mathbf{R} - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{R} - \mathbf{P} \quad (7)$$

여기서 잔여치 Ψ 는 절점평형하에 가정된 변위장을 만족시키기 위한 절점력으로 볼수 있으며, \mathbf{R} 는 외력에 의한 절점력이다. 위의 식은 변위벡터 \mathbf{u} 에 대해 직접적으로 풀 수

없으므로 위의 평형방정식을 증분형태로 표현한다. 위의 식에 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 d\Psi &= dR - \int_V dB^T \sigma dV - \int_V B^T d\sigma dV \\
 &= dR - \int_V B^T d\sigma dV - \int_V G^T dA^T \sigma dV - \int_V dG^T [H+A]^T \sigma dV \quad (8) \\
 &= dR - \int_V B^T \overline{DB} dV du - \int_V G^T SG dV du - \int_V dG^T [H+A]^T \sigma dV
 \end{aligned}$$

여기서 $S=[S_1 \ S_2 \ S_3]^T$, $S_1=[\sigma_x I \ \tau_{xy} I \ \tau_{xz} I]$ $S_2=[\tau_{xy} I \ \sigma_x I \ \tau_{yz} I]$ $S_3=[\tau_{xz} I \ \tau_{yz} I \ 0]$ 이며, I 는 단위행렬이다.

그러므로 평형방정식의 증분 형태는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\Psi = dR - [K_0 + K_{\sigma 1} + K_{\sigma 2}] du = dR - K du \quad (9)$$

2.4 복합적층 구조

복합적층 구조는 여러개의 단층들로 구성되어 있고 각 단층들은 횡등방성(transversely isotropic)을 가지며, 요소내에서 각 단층의 재료주축방향이 기준좌표계에 대해 θ 의 각도를 가진다고 가정한다.

복합적층 구조에서 재료의 강성은 각 단층들이 서로 다른 방향성을 가짐으로써 두께 방향으로 일정하지 않다. 이러한⁶⁾적층효과를 고려하기 위하여 두께방향의 적분은 각 단층들에 대한 적분들의 합으로 얻어진다.^[6]

3. 개선된 쉘 유한요소

3.1 감차 적분방법

요소의 강성행렬 계산시 감차적분의 사용은 과도한 전단 및 막(membrane)에너지의 발생을 억제시키는 효과를 가져다 준다. 예를 들면 2차요소(quadratic element)의 정상적분점인 $\xi=\sqrt{0.6}$ 에서 평가되는 전단 및 막변형도는 과도한반면에 감차적분점인 $\xi=\sqrt{1/3}$ 에서는 정확하게 가까운 전단 및 막변형도의 평가가 가능하다. 그러나 이와같은 감차적분 방법은 경우에 따라 가영에너지모드의 발생과 여전히 전단 및 막구속현상이 발생한다.

3.2 비적합 변위형의 추가

일반 등매개변수요소가 부정확한 값을 주는 가장 큰원인 중의 하나가 단순한 응력 분포를 제대로 나타 내지 못하기 때문이다. Choi와 Schnobrich^[2]는 이 개념을 등매개변수 쉘요소에 적용하여 원래의 요소의 거동을 개선하였으며, 8절점요소에 추가 적용가능한 다음과 같은 비적합변위 함수를 제안하였다.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_3 = \xi\eta(1-\xi^2) \\ \bar{N}_4 &= \xi\eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_5 = \eta(1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (10)$$

3.3 대체 전단 변형률장

가정된 변위장에 의해 구성된 두께방향 전단변형률장(shear strain field)보다 낮은 차수의 두께방향 전단변형률장을 가정하여 두께방향 전단강성행렬의 계산시 사용하는 방법으로 대체 전단변형률장을 가정하는 방법에 따라 크게 두가지 경우로 분류할 수 있다. 첫째는 변위장에 의한 변형률을 이용하는 방법이고, 둘째는 수직변위의 형상함수를 회전 변위 형상함수보다 높은 차수를 가지도록 하고 여기에 적당한 두께방향 변형률 구속조건 (shear strain constraint)를 가정하여 이 조건을 만족하는 변형률장을 구성하는 방법이다. 본 연구에서는 전자의 방법으로 Hinton과 Huang^[5]이 제시한 대체 전단변형률장을 사용한다.

3.4 개선된 감절점 쉘요소

본 논문의 개선된 쉘요소의 기본착상은 전단구속 해결에 우수한 결과를 보인 대체 전단변형률장을 사용하고, 막구속현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 쉘요소자체의 거동을 보완하기 위해 비적합 변위형을 선택적으로 추가하는 것이다.^[3]

위에서 언급한 것의 효과적인 결합을 위하여 전체 요소의 강성을 평면내 부분 (in-plane part)과 전단 부분(transverse shear part)으로 나눈다.(평면내 부분에는 막(membrane)과 굽힘(bending)의 효과가 포함되어 있다.) 전단 변형률의 수치 적분시 전단구속 현상을 피하기 위해 적분위치를 선택된 위치에서 2x3/3x2적분을 행하고, 평면내 부분은 감차적분(2x2)을 행하며, 모든부분에 대해 비적합 변위형을 선택적으로 추가한다.

증분변위 미분치와 증분변위와의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\mathbf{E} = \mathbf{G} d\mathbf{u}_t = \sum \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f \\ \tilde{\mathbf{G}}_s \end{bmatrix} d\mathbf{u} + \sum \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_f \\ \bar{\mathbf{G}}_s \end{bmatrix} d\bar{\mathbf{u}} \quad (11)$$

여기서 $d\mathbf{u}=[du,dv,dw,d\alpha,d\beta]$, $d\bar{\mathbf{u}}=[d\bar{u},d\bar{v},d\bar{w},0,0]$ 이다. \mathbf{G}_f 는 증분 평면내변위 변분치와 증분변위 관계행렬이며, $\tilde{\mathbf{G}}_s$ 는 대치된 증분 전단변위 변분치와 증분변위 관계행렬이고, $\bar{\mathbf{G}}_f$ 와 $\bar{\mathbf{G}}_s$ 는 증분 비적합 변위형의 변위 변분치와 증분 비적합변위형의 변위와의 관계행렬이다.

4. 수치 해석

본 연구에서 제시한 개선된 쉘요소의 복합적층 구조에의 적용성을 알아보기 위해 예제시험을 하였다. 비선형 해석시에는 Newton-Raphson반복법을 사용하였으며, 수렴의 판정은 총 변위의 Euclidian norm 대 증분된 변위의 Euclidian norm의 비가 1.0×10^{-3} 보다 작을때 수렴 하였다고 판정하였다.

대변형을 받는 복합적층 평판

본 예제는 등분포하중을 받는 4 적층 [0/90/0/90] 된 고정지지 평판의 기하학적 비선형 해석을 행한다. 고려한 평판의 형상치수와 재료특성등은 다음과 같다. $L=12in$, $h=0.096in$, $E_1=1.828 \times 10^6 psi$, $E_2=1.832 \times 10^6 psi$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.3125 \times 10^6 psi$, $\nu=0.23949$. 직교적층(cross ply)과 대칭성에 의해 평판의 1/4 을 4x4 로 모델링한다. 평판 중심의 처짐과 등분포 하중의 크기와의 관계를 그림 3 에 나타내었으며 Reddy^[7] 의 해와 비교시 양호한 결과를 준다.

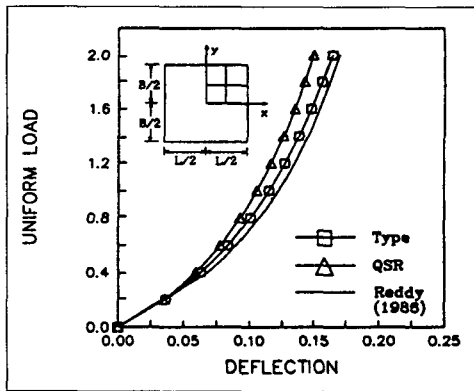


Fig.3 Load-deflection relation for [0/90/0/90] layered plate

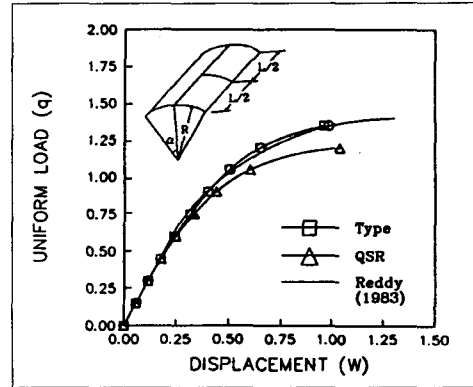


Fig.4 Load-deflection relation for [0/90] layered cylindrical shell

대변형을 받는 원통형 복합적층 셸

본 예제는 등분포하중을 받는 2 적층 [0/90] 된 고정지지 원통형 셸의 기하학적 비선형 해석을 행한다. 고려한 원통형 셸의 형상치수와 재료특성등은 다음과 같다. $R=2540in$, $L=508in$, $h=2.54in$, $\alpha=0.1rad$, $E_1=25 \times 10^6 psi$, $E_2=1.0 \times 10^6 psi$, $G_{12}=G_{13}=0.5 \times 10^6 psi$, $G_{23}=0.2 \times 10^6 psi$, $\nu=0.25$. 직교적층과 대칭성에 의해 원통형 셸의 1/4 을 4x4 로 모델링한다. 셸 중심의 처짐과 등분포 하중의 크기와의 관계를 그림 4 에 나타내었으며 Reddy^[8] 의 해와 비교시 양호한 결과를 준다.

5. 결론

본 논문에서 사용한 개선된 감절점 셸유한요소는 가정된 전단변형도장의 대치사용, 감차적분 및 비적합변위형의 선택적 추가등 세가지 기법의 장점을 상호 보완적으로 혼합 사용하여 등방성 재료문제에서 우수한 결과를 주었다. 또한 이 개선된 셸 유한요소를 복합적층을 갖는 셸구조의 기하학적 비선형해석에도 확대 적용시켰다. 셸의 기하학적 비선형 거동은 total Lagrangian 수식화를 사용하였고, 비선형 수치해석은 Newton-Raphson 반복법으로 반복계산하였다. 여러 수치해석결과 본 개선된 셸 유한요소는 복합적층 구조해석 영역에서도 양호한 결과를 준다.

참 고 문 헌

1. Chang, T.Y. and Sawamiphakdi, K., "Large deformation analysis of laminated shell by finite element method", *Computers and Structures*, 13, 331-340, 1981.
2. Choi, C.K. and Schnobrich, W.C., "Use of nonconforming modes in finite element analysis of shells", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, 101, pp. 447-464, 1975.
3. Choi, C.K. and Yoo, S.W., "Combined use of multiple improvement techniques in degenerated shell element", *Computers and Structures*, 39, pp. 557-569, 1991a.
4. Choi, C.K. and Yoo, S.W., "Geometrically nonlinear behavior of an improved degenerated shell element", *Computers and Structures*, 40, pp. 785-794, 1991b.
5. Hinton, E. and Huang, H.C., "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields", *Computers and Structures*, 23, 409-431. 1986.
6. Panda, S. and Natarajan, R., "Analysis of laminated composite shell structures by finite element method", *Computers and Structures*, 14, 225-230, 1981.
7. Reddy, J.N., "On mixed finite element formulations of a higher-order theory of composite laminates", *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, Hughes, T.J.R. and Hinton, E.(Eds), Pineridge Press, 1986.
8. Reddy, J.N. and Chandrashekhara, K., "Nonlinear analysis of laminated shells including transverse shear strains", *AIAA J.*, 23, pp. 440-441 1983.
9. Surana, K.S.. "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 19, 581-615, 1983.