

판과 지반의 분리를 고려한 반무한 탄성지반상에 놓인 사각형 평판의 접촉응력 해석

The Analysis of Contact Pressure of Plate on Elastic Half-Space Considering
Local Separation between Plate and Half-Space

조현영* 정진환** 김성철*** 김호진****
Cho, Hyun-Yung Cheung, Jin-Hwan Kim, Sung-Chul Kim, Ho-Jin

ABSTRACT

It is one of classical problems in the elastic theory to analyze contact stresses between elastic bodies. Concrete pavements under traffic wheel loads can be considered as one of these typical problems. In the paper, Mindlin plate theory is used to consider the transverse shear effect, 8-node isoparametric plate bending element is adopted in this study, and an elastic plate resting on tensionless elastic half-space is analyzed by finite element method.

The Boussineq's solution of elastic half-space is used to evaluate the flexibility of foundation. To obtain the boundary of contact area, the flexibility matrix of foundation is modified after each cycle of analysis iteratively. A Numerical example is presented by using these method.

1. 서 론

지반에 놓인 평판의 경우 지반의 강도가 평판의 변위와 응력에 영향을 미치고, 평판의 강성이 지반의 처짐과 접촉응력의 분포에 영향을 미치는 상호작용이 판과 지반사이에 존재한다. 그러므로 지반이 평판에 미치는 영향을 고려하지 않고서는 지반 위에 놓인 평판의 거동을 완전히 파악할 수 없으며, 평판을 통해 지반에 전달되는 힘으로 인한 지반의 처짐과 지반내의 응력도 계산할 수 없다. 본 연구에서는 자연상태의 지반을 반무한 탄성체로 이상화하고, 반무한 탄성체에 단일집중하중이 작용하는 문제에 대한 Boussinesq의 해를 이용하여 상호작용을 해석하였으며 평판과 지반

* 부산대학교 토목공학과 교수

** 부산대학교 토목공학과 부교수

*** 부산대학교 토목공학과 박사과정 수료

**** 부산대학교 토목공학과 석사과정

의 상호작용 해석에서 발생할 수 있는 지반과 평판의 분리현상을 고려하여 접촉응력을 해석하는 방법을 연구하였다

그리고, 평판은 곡선경계의 요소분할이 용이하도록 8절점 등매개변수 요소를 사용하였고, 지반에 대해서는 한 요소를 Gauss 적분점의 수와 일치하는 여러개의 소영역으로 분할한 후 소영역내에서는 그 소영역에 포함된 Gauss 적분점에서의 접촉 압력값으로 접촉 압력이 일정하다고 가정하여 접촉 압력의 항을 상수로 만들어 적분식을 해석 적분하였다.

2. 본론

2-1 평판의 유한요소 정식화

본 논문에서는 판의 형상에 관계없이 적용할 수 있고 직선변위와 회전변위의 연속조건을 동시에 만족시키는 그림1과 같은 8절점 등매개변수 요소를 사용하였다. 또, 판의 거동은 전단변형을 고려하는 Mindlin 평판이론을 사용하였다

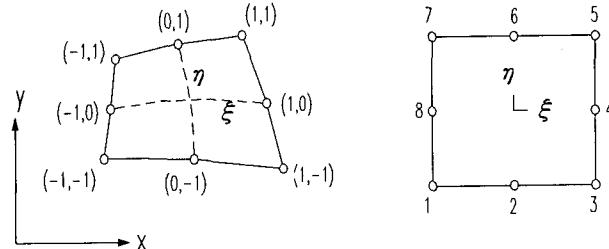


Fig.1 8-node two-dimensional isoparametric element

응력 $[\sigma]$, 변형률 $[\varepsilon]$, 및 변위 $[\delta]$ 간의 관계는 다음과 같다.

$$[\sigma] = [M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_x \ Q_y]^T \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= [\chi_x \ \chi_y \ \chi_{xy} \ -\Phi_x \ -\Phi_y]^T \\ &= \left[-\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right) \ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right) \right]^T \end{aligned} \quad (2)$$

$$[\varepsilon] = [B][\delta]^e \quad (3)$$

$$\text{여기서, } [B]_i = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad \text{여기서, } [D] = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{여기서, } [D_f] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[D_s] = \frac{Et}{2.4(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

지표면의 분포하중 q 를 받는 요소의 총 포텐셜에너지는

$$\pi^e = \frac{1}{2} \int_v \delta^{eT} B^T D B \delta^e dV - \int_v \delta^{eT} N^T P dV - \int_A \delta^{eT} N^T q dA - \delta^e P_P \quad (8)$$

식(8)에 정류조건 $\partial \pi^e / \partial \delta^e = 0$ 을 적용하면

$$\int_v B^T D B \delta^e dV - \int_v N^T P dV - \int_A N^T q dA - P_p = 0 \quad (9)$$

이를 간단히 하면

$$[K_p][\delta]^e - [F] = 0 \quad (10)$$

$$\text{여기서, } [K_p] = \int_v B^T D B dV \quad (11)$$

$$[F] = \int_A N^T P dA + \int_v N^T q dA + P_p$$

위 식(11)은 판의 요소강도 행렬이고 이 요소 강도행렬을 평판전체 요소에 대하여 중첩하면 평판 전체의 강도행렬이 된다.

2-2 반무한 탄성체 지반에 대한 Boussinesq의 해

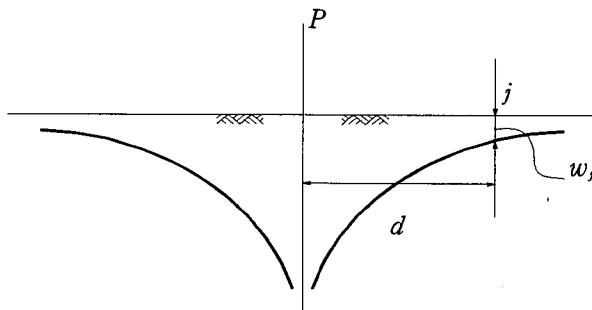


Fig.2 Deflection of elastic half space due to the single point load

그림2에서 Boussinesq 는 지표면상의 하나의 집중하중에 의한 지표면상의 임의 점의 변위를

다음 식으로 제안하였다.³⁾

$$w_j = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s d} P \quad (12)$$

마찬가지로 그림3에서 미소영역 dA 에 작용하는 분포하중 q 에 의한 지표면의 변위 w_j 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$w_j = \beta \int_A \frac{q(x, y) dA}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} \quad (13)$$

여기서, $\beta = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s}$

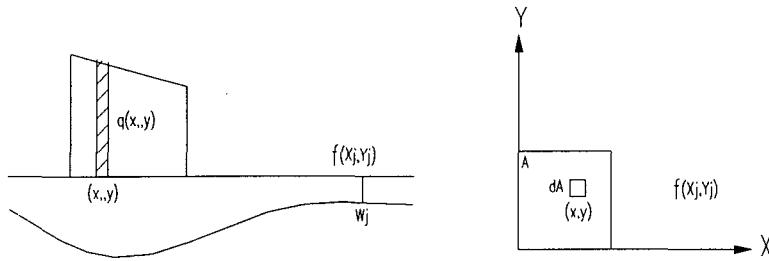


Fig.3 Deformation of half-space due to distributed loading

2-3 소영역 분할 법에 의한 정식화³⁾

식(13)을 살펴보면 접촉 압력 $q(x, y)$ 의 함수 형태를 알 수 없으므로 적분을 수행하는 것이 불가능함을 알 수 있다. 그러므로 적절한 가정을 도입하여 접촉 압력 함수 $q(x, y)$ 를 상수 q 로 바꾼다면 식(13)의 적분수행은 가능하게 된다.

각 지반의 요소에 대해서 3점 Gauss 적분을 수행하는 경우 하나의 요소에 대응하는 반무한 탄성체 경계상의 면적을 9개의 소영역으로 분할하여 각 소영역내의 접촉압력이 그 소영역내의 Gauss 적분 점에서의 접촉 압력 q_G 로서 일정하다고 가정하면 적분수행은 가능하게 된다.

따라서 식(13)은 다음과 같이 다시 쓸수 있다.

$$w_j = \beta [q_{G_1} \int_{A_{G_1}} \frac{dA_{G_1}}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} + q_{G_2} \int_{A_{G_2}} \frac{dA_{G_2}}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} + \dots + q_{G_9} \int_{A_{G_9}} \frac{dA_{G_9}}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}}] \quad (14)$$

여기서, q_{G_i} 는 i 번째 Gauss 적분 점에서의 접촉 압력 값이고 A_{G_i} 는 q_{G_i} 가 등분포한다고 가정되어지는 면적이다.

이제 식(14)에 포함되어 있는 적분을 수행하면 된다.

$$I = \int_A \frac{dA}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} \quad (15)$$

위 식의 적분을 수행하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$\begin{aligned}
I = & (y_2 - y_j) \log \left| \frac{(x_2 - x_j) + \sqrt{(x_2 - x_j)^2 + (y_2 - y_j)^2}}{(x_1 - x_j) + \sqrt{(x_1 - x_j)^2 + (y_2 - y_j)^2}} \right| \\
& + (x_1 - x_j) \log \left| \sqrt{1 + \frac{(y_2 - y_j)^2}{(x_1 - x_j)^2}} - \frac{(y_2 - y_j)}{(x_1 - x_j)} \right| \\
& - (x_2 - x_j) \log \left| \sqrt{1 + \frac{(y_2 - y_j)^2}{(x_2 - x_j)^2}} - \frac{(y_2 - y_j)}{(x_2 - x_j)} \right| \\
& - (y_1 - y_j) \log \left| \frac{(x_2 - x_j) + \sqrt{(x_2 - x_j)^2 + (y_2 - y_j)^2}}{(x_1 - x_j) + \sqrt{(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2}} \right| \\
& - (x_1 - x_j) \log \left| \sqrt{1 + \frac{(y_1 - y_j)^2}{(x_1 - x_j)^2}} - \frac{(y_1 - y_j)}{(x_1 - x_j)} \right| \\
& + (x_2 - x_j) \log \left| \sqrt{1 + \frac{(y_1 - y_j)^2}{(x_2 - x_j)^2}} - \frac{(y_1 - y_j)}{(x_2 - x_j)} \right|
\end{aligned} \tag{16}$$

식(14) 를 다시 나타내면,

$$w_j = \beta (I_{A_{G_i}} [N^1] + I_{A_{G_i}} [N^2] + \dots + I_{A_{G_i}} [N^9]) \{q^e\} \tag{17}$$

여기서, $[N^i] = [N_1^i \ N_2^i \ \dots \ N_8^i]$

$$\{q^e\} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_8]^T$$

판의 한 요소영역에 작용하는 접촉압력에 의한 전체 접촉절점들에서 발생하는 수직 쳐짐은 다음과 같다.

$$W = G^e q^e \tag{18}$$

G^e 의 한 요소 g_{ij}^e 는 다음과 같다.

$$g_{ij}^e = \beta [I_{A_{G_i}} N_j^1 + I_{A_{G_i}} N_j^2 + \dots + I_{A_{G_i}} N_j^9]$$

식(18) 을 접촉요소별로 중첩하면

$$W = G q \quad \text{따라서, } q = G^{-1} W \tag{19}$$

요소의 절점에서의 접촉압력과 등가의 접촉압력이 하는 가상 일이 같다는 조건을 이용하여 절점의 접촉압력을 등가의 접촉압력으로 변환하여야 한다. 임의의 한 요소에 대해서 고찰하면

$$W^{(e)\top} Q^{(e)} = \int_A W^T q \ dA \tag{20}$$

식(20) 에 $q = N q^{(e)}$ $W = N W^{(e)}$ $dA = \det J d\xi d\eta$ 를 대입하면

$$Q^{(e)} = E^{(e)} q^{(e)} \tag{21}$$

$$\text{여기서, } E^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T N \det J d\xi d\eta$$

각 요소에 대한 접촉압력의 등가절점력계를 모두 중첩하면 식(21)에서

$$Q = \sum Q^{(e)} = (\sum E^{(e)})[q] = E[q] = E G^{-1} W \tag{22}$$

$$Q = K_G W \quad (23)$$

여기서, $K_G = E G^{-1}$

평판과 지반의 두 강도행렬을 중첩하면

$$P = [K_P + K_G] [\delta] \text{ 혹은 } P = [K] [\delta] \quad (24)$$

여기서, $[K] = [K_P + K_G]$ 이며 판과 반무한 탄성체 지반 전체의 강도행렬이 된다.

식(24)에서 변위 $[\delta]$ 를 구하면 $[\delta]$ 중의 지표절점의 수직변위 W 를 추출하여 식(19)에서 절점 접촉압력을 얻는다. 같이하여 판의 변형률과 응력은 식(3)과 식(4)에서 구할 수 있다.

3. 수치계산 예 및 고찰

지반 상에 두께 30 cm , 길이 480 cm 의 정방형판의 중앙부에 정방형으로 등분포하중 $q = 10\text{ kg/cm}^2$ 가 작용하는 경우에 대한 해석을 수행하였다.

(여기서 판은 $E_p = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_p = 0.18$, 지반은 $E_s = 800 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_s = 0.25$)

계산을 두 과정으로 나누어 수행하였는데 첫 번째 계산에서는 접촉압력이 인장인 요소에 대하여 지반의 기여도가 없는 것으로 생각하고 지반의 유연도 행렬 $[G]$ 를 재구성해서 접촉압력을 계산한다. 이 과정을 접촉압력이 안정된 값이 될 때까지 수회 반복하여 접촉 역과 분리영역을 구하였다. 그리고 이 접촉 역으로 지반만을 다시 모델링하여 재계산하는 두 번째 방법을 수행하였다.

그림4은 두 번째 계산에서 얻어진 대각선 방향의 판과 지반의 변위와 접촉응력의 최종 값을 나타낸다. 또한 그림5는 두 가지 계산에서 얻어진 접촉 역을 비교한 것으로 거의 비슷한 영역을 가짐을 알 수 있다.

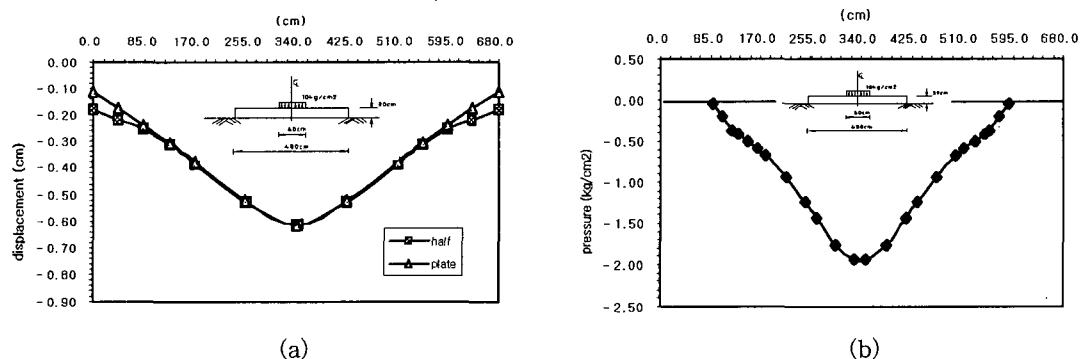


Fig.4 (a) The Vertical displacements along the diagonal

(b) The contact pressures along the diagonal

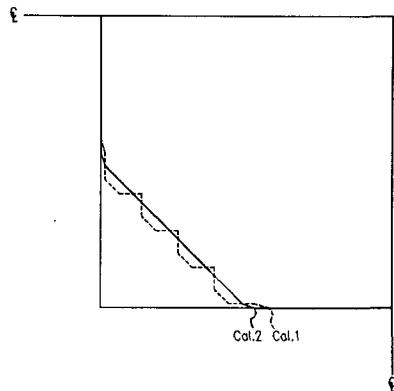


Fig.5 Boundary of \pm contact area

4. 결 론

지반의 강성도 행렬을 구할 때 수치적분의 방법을 사용한 경우에는 접촉 압력이 절점 별로 요철이 나타난다. 그러나, 본 논문에서는 소영역 분할 법을 사용함으로서 이러한 문제점을 방지할 수가 있었다.

반복계산시 판과 지반을 재분할하는 과정을 피하고 인장의 접촉압력이 발생하는 영역을 분리 역으로 생각하여 이것을 이용하여 유연도 행렬 $[G]$ 를 접촉영역만 남겨놓고 축소 조정하는 과정을 반복하는 방법으로서 실용적 해답을 줄 수 있음을 확인하였다.

본 논문은 기둥에 의해 전달되는 하중을 받는 확대기초 및 차량 윤하중을 받는 콘크리트 포장판의 해석에 적용될 것으로 예상된다.

5. 참고문헌

1. Hyun-young Cho, Jin-hwan Cheung, "Elastic Analysis of Plates Resting on Elastic Half-Space Considering the Local Segregation Between Plates and Foundation", Structural Engineering and Construction, Vol. 1, (1993).
2. 趙顯榮, 鄭振煥, 鄭之瑛, “分離를考慮한 板과 地盤의 接觸應力 解析에 關한 研究”, 부산대학교 공과대학 논문집, 제 41호, (1991).
3. 趙顯榮, 李外得, 韓忠穆, “彈性上 위에 놓인 板 및 箱構造의 反力分布 解析”, 부산대학교 공과대학 연구보고, 제 38호, (1989).
4. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, "The Finite Element Method", 4nd edition, McGraw Hill", (1984)
5. Larry J. Segerlind, "Applied Finite Element Analysis", 2nd ed, John Wiley & Sons, (1984).
6. A. P. S. Selvadurai, "Elastic Analysis of Soil Foundation Interaction", Elsevier, New York, (1979).
7. E. Hinton, D. R. J. Owen, "Finite Element Programming", Academic, (1977).
8. S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", 2nd ed, McGraw-Hill, (1976).