

彈性地盤 위의 軸對稱 荷重을 받는 圓板의 接觸應力 解析에 관한 研究

The Study on the Determination of the Contact Area of the Circular Plate Resting on Elastic Half-space under Axisymmetric Loading

조현영* 정진환** 김성철***
Cho, Hyun Yung Cheung, Jin Hwan Kim, Sung Chirl

ABSTRACT

The circular plate resting on Boussinesq's half-space model under axisymmetric loading is studied by a finite element procedure to evaluate the distribution of contact pressure between plate and elastic half-space. The displacement of half-space due to axisymmetric surface loading can be evaluated by double integration of Boussinesq's solution. On that case the analytical integration can be executed for the radial direction but the analytical integration for the circumferential direction is impossible and the numerical integration should be considered. With the radial integration we can get non-dimensional function. Then the numerical integration for the formula is executed for the circumferential direction and the results are approximated 5th order polynomials by using the least square method. With these 5th order approximate formula, the flexibility matrix of half-space is constructed as the coefficient matrix of nodal contact pressure by the finite element procedures. Iteration procedures are attempted by using this method to determine the separated region.

1. 서론

본 연구는 원형평판에 대하여 8절점 등매개변수의 축대칭 요소로 분할하고, 지반은 Boussinesq의 반무한 탄성체로 가정하여 판과 접하는 판절점 전체를 한 단위로 하는 한 개의 요소로 생각하였다.^{[1][4]} 또 작용하중은 축대칭하중으로 제한하여 3차원 문제를 2차원 문제로 귀착시켰다. 한 개의 집중하중이 작용할 경우에 대하여 Boussinesq가 구한 지표변위식을 이용하여 지반 위의 축대칭 등분포하중과 변위간의 관계식을 유도하였다.

지반에 놓인 평판의 경우 지반의 강도가 평판의 변위와 응력에 영향을 미치고 평판의 강성이 지반의 처짐과 접촉응력의 분포에 영향을 미치는 상호작용이 존재한다. 그러므로 지반이 평판에 미치는 영향을 단순한 가정으로 처리한다면 지반 위에 놓인 평판의 거동을 완전히 파악할 수 없

* 부산대학교 공과대학 토목공학과 교수

*** 부산대학교 공과대학 토목공학과 박사과정

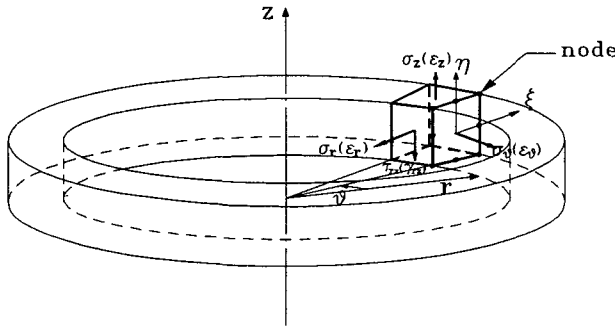
** 부산대학교 공과대학 토목공학과 부교수

으며 평판을 통해 지반에 전달되는 힘으로 인한 지반의 처짐과 지반내의 응력도 정직하게 계산할 수 없다. 기존의 연구에서는 외력이 작용하게 되면 지반과 분리되지 않는다는 단순한 가정 하에서 평판과 지반의 상호 작용을 해석해 왔다. 이러한 가정에서 해석할 경우, 평판과 지반의 상대 강성 또는 하중의 위치에 따라 지반과 평판 사이에 발생하는 접촉압력이 인장력으로 계산되는 경우가 있다.^{[3][6][7]} 그러나 실제의 지반과 평판의 상호작용에서는 결합력이 존재하지 않으므로 인장의 접촉응력이 발생하는 곳에서 지반과 평판이 분리된다고 보아야 타당할 것이다. 따라서 본 연구는 구조물의 기초-지반 계의 정적 상호작용에 관한 기초적 연구의 하나로서 분리를 고려한 탄성지반 위의 축대칭원판의 접촉응력 해석을 다룬 것이다.

본 논문에서는 판의 강성도 행렬과 지반의 강성도 행렬을 중첩하기 위한 지반의 유연도행렬의 역행렬 계산을 하지 않고 지반의 접촉응력과 판의 휨변위를 먼저 구한 후 판과 지반의 접촉점 변위를 확정하는 방법을 택하였다.

2. 축대칭 원판 요소

탄성 지반 위의 축대칭 판 요소는 8절점 등매개변수의 축대칭 원형고리요소로 이상화하였고, 이 원판의 강성도 행렬은 다음과 같다.



$$[F] = [K_p][\delta] \quad (1)$$

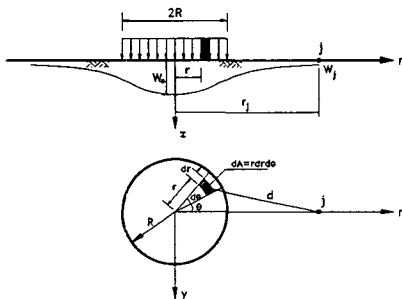
여기서 $[F]$ 는 작용외력 벡터, $[K_p]$ 는 판의 강성도 행렬, $[\delta]$ 는 판의 절점변위 벡터이다.

판의 자유도와 기타 자세한 내용은 참고문헌 등에서 쉽게 알 수 있으므로 생략하였다.^{[2][5][6][7][8]}

Fig. 1. Typical 8-noded isoparametric ring element

3. 탄성 지반의 유한요소 정식화

3. 1 축대칭 등분포하중이 작용하는 지반의 수직 처짐



1885년 Boussinesq는 반무한 탄성체의 표면에 하나의 집중하중이 수직으로 작용할 때 임의의 점의 표면변위를 구하는 식을 제안하였다. 이 관계식을 이용하여 그림 2에서와 같이 원영역에 작용하는 축대칭 등분포하중 q 에 의한 지표면의 변위를 다음 식(2)의 적분으로 계산할 수 있다.^{[1][4]}

Fig. 2. Surface deflection of half-space due to axisymmetric loading

$$w_j = 2\alpha q \int_0^\pi \int_0^R I(r, \theta) dr d\theta \quad (2)$$

$$\text{여기서, } \alpha = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s}, \quad I(r, \theta) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_j^2 - 2rr_j \cos \theta}}$$

3. 2 근사다항식에 의한 수직변위

식(2)의 적분은 반경방향 (r) 에 대하여 해석적분이 가능하나 원주방향 (θ) 에 대해서는 해석적분이 불가능하여 Gauss 수치적분을 행하였다. 이 수치적분은 재하반경 (R) 과 변위를 알고자 하는 위치 (r_j) 와의 비 ($e_j = r_j/R$) 의 향으로 무차원화하여 r_j 가 달라질 때마다 적분하는 불편함을 없앴다. 무차원화 함수는 다음과 같다.

$$F(\theta) = \sqrt{1 + e_j^2 - 2e_j \cos \theta} - e_j + e_j \cos \theta \ln |(1 - e_j \cos \theta)/(e_j \sin \theta)| \\ + \sqrt{(1 - e_j \cos \theta)^2 / (e_j \sin \theta)^2 + 1} \quad | \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta |$$

$$\text{따라서 } w_j = 2R\alpha q \int_0^\pi F(\theta) d\theta = 2R\alpha q f(e_j) \quad (3)$$

$$\text{여기서, } f(e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{G_i=1}^m [F(\theta_i) W \det J_{\theta_i}]_{G_i} \quad (4)$$

함수 $f(e_j)$ 곡선을 3개의 구간으로 나누고 각 구간에 대하여 5차다항식으로 최소자승 근사식을 구한 것이다.

$$\text{즉, } f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \quad (x = e_j = \frac{r_j}{R}) \quad (5)$$

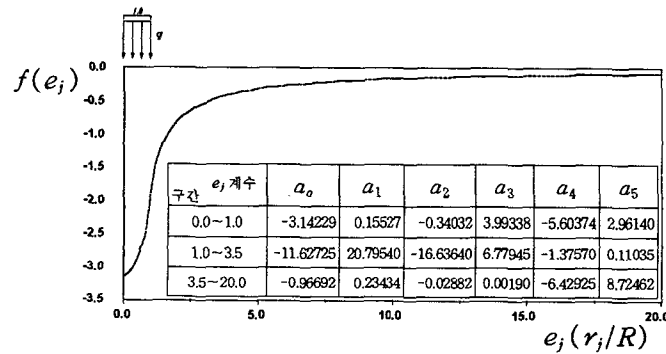


Fig. 3. Non-dimensional function and Coefficients of 5th degree approximate polynomials

3. 3 지반의 유연도 행렬

한 요소 내의 임의의 Gauss 적분 점의 구간 $r_1 \leq r \leq r_2$ 내에 원환 등분포하중으로 인한 임의의 점 (j) 의 수직변위는 아래의 식으로 표현할 수 있다.

$$\Delta w_j(G_i) = 2\alpha q_{G_i} [r_2 f(e_2) - r_1 f(e_1)] \quad (6)$$

$$\text{여기서, } q_{G_i} = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi_{G_i}) q_k, \quad e_1 = \frac{r_j}{r_1}, \quad e_2 = \frac{r_j}{r_2}, \quad f(e_j) = \text{그림 3의 근사다}$$

항식, q_{G_i} 는 그림 3에서와 같이 판을 8절점요소로 분할하였을 때 판의 한 요소 구간에 대응하는 지반절점의 반력강도 q_k 로부터 지반의 평균반력을 Gauss 적분 점의 값으로 근사시킨 것이다.

마찬가지로 원판과 접하는 지반의 모든 절점변위는 전체 구간에 대하여 중첩하여 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$[w_j] = [G][q] \quad (7)$$

여기서 $[G]$ 는 지반의 절점 분포하중에 대한 유연도행렬이고, 꼭찬 비대칭(full and unsymmetric)행렬로 반무한 탄성체 전체를 한 개의 요소로 본 것이다.

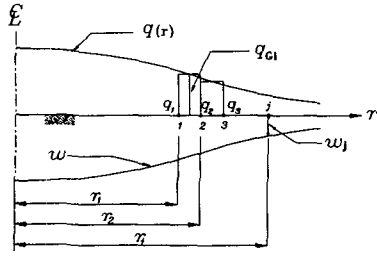


Fig. 4. Axisymmetric surface loading

3. 4 지반의 등가절점력계

유한요소법은 변위, 하중, 강성도 행렬이 모두 절점에 관한 값으로 표현되므로 원판의 강성도 행렬과 지반의 강성도 행렬을 구성하면 하중벡터는 등가 절점력 계로 주어지기 때문에 반무한 탄성체 상에 작용하는 절점에 대응하는 곳에서의 접촉압력 $[q]$ 는 등가의 절점력계로 변환해야 한다.

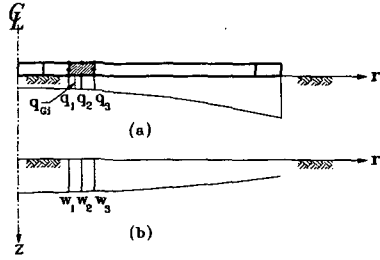


Fig. 5. (a) Distribution of contact pressures and (b) Displacements

^{[1][4][5]} 지반에서의 수직변위 $[w]$ 가 발생하여 평판과 반무한 탄성체의 강성도 방정식을 중첩하기 위해서는 등가의 절점반력 $[Q]$ 와 분포접지압 $[q]$ 가 하는 가상 일이 같다는 조건을 이용하여 절점의 접지압 행렬을 등가의 절점력 행렬로 변환하여야 한다.

한 요소에 대하여 생각하면 다음과 같다.

$$[Q]^{(e)} = [E]^{(e)}[q]^{(e)} \quad (8)$$

$$\text{여기서 } [E]^{(e)} = 2\pi \int_{-1}^1 [N]^T [N] r \det|J| d\xi \quad (9)$$

$[E]^{(e)}$ 의 계산은 Gauss 수치적분으로 수행하면 다음과 같다.

$$[E]^{(e)} = 2\pi \sum_{G=1}^n [N]^T [N] r \det|J| W_G \quad (10)$$

여기서 G : Gauss 적분 점, W_G : 가중치이다.

원형 평판의 각 요소에 대한 접촉압력의 등가절점력계를 모두 중첩하면 지반 전체의 등가절점력계 $[Q]$ 를 구할 수 있다. 즉,

$$[Q] = \Sigma [Q]^{(e)} = (\Sigma [E]^{(e)})[q] \quad (11)$$

$$\text{여기서 } [Q] = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n]^T$$

$$[q] = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$$

여기서 n 은 원판과 지반이 접촉하는 절점번호이다.

3. 5 반무한 탄성체의 강성도 행렬

판과 지반의 접촉점의 변위 w_j 를 안다면 그 점점상의 하중강도는 식(7)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[a] = [G]^{-1}[w_j] \quad (12)$$

따라서 지반 전체의 강성도 방정식을 구할 수 있다. 즉,

$$[Q] = \sum [E]^{(e)} [G]^{-1} [w_j] = [K_H] [w_j] \quad (13)$$

$$\text{여기서 } [K_H] = [E][G]^{-1} \quad (14)$$

여기서 $[Q]$ 는 상부 판과 지반간에 주고받는 접촉 분포력의 등가 점점력계이고 $[w_j]$ 는 하부 지반의 점점 변위들이며 $[K_H]$ 는 반무한 탄성체 지반 전체의 강성도 행렬이다.

4. 구조계 전체의 강성도 방정식의 풀이

4. 1 원판과 지반의 전체 강성도 방정식

원판과 지반의 강성도 방정식을 중첩하여 지반과 원판의 상호작용계 전체의 강성도 방정식을 얻을 수 있다.^{[1][4]} 즉,

$$[P] = [[K_p] + [K'_H]][w] \quad (15)$$

여기서 $[P]$: 원판의 작용외력계, $[K_p]$: 원판의 강성도 행렬,

$[K'_H]$: 지반의 강성도 행렬 $[K_H]$ 를 원판의 차수로 확장한 행렬

$[w]$: 원판의 변위

4. 2 방정식의 풀이

판과 지반의 전체 강성도 행렬은 식(15)에서 $[K'_H]$ 가 비대칭이고 대상행렬의 특징을 잃어버리므로 연립방정식은 전형적인 Gauss 소거법을 사용한다.

4. 3 지반의 유연도 행렬을 변환한 후 전체 강성도 방정식을 계산하는 방법

본 본문에서는 분리를 고려하여 지반의 유연도 행렬 $[G]$ 의 $[G]^{-1}$ 를 구하지 않고 유연도 행렬 $[G]$ 를 그대로 두고 변환 구성하여 분리영역을 추적하는 방법을 고려한다.

먼저 식 (15)에서

$$[P] = [[K_p] + [K'_H]][U] \quad (16)$$

여기서 $[U] = [[U_1] [U_2] \cdots [U_n]]^T$

$$[U_i] = [w_i \ \theta_{r,i}]$$

$[U]$ 에서 지반과 접하는 점점의 수직 처짐 w_i 를 접촉압력 q_i 로 바꾼 행렬을 $[U_q]$ 라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[U_q] = [[U_{q1}] [U_{q2}] \cdots [U_{qm}]]^T \quad (17)$$

여기서 $[U_{qi}] = [q_i \ \theta_{r,i}]$

식 (7) 의 $[w_j] = [G][q]$ 를 상부구조의 차수로 확장하면 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$[w_j'] = [G'] [q'] \quad (18)$$

여기서 $[w_j']$: 축대칭 원판의 차수로 확장된 변위

$[G']$: 축대칭 원판의 차수로 확장된 지반의 유연도 행렬

$[q']$: 축대칭 원판의 차수로 확장된 접촉압력

식 (18)을 풀어서 다시 적으면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c} 1 \times N \text{행렬} \\ \left[\begin{array}{c} w_1 \\ 0 \\ w_2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \begin{array}{c} N \times N \text{행렬} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} G_{11} 0 & G_{12} 0 & \cdots & \cdots & G_{1n} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ G_{21} 0 & G_{22} 0 & \cdots & \cdots & G_{2n} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} 0 & G_{n2} 0 & \cdots & \cdots & G_{nn} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{array}{c} 1 \times N \text{행렬} \\ \left[\begin{array}{c} q_1 \\ 0 \\ q_2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (19)
 \end{array}$$

여기서 n : 원판과 지반이 접촉하는 절점번호 N : 원판 전체의 절점번호

$[G']$ 에서 주대각선 성분 중 0 성분을 1로 바꾼 행렬을 $[G_u]$ 라 하면 $[G_u]$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[U] = [G_u][U_q] \quad (20)$$

이를 풀어서 적으면 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} w_1 \\ \theta_{r,1} \\ w_2 \\ \theta_{r,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{r,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccc} G_{11} 0 & G_{12} 0 & \cdots & \cdots & G_{1n} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ G_{21} 0 & G_{22} 0 & \cdots & \cdots & G_{2n} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} 0 & G_{n2} 0 & \cdots & \cdots & G_{nn} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} q_1 \\ 0 \\ q_2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (21)
 \end{array}$$

식 (7)에 식 (19)을 대입하면

$$[P] = [[K_p] + [K_H]][[G_u][U_q]] \quad (22)$$

이를 정리하면 다음과 같이 된다.

$$[P] = [[K_p] + [E][G]^{-1}][[G_u][U_q]]$$

$$= [[K_p][G_u] + [E][G]^{-1}[G_u]][U_q]$$

$[E][G]^{-1}[G_u]$ 는 지반 절점만을 고려하는 것이므로 다음과 같은 재배열을 생각할 수 있다.

$$[E][G]^{-1}[G_u] = [E][G]^{-1}[G] = [E]$$

그러므로 식(16)은 다음과 같이 간단히 정의된다.

$$[F] = [[K_s][G_u] + [E]][U_q] \quad (23)$$

$$\text{또는 } [F] = [K_q][q]$$

여기서 $[K_q]$ 는 변위 θ_{r_i} 에 대해서는 판의 강성도 행렬이 되고 q_i 에 대해서는 분포반력과 판의 작용외력 간의 평형을 나타내는 변환행렬이 되는 일종의 복합행렬로서 이를 상호작용 행렬 (interaction matrix)이라 부르기로 한다.

위 식(23)을 풀면 접지압 분포 q_i 가 구해지고 이를 식 (7)에 대입하여 지반의 변위를 얻는다. 이 지반의 변위를 기지변위로 하여 식(1)을 풀면 판의 변위를 얻을 수 있다.

5. 분리가 고려된 지반과 평판의 해석

상호 작용 계에서 원판과 지반의 상대강성 또는 하중의 위치에 따라 판의 일부분이 지반과 분리 되는 현상이 일어날 수 있다. 이 경우 원판과 지반의 상호작용 방정식 (23)을 해석하여 q_i 를 계산한다. 인장의 접촉압력이 발생한 구간을 분리영역으로 보고 압축구간에만 접촉이 있다고 보고 지반의 유연도 행렬을 재구성하여 전 과정을 다시 계산한다. 이때 인장과 압축이 한 요소에서 교차하는 일정한 값을 갖는 요소를 인장과 압축의 교차점을 찾아 이점에서 요소가 분할되도록 구조계 전체를 재분할한 다음 위 계산을 다시 반복한다. 이 과정을 인장부분의 값이 0이 될 때까지 반복하여 분리영역을 구할 수 있다. 여기서 얻어진 q_i 를 식(7)에 대입하여 지반의 변위를 구한다. 또 식(1)에서 지반과 접하는 절점에서 평판이 고정되어 있다고 간주하고 그 점의 지반변위를 판의 기지변위로 가정하여 판의 변위를 구한다. 이렇게 하여 분리를 고려한 지반과 판의 상호작용을 해석하였다.

6. 계산의 예

예제> 그림 6, 7는 지반(dense sand)의 탄성계수 $E_s = 730t/m^2$, Poisson비 $\nu_s = 0.20$ 이고^[2], 콘크리트 원판의 직경 $20.0m$, 탄성계수 $E_c = 2.1 \times 10^5 t/m^2$, Poisson비 $\nu_c = 0.18$, 두께 $0.5m$ 일 때 하중 $100 ton$ 을 재하영역 $5m (5.09 t/m^2)$ 의 축대칭 등분포하중으로 작용하였을 경우의 변위 및 응력을 본 방법으로 계산한 결과이다.

7. 결론

첫째, 지반의 유연도 행렬의 역행렬을 구하여 지반의 강성도 행렬을 얻은 다음 전체 강성도 방정

식을 구성하여 상호작용을 해석하는 방법은 분리영역을 찾기 위한 반복 계산시 매번 유연도 행렬의 역행렬을 구하여 지반의 변위를 구한 다음 접촉압력을 계산하여 분리영역을 확인해야 하는 번거로움이 있다. 따라서 지반의 유연도 행렬의 변환 행렬인 상호작용 행렬로 변환하여 해석하는 방법을 이용하므로써 구성방정식의 해석에서 직접 접촉압력을 얻을 수 있어 분리영역 계산의 간편성과 시간을 단축할 수 있었다. 둘째, 분리영역을 추적할 때 분리 경계부근에서 대개 판의 반경의 1/200이하의 크기로 요소를 분할하여야 수렴하는 데, 본 연구는 먼저 요소를 거칠게 분할하여 시산으로 인장과 압축이 한 요소에서 교차하는 일정한 값을 갖는 요소를 찾아 인장과 압축의 교차점을 구하여 이점에서 요소가 분할되도록 구조계 전체를 재분할한 다음 위 계산을 다시 반복하는 방법을 사용함으로써 실용적 수준의 요소 분할로도 분리를 고려한 단성지반 위에 놓인 축대칭 원판의 상호작용 해석을 할수 있는 방법을 제안하였다. 본 연구는 바퀴하중을 반복해서 받는 콘크리트 포장판이나 전면 기초를 갖는 구조물의 상호작용 해석에 활용할 수 있을 것으로 생각된다.

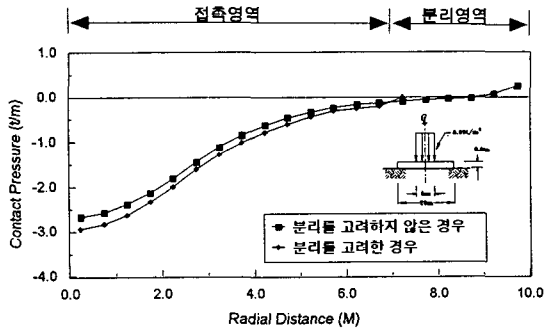
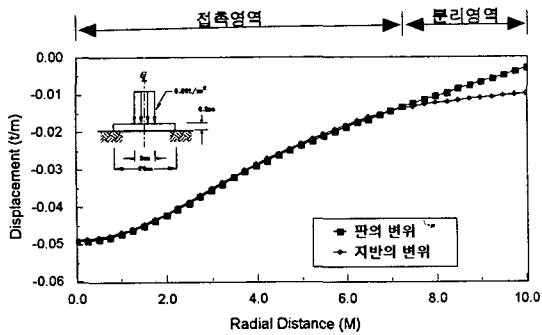


Fig. 6. Displacement of plate and half-space Fig. 7. Contact pressure of plate and half-space

참고문헌

1. 趙顯榮, 鄭振煥, 金成喆(1997). "分離를 고려한 彈性地盤 上的 軸對稱圓板의 靜的 相互作用 解析에 關한 研究". 대한토목학회 논문집, Vol. 17, No. 1-4, pp. 589 - 596.
2. Bowles, J. E.(1974). "Analytical and computer methods in foundation engineering." McGraw-Hill, Kogakusha.
3. Cheng, M. S.(1978). "A simplified finite element solution for the plates on elastic foundation." Computer & Structures, Vol. 8.
4. Cho, H. Y., Cheung, J. W. and Kim, S. C.(1995). "A contact pressure analysis between circular plate under axisymmetric loading and elastic half-space considering local separation." EASEC-5, pp. 161 - 168.
5. Hinton, E. and Owen, D. R. J.(1977). "Finite element programing." Academic, New York.
6. Kolar, V. and Nemeč, I.(1989). "Modeling of soil-structure interaction." Elsevier, New York.
7. Selvadurai, A. P. S.(1979). "Elastic analysis of soil foundation interaction." Elsevier, New York.
8. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.(1989). "The finite element method 4th ed." McGraw-Hill, London, Vol. 1, 2.