

분할구조기법을 이용한 장방형판의 휨해석에 관한 연구
A Study on the Bending Analysis of
Rectangular Plates by Substructuring Technique.

오 숙 경*	김 성 용*
Oh, Sook-Gyoung	Kim, Sung-Yong
김 일 중**	이 용 수***
Kim, Il-Jung	Lee, Yong-Soo

ABSTRACT

This study is the bending analysis of rectangular plates with 4-sides simply supported by Finite Element Method using substructuring technique. In finite element method, as the more number of finite element, the more dimension of matrix, it is difficult to obtain accuracy solution. In this paper substructuring technique is applied to finite element method in order to reduce the dimension of matrix according to the number of finite element mesh. To validate finite element method using substructuring technique, deflections and moments of rectangular plates by that method is compared with those of references.

Considering the symmetry of the plate and load, one fourth of plate is analyzed. Operating time and the error of solutions according to the number of finite element mesh and substructure are compared with each other.

1. 서론

판은 선박, 항공기, 우주, 기계, 건축, 토목분야등 제반 공학분야의 구조재를 이루는 기본단위로써 하중조건에 따라 휨해석이나 좌굴해석에 의해 판의 구조적 거동을 파악할 수 있다. 판에 면내력이 작용하는 경우 판의 안정문제에 의해 극한내력이 결정된다. 그러나 면외 수직하중이 작용하는 경우는 판의 휨해석에 의해 구조적 거동을 파악하여 판 설계에 이용한다. Navier(1820)는 4변 단순지지 장방형판의 휨에 대한 처짐방정식을 이중삼각급수로 가정하였고 M. Lévy(1899)는 처짐방정식을 삼각급수(x 방향)와 일반급수(y 방향)의 곱으로 가정하였다. 그러나 고전적해석법에 의한 판의 휨해석은 판의 형상이나 하중형태 및 지지단의 조건에 따라 해석이 복잡하거나 불가능한 경우가 생기기도 한다.

근래들어 컴퓨터의 발달로 컴퓨터를 이용한 근사해석법중의 하나인 유한요소법이 개발되었고 이 해석법을 판의 휨문제에 적용할 경우 임의의 조건에 대한 해석도 가능하게 되었다. 일반적으로

* 원광 대학교 건축공학과 석사과정

** 정읍공전 건축과 전임강사

*** 원광대학교 건축공학과 교수

유한요소해석시 요소수를 증가시키에 따라 유한요소해석해는 기존의 이론해에 근접하게 된다.

그러나 일반 PC를 사용하여 유한요소해석을 하는 경우 유한요소수를 증가시키에 따라 매트릭스의 차수가 높아져 제한을 받아왔다. 유한요소수를 증가시켜 유한요소해석을 가능하게 하는 방법으로 매트릭스의 띠편(Band Width)을 이용하는 방법이나 프론탈법(Frontal method)등이 있으나 이는 실제 매트릭스의 차수를 줄이는 것이 아니라 연립방정식의 해를 구할 때 매트릭스성분이 0이 되는 요소를 제외시키거나 전체구조물의 강성 매트릭스를 완전히 조합하지 않고 컴퓨터 보조기억장치를 이용하여 해석하는 방법이다.

본 연구에서는 전체구조물의 강성매트릭스의 차수를 줄이면서 구조해석할 수 있는 방법으로 근래까지 대부분 전단벽이나 Frame 해석에만 적용되어 온 분할구조(Substructuring)기법을 판의 휨해석에 적용하여 유한요소해석프로그램을 개발하였다. 정밀도 및 수렴성등을 알기 위해 분할구조기법을 적용한 유한요소해석과 기존의 유한요소해석해 및 고전해를 비교분석하였다. 대칭성을 고려하여 1/4박판에 대해 해석하였으며, 하중형태는 등분포 하중 및 중앙집중하중이 가해진 경우로 하고 지지단은 4변 단순지지로 국한하여 해석하였다.

판을 해석하기 위해 다음과 같이 가정한다.

- 1) 평판의 재질은 균일하고 등방성이며, 후크의 법칙을 따르며 초기 결함(Initial imperfection)은 없다.
- 2) 판은 그 두께가 판의 다른 치수에 비해 작다.
- 3) 하중을 받는 판의 처짐은 그 두께에 비해 작다.

2. 판의 휨이론

2-1. 고적적 해석법에 의한 해석

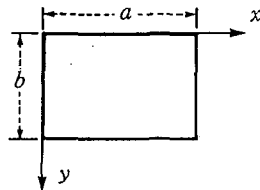


그림.1 4변단순지지평판

4변 단순지지된 장방형 평판의 휨해석은 판 휨의 미분방정식에 적당한 경계조건을 대입함으로써 얻을 수 있다.

평판의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \quad (1)$$

여기서 w : z방향의 변위

D : 휨강성

q_0 : 판의 중앙에 작용하는 하중의 크기

평판의 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x=0, a \text{에서 } w=0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0$$

$$y=0, b \text{에서 } w=0, \quad \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \quad (2)$$

식(1)의 미분 방정식을 풀기 위해 M. Lévy가 가정된 급수함수 형태로 변위 w 를 다음과 같이 가정한다.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3)$$

여기서 Y_m 은 y 의 함수이다.

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (4)$$

모멘트-곡률의 관계는 다음과 같다.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = 2D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

x 축을 따라 생기는 휨모멘트 M_x , M_y 는 (5)을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(M_x)_{y=0} = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2 \pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2\nu B_m - (1-\nu)A_m] \sin \frac{m\pi x}{a} \\ (M_y)_{y=0} = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2 \pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2B_m + (1-\nu)A_m] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (6)$$

전단력과 경계의 반력은 다음과 같다.

$$Q_x = \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) = \frac{q(a-2x)}{2} - 2qa\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ Q_y = \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = -2qa\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (7)$$

y 축에 따른 하중값은

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0} \quad (8)$$

하중은 평판의 모서리에서 집중된 반력에 의해 평형이 유지된다. 반력의 크기는 다음식에서 주어진다.

$$R = 2(M_{xy})_{x=a, y=b/2} = 2D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b/2} \quad (9)$$

2-2. 유한요소법에 의한 해석

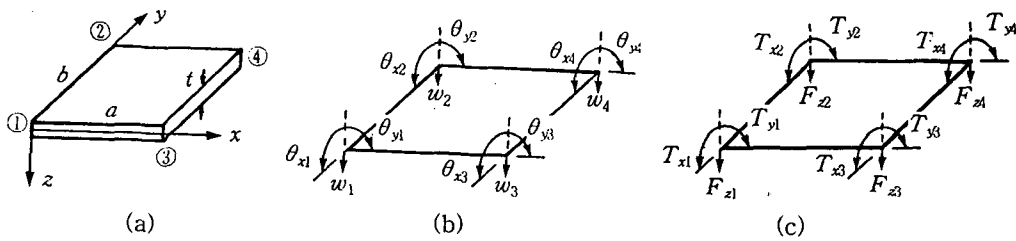


그림 2 판요소의 좌표축(a), 변위(b), 힘(c)

그림 2-2에서 보는 바와 같이 요소는 총 12개의 자유도를 가지게 되고 이에 상응하는 모멘트와 힘은 각 절점에서 두가지 모멘트 T_x , T_y 와 전단력 F_z 로 되어 있다.

따라서 요소전체에 관한 변위 및 힘벡터는 다음과 같다.

$$\{\delta^e\} = [\{\delta_1\} \{\delta_2\} \{\delta_3\} \{\delta_4\}]^T$$

$$= [\theta_{x1} \theta_{y1} w_1 \theta_{x2} \theta_{y2} w_2 \theta_{x3} \theta_{y3} w_3 \theta_{x4} \theta_{y4} w_4]^T \quad (10)$$

$$\{F^e\} = [\{F_1\}\{F_2\}\{F_3\}\{F_4\}]^T$$

$$= [T_{x1} T_{y1} F_{z1} T_{x2} T_{y2} F_{z2} T_{x3} T_{y3} F_{z3} T_{x4} T_{y4} F_{z4}]^T \quad (11)$$

여기서 w : 횡변위

$$\theta_x = -\partial w / \partial y$$

$$\theta_y = -\partial w / \partial x$$

판에 대한 변위함수는 다음과 같이 가정한다.

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (12)$$

임의점의 변위와 변형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (13)$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{pmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{pmatrix} = [C]\{a\} = [B]\{\delta^e\} \quad (14)$$

여기서 $[A]$: 형태 함수 매트릭스

$[C]$: 판의 휨에 관한 매트릭스

$$[B] = [C][A]^{-1}$$

응력의 상태는 다음과 같이 매트릭스 형태로 나타낼 수 있다.

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{pmatrix} = [D]\{\varepsilon(x, y)\} \quad (15)$$

여기서 M_x, M_y : 요소의 단위 길이에 발생한 내부 휨모멘트

M_{xy} : 요소의 단위 길이에 발생한 내부 비틀림모멘트

$[D]$: 강성 매트릭스

식(7)에 식(5)의 $\{\varepsilon(x, y)\}$ 를 대입하면 요소의 응력과 절점변위 사이의 관계식이 얻어진다.

절점하중 $\{F^e\}$ 와 변위 $\{\delta^e\}$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\{F^e\} = \left[\int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] dx dy \right] \{\delta^e\} = [K^e]\{\delta^e\} \quad (16)$$

여기서 $[K^e]$: 요소 강성 매트릭스

3 분할구조기법을 이용한 유한요소의 해석

전체구조물을 n 개의 분할구조로 분할을 하여 독립 구조와 같이 개개의 분할구조를 각각 분석하고 난 다음 전체 구조의 해석으로 발전시킨다.

주어진 구조 시스템의 분할구조의 절점의 정적 평형을 나타내는 방정식은

$$[S_c^n][\Delta_c^n] = [JL_c^n] + [R_c^n] \quad (17)$$

여기서 $[S]$: 완벽한 구조의 강성 매트릭스

$[\Delta]$: 완성된 절점 변위 매트릭스

$[JL]$: 완성된 절점의 하중 매트릭스

$[R]$: 완성된 지지 반력 매트릭스

n : 특별한 영역에서 나타나는 분할구조

c : 완전한 구조물

n 번째 분할구조의 절점 평형 방정식은 구속되지 않은 절점 변위와 구속된 경계 변위로 분할될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{uu}^n & S_{ur}^n \\ S_{ru}^n & S_{rr}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_u^n \\ \Delta_r^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JL_u^n \\ JL_r^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_r^n \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서 $[S^n]$: n 번째 분할구조의 강성 매트릭스

u : 비구속성분, r : 구속성분

분할구조에서 고정된 경계의 반력을 구하면 다음과 같다.

$$[R_{rd}^n] = [S_r^n][\Delta_{rd}^n] \quad (19)$$

여기서 $[S_r^n] = [S_{rr}^n] - [S_{ru}^n][S_{uu}^n]^{-1}[S_{ur}^n]$

전체 시스템에서 완전한 강성 매트릭스 $[S_c]$ 와 완전한 절점 하중 매트릭스 $[JL_c]$ 는 전체 구조에서 조합될 수 있다.

$$[S_c][\Delta_c] = [JL_c] + [R_c] \quad (20)$$

여기서 c : 완전한 구조체

식(20)에서 완전한 구조 강성 매트릭스 $[S_c]$ 는 다양한 분할구조의 강성 계수 총합에 의해 조합된다.

$$S_{ij} = \sum_n S_{ij}^n \quad (21)$$

여기서 S_{ij}^n : i, j 라벨에 의해 구별되는 n 번째 분할구조에서 강성 계수

식(20)은 실제 시스템의 경계를 정의하는 절점의 구속된 변위 성분과 비구속 성분으로 분할할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [S_{uu}] & [S_{ur}] \\ [S_{ru}] & [S_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [JL_u] \\ [JL_r] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [R_r] \end{bmatrix} \quad (22)$$

식(22)로 부터 분할구조경계에서 공통된 절점 변위의 비구속된 성분과 순수 경계 절점의 변위의 비구속 성분뿐만 아니라 지지단 반력 성분이 다음식처럼 결정된다.

$$[\Delta_u] = [S_{uu}]^{-1}[JL_u] \quad (23)$$

$$[R_r] = [S_{rr}][S_{uu}]^{-1}[JL_u] - [JL_r] \quad (24)$$

각각 분할구조와 함께 연결된 절점의 실제 변위는 다음과 같다.

$$[\Delta_u^n] = [\Delta_u^n] - [S_{uu}^n]^{-1}[S_{ur}^n][\Delta_{rd}^n] \quad (25)$$

전체 구조의 비구속된 절점의 모든 순수 변위는 부재의 평형으로 표현되는 적합 조건식을 사용하여 계산할 수 있다.

$$[M]_i = [K]_i[\bar{\delta}]_i + [FM]_i \quad (26)$$

여기서 $[M]$: 부재의 끝단의 거동

$[K]$: 요소강성 매트릭스

$[\bar{\delta}]$: 요소의 변위 매트릭스

$[FM]$: 고정단 모멘트, i : 요소번호

4. 비교분석

본 연구에서는 4변단순지지된 정방형평판의 휨에 대해 해석하였다. 고전해와 유한요소해석에 의한 해석해와 분할구조기법을 이용해 개발한 프로그램의 해석해를 비교하였다. 이와 같이 고전

해와의 비교를 통하여 신뢰성이 입증된 분할구조프로그램을 이용해 판의 휨에 대한 근사적인 해를 얻을 수 있다. 고전해와 유한요소해석법, 그리고 분할구조해석법의 비교조건은 기존의 유한요소해석에 의한 요소분할수인 8×8 , 12×12 , 16×16 을 대상으로 하였다. 그리고 분할구조해석법으로는 24×24 까지 해석하였다. 분할구조 구분에 따른 분할방식은 그림.3과 같다. 컴퓨터프로그램실행은 IBM586-PC를 사용하였다.

해석을 위한 평판의 제원은 다음과 같다.

- 1) 탄성계수(E): 2,100,000
- 2) 포와송비(ν): 0.3
- 3) 휨강성($D = Et^3/12(1 - \nu^2)$): 1
- 4) 하중조건: 등분포하중($q_0 = 1$), 중앙집중하중($P = 4$)
- 5) 평판의 치수: $a = 100$, $b = 100$

표.1 등분포 하중(1/4판 기준)

고전해[Ref.6]			FEM[Ref.8]					SUBSTRUCTURE				
w	M_x	M_y	요소 분할수	w	M_x	M_y	OT	분할 구조수	w	M_x	M_y	OT
406000	479	479	4×4	412930	489.14	489.18	0.55s	2×1	412915.4	489.18	489.18	1.48s
				(-1.71%)	(-2.12%)	(-2.13%)		2×2	412908.7	489.17	489.17	1.48s
			6×6	409280	483.52	483.50	2.41s	2×2	409229.2	483.46	483.45	3.35s
				(-0.81%)	(-0.94%)	(-0.94%)		2×3	409360.6	483.46	483.57	3.57s
								3×3	409540.0	483.61	483.61	4.70s
			8×8	407950	481.45	481.45	3.79s	2×2	407911.3	481.41	481.41	7.80s
				(-0.48%)	(-0.51%)	(-0.51%)		2×4	408001.5	481.59	481.61	8.41s
			12×12					3×3	406843.4	479.72	479.68	27.80s
									(-0.21%)	(-0.15%)	(-0.14%)	s

* w : 최대처짐, M_x : x 축에 대한 최대모멘트, M_y : y 축에 대한 최대모멘트

OT:수행시간, ():오차

표.1은 등분포하중의 경우 고전해와 유한요소해석해와 분할구조기법에 의한 해석해를 비교한 것이다. 판의 중앙에서 고전해는 최대 처짐이 $w_{max} = 406000$ 이고, x 방향과 y 방향의 최대모멘트는 $M_{x_{max}} = 479$, $M_{y_{max}} = 479$ 이다. FEM의 경우 16×16 으로 요소를 분할하였을 때 $w_{max} = 407950$ 로 고전해와 비교한 결과 -0.48%의 오차를 보였고 최대모멘트는 $M_{x_{max}} = 481.45$, $M_{y_{max}} = 481.45$ 로 각각 -0.51%의 오차를 보였다. 분할구조기법을 이용한 경우 16×16 을 4개의 분할구조로 분할했을 때 최대처짐 $w_{max} = 407911.3$ 으로 고전해와 -0.47%의 오차를 보였고, 최대모멘트는 $M_{x_{max}} = 481.41$, $M_{y_{max}} = 481.41$ 로 고전해와 -0.50%의 오차를 보였다.

표.2 중앙집중하중(1/4판 기준)

고전해[Ref.6]			FEM[Ref.8]				SUBSTRUCTURE					
w	M_x	M_y	요소 분할수	w	M_x	M_y	OT	분할 구조수	w	M_x	M_y	OT
464			4×4	473.14 (-1.97%)	1.466	1.466	0.25s	2×1	473.13 (-1.97%)	1.4656	1.4656	1.49s
								2×2	473.12 (-1.97%)	1.4656	1.4656	1.49s
			6×6	468.63 (-1.00%)	1.633	1.633	1.76s	2×2	468.58 (-0.99%)	1.6331	1.6331	3.41s
								2×3	468.64 (-1.00%)	1.6330	1.6331	3.51s
								3×3	468.74 (-1.02%)	1.6331	1.6331	4.12s
			8×8	466.81 (-0.61%)	1.752	1.752	3.35s	2×2	466.77 (-0.60%)	1.7517	1.7518	7.80s
								2×4	466.87 (-0.62%)	1.7519	1.7520	8.51s
			12×12					3×3	465.12 (-0.24%)	1.9188	1.9188	27.19s

* w : 최대처짐, M_x : x 축에 대한 최대모멘트, M_y : y 축에 대한 최대모멘트

OT:수행시간, ():오차

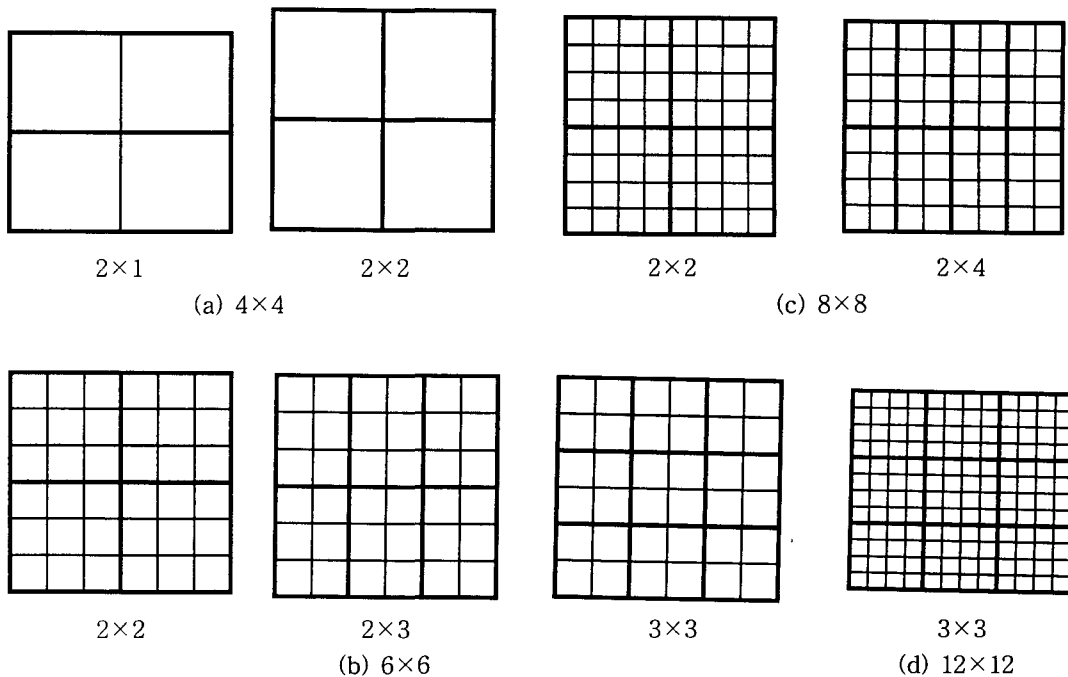


그림.3 분할구조 분할 방식(1/4판 기준)

표.2는 집중하중의 경우 고전해와 FEM에 의한 해석해와 분할구조기법에 의한 해석해를 비교한 것으로 판의 중앙에서 고전해는 최대 처짐이 $w_{max} = 464$ 로 나타났다. FEM의 경우 16×16으로

요소를 분할한 경우 $w_{\max} = 466.81$ 로 고전해와 비교한 결과 -0.61% 의 오차를 보였다. 분할구조 기법을 이용한 프로그램의 경우 16×16 의 요소를 4개의 분할구조로 분할한 경우 최대처짐 $w_{\max} = 466.81$ 로 고전해와 -0.61% 의 오차를 보였다.

이와 같이 고전해에 대해 유한요소해석해 및 분할구조기법을 이용한 유한요소해석해는 약 1% 이내의 적은 오차를 보였다.

분할구조기법을 이용하여 24×24 로 요소를 더 잘게 분할하여 해석을 하면 등분포하중의 경우 최대처짐은 $w_{\max} = 406843.4$ 으로 고전해와 비교한 결과 -0.21% 의 오차를 보였고 각 축에 대한 최대모멘트는 $M_{x_{\max}} = 479.72$, $M_{y_{\max}} = 479.68$ 로 -0.15% 의 오차를 보였다. 집중하중의 경우 최대 처짐은 $w_{\max} = 465.12$ 로 고전해와 -0.24% 의 오차를 보였고 각 축에 대한 최대모멘트는 $M_{x_{\max}} = 1.9188$, $M_{y_{\max}} = 1.9188$ 로 나타났다.

유한요소해석의 경우보다 분할구조를 이용한 경우 수행시간이 더 많이 소요됨을 볼 수 있고 동일한 전체요소수를 갖는 경우 분할구조수가 증가하면 수행시간이 증가됨을 볼 수 있으나 더 많은 유한요소분할을 하면 고전해에 근접함을 알 수 있다.

5. 결과

본 연구는 4변 단순지지평판의 휨해석에 있어 분할구조기법을 이용한 유한요소해석 컴퓨터프로그램을 개발한 것이다. 정밀도 및 수렴성에 대한 검증을 위해 고전해 및 기존 유한요소해와 본 해석해를 비교분석하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 동일 유한요소수인 경우 기존 유한요소해와 분할구조기법을 이용한 유한요소해는 거의 일치하였다.
2. 분할구조기법을 이용하여 유한요소수를 24×24 로 증가시킨 결과 등분포하중시 고전해와의 오차가 처짐은 -0.21% , M_x , M_y 는 각각 -0.15% , -0.14% 를 보였고 집중하중시는 처짐이 -0.24% 로 고전해에 더욱 근접하였다.
3. 기존 유한요소법보다 분할구조기법을 이용한 유한요소법이 수행시간은 더 많이 소요되었다.
4. 동일한 전체요소수를 갖는 경우 분할구조수가 증가하면 수행시간이 증가하였다.

Reference

1. Fred W. Beaufait, William H. Rowan, jr., Peter G. Hoadley and Robert M. Hackett, "Computer Methods of Structural Analysis", Prentice-Hall, 1970
2. H. Petersson and E. P. Popov, "Substructuring and Equation System Solution in Finite Element Analysis", Computer and Structures, Vol7, 1977
3. K. C. Rockey, H. R. Evans, D. W. Griffiths, D. A. Nethercot, 'The Finite Element Method', Crosby Lockwood Staples, 1975
4. Moshe F. Rubinstein, "Matrix Computer Analysis of Structures", Prentice-Hall, 1966
5. Rodolph Szilard, "Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods", Prentice-Hall, 1974
6. Stephen P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1959
7. T. Furuike, "Computerized Multiple Level Substructuring Analysis", Computer and Structures, Vol2, No.4-6, 1972
8. 小堀爲雄, 吉田博, "有限要素法による 構造解析プログラム", 丸善株式會社, 1980
9. 최창근, "유한요소해석", 집문당, 1992