

명시적 주파수종속 2 차원 무한요소를 사용한 지반-구조물 상호작용의 시간영역해석

Soil-Structure Interaction Analysis in the Time Domain Using Explicit Frequency-Dependent Two Dimensional Infinite Elements

윤정방*

Yun, Chung Bang

김두기**

Kim, Doo Kie

ABSTRACT

In this paper, the method for soil-structure interaction analyses in the time domain is proposed. The far field soil region which is the outside of the artificial boundary is modeled by using explicit frequency-dependent two dimensional infinite elements which can include multiple wave components propagating into the unbounded medium. Since the dynamic stiffness matrix of the far field soil region using the proposed infinite elements is obtained explicitly in terms of exciting frequencies and constants in the frequency domain, the matrix can be easily transformed into the displacement unit-impulse response matrix, which corresponds to a convolution integral of it in the time domain. To verify the proposed method for soil-structure interaction analyses in the time domain, the displacement responses due to an impulse load on the surface of a soil layer with the rigid bed rock are compared with those obtained by the method in the frequency domain and those by models with extend finite element meshes. Good agreements have been found between them.

1. 서 론

지반-구조물의 상호작용해석법으로는 크게 주파수영역해법과 시간영역해법을 들 수 있다. 주파수영역해법은 지반-구조물 상호작용계의 운동방정식에서 시간과 공간의 공통변수를 Fourier 변환을 통해 각 주파수에 대한 공간변수만 운동방정식으로 변환한 후, 유사정적(quasi-static)인 방법으로 주파수영역에서 응답을 구한 후, 주파수영역에서의 응답을 Fourier 역변환을 통해 시간영역에서의 어떤 시점에서의 응답을 구하는 방법으로 시간영역해법에 비해 비교적 간단히 문제를 풀 수 있다. 주파수영역해법과는 달리 시간영역해법은 이론적으로 시간과 공간변수의 4차의 복잡한 문제를 끈다. 즉, 시간과 공간변수의 공통변수를 매시간마다 단계적으로 해를 구하며, 일반적으로 주파수영역보다 해석비용이 많이 든다. 하지만 시간영역해법은 주파수영역해법에 비해 시간과 공간의 공통변수를 수치적 변환없이 구하므로 정확하고 자연스러운 결과를 얻을 수 있으며, 시간영역해법은 기본적으로 비선형문제를 다룰 수 있다는 장점이 있다.

최근들어 지반-구조물 상호작용계의 비선형성을 고려하기 위해 시간영역해법에 관한 많은 수치적 연구가 시도되고 있다. 대표적인 시간영역해법은 유한요소와 경계요소의 결합방법(Estorff & Kausel, 1989; Estorff, 1991; Cheung , Tham, & Lei, 1993; Guan & Novak, 1994)을 들 수 있다. 이 방법은 유한요소를 사용하여 내부영역을, 경계요소를 사용하여 외부영역으로의 파동의 발산을 모형화하는 방법으로, 총상자반의 경우에 기본해를 구하는 문제와 유한요소와의 조합이 어렵다. 시간영역해법의 최근 시도되고 있는 다른 한 방법으로는 주파수영역에서 구한 외부영역의 동적강성행렬을 시간영역해석에 이용하는 방법(Wolf, 1988; Hayashi & Katukura, 1990; Wolf & Chong, 1996)이 있다. 이 방법은 주파수영역에서 구한 외부영역의 동적강성행렬을 Fourier 역변환이나 기타의 수치적 방법을 사용하여 시간영역에서의 외부영역과의 상호작용력을 구하는 방법으로, 주파수영역에서의 외부영역의 동적강성행렬을 쉽게 구할 수는 있으나, 그 시간영역으로의 수치적 변환이 어렵다.

본 연구에서는 명시적 주파수종속 2 차원 수평, 수직, 모서리무한요소(윤정방 등, 1997)를 사용한 시간영역에서의 지반-구조물 상호작용해석법을 제시하였으며, 예제해석과 주파수영역해법과의 비교를 통해 시간영역에서의 명시적 주파수종속 2 차원 무한요소의 거동을 검증하였다. 명시적 주파수종

* 정회원·한국과학기술원 토목공학과 교수

**·한국과학기술원 토목공학과 박사과정

속 2 차원 무한요소를 사용하면 주파수영역에서 외부영역의 동적강성행렬을 주파수에 관한 명시적 형태로 구할 수 있으므로 수치적 변환없이 쉽게 시간영역으로 변환할 수가 있다.

2. 명시적 주파수종속 무한요소

수평, 수직, 모서리무한요소의 질량과 강성행렬에 대한 구성행렬(component matrix)은 다음과 같다.

$$[m_{ab}]_{(2 \times 2)} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b d\Omega, \quad [k_{ab}]_{(2 \times 2)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega \quad (1)$$

여기서 \mathbf{B}_a 와 \mathbf{B}_b 는 변형도-변위행렬이며, \mathbf{D} 는 탄성행렬이다. 근사적 다중파동함수와 무한요소의 정의를 사용하면 명시적 주파수종속 무한요소의 구성행렬은 아래와 같다.

$$[m_{ab}] = \frac{1}{(a+i\omega)^2} [m_1] + \frac{1}{a+i\omega} [m_2], \quad [k_{ab}] = \frac{1}{a+i\omega} [k_1] + [k_2] + (a+i\omega) [k_3] \quad (2)$$

여기서 $[k_1]$, $[k_2]$, $[k_3]$, $[m_1]$ 과 $[m_2]$ 는 주파수에 무관한 복소상수 구성행렬이다.

식 (2)와 같은 명시적 주파수종속인 무한요소의 구성행렬을 조합하면 명시적 주파수종속 2 차원 무한요소의 질량 및 강성행렬을 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}_{pp}^{(e)}(\omega) = \frac{1}{(a+i\omega)^2} \mathbf{M}_{pp}^1 + \frac{1}{a+i\omega} \mathbf{M}_{pp}^2, \quad \mathbf{K}_{pp}^{(e)}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} \mathbf{K}_{pp}^1 + \mathbf{K}_{pp}^2 + (a+i\omega) \mathbf{K}_{pp}^3 \quad (3)$$

여기서 \mathbf{K}_{pp}^1 , \mathbf{K}_{pp}^2 , \mathbf{K}_{pp}^3 , \mathbf{M}_{pp}^1 와 \mathbf{M}_{pp}^2 는 주파수에 무관한 복소상수행렬이다.

3. 외부영역의 동적강성행렬

일반좌표로 구성된 무한요소의 질량 및 강성행렬을 식 (4)와 같이 정의한 변환행렬(Yun 등, 1995)을 사용하여, 식 (5)과 같은 절점변위($\mathbf{u}^{(d)}$), 변변위($\mathbf{u}^{(s)}$) 및 내부변위($\mathbf{u}^{(b)}$)로 구성된 물리좌표계에서의 변위벡터($\mathbf{q}(\omega)$)로 정의된 질량 및 강성행렬($\mathbf{M}_{qq}^{(e)}(\omega)$, $\mathbf{K}_{qq}^{(e)}(\omega)$)로 변환한다.

$$\mathbf{p}(\omega) = \mathbf{T}_{pq} \mathbf{q}(\omega), \quad \mathbf{N}_q(r, z; \omega) = \mathbf{N}_p(r, z; \omega) \mathbf{T}_{pq} \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_{qq}^{(e)}(\omega) = \mathbf{T}_{pq}^T \left(\frac{1}{(a+i\omega)^2} \mathbf{M}_{pp}^1 + \frac{1}{a+i\omega} \mathbf{M}_{pp}^2 \right) \mathbf{T}_{pq} = \frac{1}{(a+i\omega)^2} \mathbf{M}_{qq}^1 + \frac{1}{a+i\omega} \mathbf{M}_{qq}^2 \quad (5a)$$

$$\mathbf{K}_{qq}^{(e)}(\omega) = \mathbf{T}_{pq}^T \left(\frac{1}{a+i\omega} \mathbf{K}_{pp}^1 + \mathbf{K}_{pp}^2 + (a+i\omega) \mathbf{K}_{pp}^3 \right) \mathbf{T}_{pq} = \frac{1}{a+i\omega} \mathbf{K}_{qq}^1 + \mathbf{K}_{qq}^2 + (a+i\omega) \mathbf{K}_{qq}^3 \quad (5b)$$

여기서 $\mathbf{N}_q(r, z; \omega) = [\mathbf{N}_d, \mathbf{N}_s, \mathbf{N}_b]$ 이며, $\mathbf{q} = \langle \mathbf{d}^T, \mathbf{s}^T, \mathbf{b}^T \rangle^T$ 이다.

식 (6)을 사용하여 앞에서 구한 물리좌표계에서의 명시적 주파수종속 2 차원 무한요소의 질량 및 강성행렬을 조합하면, 명시적 주파수종속인 외부영역의 동적강성행렬($\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)$)은 식 (7)과 같다.

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (6)$$

$$\mathbf{S}_{bb}^g(\omega) = \frac{1}{(a+i\omega)^2} \mathbf{S}^0 + \frac{1}{a+i\omega} \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 + i\omega \mathbf{S}^3 \quad (7)$$

여기서 \mathbf{S}^0 , \mathbf{S}^1 , \mathbf{S}^2 와 \mathbf{S}^3 는 복소상수행렬로 아래와 같다.

$$\mathbf{S}^0 = a^2 \mathbf{M}_{qq}^1 \quad (8a)$$

$$\mathbf{S}^1 = \mathbf{K}_{qq}^1 - 2a \mathbf{M}_{qq}^1 + a^2 \mathbf{M}_{qq}^2 \quad (8b)$$

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{K}_{qq}^2 + a \mathbf{K}_{qq}^3 + \mathbf{M}_{qq}^1 - a \mathbf{M}_{qq}^2 \quad (8c)$$

$$\mathbf{S}^3 = \mathbf{K}_{qq}^3 + \mathbf{M}_{qq}^2 \quad (8d)$$

식 (7)에서 \mathbf{S}^3 은 외부영역의 감쇠를 나타내며, $\omega = 0$ 일때의 동적강성행렬인 $\frac{1}{a^2} \mathbf{S}^0 + \frac{1}{a} \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 \equiv$ 외부영역의 정적강성을 나타낸다.

$\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)$ 를 유한요소로 구성한 내부영역의 동적강성행렬과 조합하면 식 (9)와 같은 지반-구조율 호작용계의 동적강성행렬($\mathbf{S}(\omega)$)을 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss}(\omega) & \mathbf{S}_{sb}(\omega) \\ \mathbf{S}_{bs}(\omega) & \mathbf{S}_{bb} + \mathbf{S}_{bb}^g(\omega) \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서 아래첨자 s 는 가상경계를 제외한 내부영역의, b 는 가상경계의 자유도를 나타낸다.

4. 시간영역 정식화

주파수영역에서의 지반-구조율 상호작용계의 운동방정식을 아래와 같다(Wolf, 1985).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss}(\omega) & \mathbf{S}_{sb}(\omega) \\ \mathbf{S}_{bs}(\omega) & \mathbf{S}_{bb}(\omega) + \mathbf{S}_{bb}^g(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(\omega) \\ \mathbf{u}'_b(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\omega) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서 $\mathbf{S}(\omega)$ 는 동적강성행렬이고, $\mathbf{u}'_s(\omega)$ 와 $\mathbf{u}'_b(\omega)$ 는 내부영역과 가상경계면에서의 변위이며, $\mathbf{F}(\omega)$ 는 내부영역내에 작용하는 하중이다.

가상경계면에서의 상호작용력, $\mathbf{R}(\omega)$ 을 식 (11)과 같이 외부영역의 동적강성행렬과 가상경계면에서의 변위의 곱으로 정의할 수 있으며, 식 (11)을 식 (10)에 대입하면 식 (12)와 같다.

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{S}_{bb}^g(\omega) \mathbf{u}'_b(\omega) \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(\omega) \\ \mathbf{u}'_b(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\omega) \\ -\mathbf{R}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

또한, 시간영역에서의 지반-구조율 상호작용계의 운동방정식은 아래와 같다(Wolf, 1988).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}'_s(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}'_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(t) \\ \mathbf{u}'_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ -\mathbf{R}(t) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서 $\mathbf{u}'_s(t)$ 와 $\mathbf{F}(t)$ 는 가상경계를 제외한 내부영역에서의 변위와 작용하중이며, $\mathbf{u}'_b(t)$ 와 $-\mathbf{R}(t)$ 는 가상경계에서의 변위와 외부영역으로의 파동의 전파에 따른 상호작용력이다. $\mathbf{R}(t)$ 는 가상경계에서의 변위충격응답행렬, $\mathbf{S}_{bb}^g(t)$ 와 변위, $\mathbf{u}'_b(t)$ 를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{S}_{bb}^g(t-\tau) \mathbf{u}'_b(\tau) d\tau \quad (14)$$

가상경계에서의 변위충격응답행렬, $\mathbf{S}_{bb}^g(t)$ 는 외부영역의 동적강성행렬, $\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)$ 의 Fourier 역변환으로 아래와 같다(Hayashi & Katukura, 1990; Wolf & Chong, 1996).

$$\mathbf{S}_{bb}^g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{bb}^g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (15)$$

외부영역의 동적강성행렬 $\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)$ 는 명시적 주파수증속 무한요소를 사용할 경우에 주파수에 명시적인 형태로 식 (7)과 같이 나타나므로, 이것을 식 (15)에 대입하면 아래와 같다.

$$\mathbf{S}_{bb}^g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)\} = \mathbf{S}^0 t e^{-at} H(t) + \mathbf{S}^1 e^{-at} H(t) + \mathbf{S}^2 \delta(t) + \mathbf{S}^3 \dot{\delta}(t) \quad (16)$$

여기서 $H(t)$ 는 Heaviside step 함수이고, $\delta(t)$ 와 $\dot{\delta}(t)$ 는 Dirac-delta 함수와 이의 미분함수이다. $\mathbf{S}_{bb}^g(t)$ 를 식 (14)에 대입하여 $\mathbf{R}(t)$ 를 구하면 아래와 같으며,

$$\mathbf{R}(t) = \int (\mathbf{S}^0 t - \mathbf{S}^0 \tau + \mathbf{S}^1) e^{-a(t-\tau)} \mathbf{u}'_b(\tau) d\tau + \mathbf{S}^2 \mathbf{u}'_b(t) + \mathbf{S}^3 \dot{\mathbf{u}}'_b(t) \quad (17)$$

이를 식 (13)에 대입한 후 복소상수행렬을 식의 좌변으로 넘기면 아래와 같은 시간영역에서의 지반-구조율 상호작용계의 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}'_s(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}'_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(t) \\ \mathbf{u}'_b(t) \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} + \mathbf{S}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(t) \\ \mathbf{u}'_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ - \int_0^t (\mathbf{S}^0(t-\tau) + \mathbf{S}^1) e^{-a(t-\tau)} \mathbf{u}'_b(\tau) d\tau \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

5. 직접적분법

시간영역에서의 지반-구조를 상호작용계의 운동방정식인 식 (18)의 직접적분 절차를 표 1에 나타내었다. 시간 $t + \Delta t$ 에서 상태변수($\ddot{\mathbf{u}}_s(t), \dot{\mathbf{u}}_s(t), \mathbf{u}_s(t), \ddot{\mathbf{u}}_b(t), \dot{\mathbf{u}}_b(t), \mathbf{u}_b(t)$)를 구하기 위해 식 (18)의 우변에 나타나는 가상경계면에서의 상호작용력을 시간 t 까지의 변위를 포함한 기지항과 시간 $t + \Delta t$ 의 변위를 포함한 미지항으로 구분한 후, 미지항을 좌변으로 넘기어 직접적분하였다.

6. 검증예제

6.1 암반층상지반에서의 연직변위응답

암반위에 놓인 재료감쇠비(ζ)가 0인 지반에 대하여 명시적 주파수종속 수평무한요소(HIE)를 사용하여 지반-구조를 상호작용계의 운동방정식을 구성한 후 시간영역해석을 수행하였다. 수치예제로 사용한 3가지 모형화와 연직방향 충격하중을 표 2에 보였으며, 이때의 하중점에서의 연직변위응답을 그림 1에서 4에 나타내었다.

그림 1에 초기 천이상태의 연직변위거동을 명시적 주파수종속 수평무한요소를 불이기 전, 후와 비교하였다. 수평무한요소를 불였을 경우에 40개의 유한요소(FE)의 결과와 초기 천이상태 연직변위거동이 불이기 전에 비하여 매우 잘 일치하였으므로, 명시적 주파수종속 수평무한요소가 초기 천이상태에서 가상경계면에서의 파동의 반사가 없이 외부영역으로의 파동을 잘 전파함을 알 수 있었다.

그림 2에 외부영역으로의 에너지 발산에 대하여 명시적 주파수종속 수평무한요소의 거동을 고찰하였다. 명시적 주파수종속 수평무한요소를 불였을 경우가 기하학적 감쇠에 의해 변위가 감쇠하는 것을 볼 수 있었으며, 유한요소만을 사용한 경우에는 경계에서의 파동의 반사에 의해 무한영역으로의 에너지 발산이 적절히 고려되지 않았다. 이것을 주파수 영역으로 변환하여 변위응답을 고찰하면 그림 3과 같다. 유한요소만을 사용한 경우에 에너지의 반사에 의해 여러 개의 공진주파수를 가짐을 알 수 있다. 이 경우에 1차원 압축파 전파이론에 의해 구한 공진주파수는 32.5Hz이다.

그림 4에 시간영역에서 구한 응답을 Fourier변환을 한 후 주파수 영역에서 구한 결과(윤정방 등, 1997)와 비교하였다. 공진주파수가 매우 잘 일치하였다. 이 경우에 명시적 주파수종속 수평무한요소를 구성하기 위해 사용한 파동함수의 갯수는 Rayleigh파가 2개이다.

7. 결론

본 연구에서는 명시적 주파수종속 2 차원 무한요소를 사용한 시간영역에서의 지반-구조를 상호작용해석법을 제시하였으며, 암반층상 위에 놓인 지반의 충격하중에 대한 변위응답을 확장 유한요소법과 주파수영역해법으로 구한 결과와의 비교를 통해 이를 수치적으로 검증하였다. 명시적 주파수종속 2 차원 무한요소를 사용할 경우에, 주파수영역에서 외부영역의 동적강성행렬을 주파수에 관한 명시적 형태로 구할 수 있으므로, 이를 시간영역으로 수치적 변환없이 쉽게 변환할 수가 있었다.

감사의 글

본 연구는 1995년 한국과학재단의 특정기초연구인 “대형복합역사 구조물의 건설 및 열차운행에 관한 지반-구조물 복합계의 해석기술개발”에 대한 3 차년도 연구를 바탕으로 작성되었으며 연구비의 지원에 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

1. 윤정방, 김두기(1997). “지반-구조물 상호작용해석을 위한 해석적 2 차원 무한요소,” 한국전산구조 공학회 봄 학술발표회, 제 10 권, 제 1 집, pp.19-26.
2. Estorff, O.V. and Kausel, E.(1989). “Coupling of Boundary and Finite Elements for Soil-Structure Interaction Problems,” Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol. 18, 1065-1075.
3. Estorff, O.V.(1991). “Dynamic Response of Elastic Blocks by Time Domain BEM and FEM,” Computer and Structures, Vol. 38 No. 3 pp. 289-300.
4. Hayashi and Katukura, H.(1990). “Effective time-domain soil-structure interaction analysis based on FFT algorithm with causality condition”, Earth. Engrg. Str. Dyn., Vol.19, pp.693-708.
5. Wolf, J.P. and Song, C.(1996). Finite-Element Modelling of Unbounded Media, John Wiley & Sons.
6. Wolf, J.P.(1988). Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain, Prentice Hall.
7. Yun, C.B. and Kim, J.M.(1995). “Axisymmetric Infinite Elements for Multi-Layered Halfspace,” Int. J. Num. Meth. in Eng.
8. Cheung, Y.K., and Tham, L.G., and Lei, Z.X.(1993). “Wave Propagation in Layered Media by Time Domain BEM,” Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol. 22, 225-244.
9. Guan, F. and Novak, M.(1994). "Transient Response of an Elastic Homogeneous Half-Space to Suddenly Applied Rectangular Loadings," Trnsactions of ASME, Vol.61, pp.256-263.

표 1 시간영역해석의 직접적분절차

가. 초기계산 :

1. Form $\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \operatorname{Re}\{\mathbf{S}^3\} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} + \operatorname{Re}\{\mathbf{S}^2\} \end{bmatrix}$

2. Initialize accelerations, velocities, and displacements

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}'_s(0) \\ \ddot{\mathbf{u}}'_b(0) \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}'_s(0) \\ \dot{\mathbf{u}}'_b(0) \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(0) \\ \mathbf{u}'_b(0) \end{Bmatrix}$$

3. Set parameters ;

$$\Delta t, \gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$$

$$a_0 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1$$

$$a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} \quad a_6 = \Delta t(1-\gamma)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \quad a_7 = \gamma \Delta t$$

4. Form the effective stiffness matrix $\hat{\mathbf{K}}$;

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} + \operatorname{Re}\{\mathbf{S}^2\} \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \operatorname{Re}\{\mathbf{S}^3\} \end{bmatrix}$$

표 1 시간영역해석의 직접적분절차(계속)

나. 반복계산 :

1. Calculate $\mathbf{R}^{(t+\Delta t)}$ at $(t + \Delta t)$;

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(t+\Delta t)} &= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}(t + \Delta t) \\ \mathbf{P}(t + \Delta t) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{array} \right] \left(a_0 \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_s'(t) \\ \mathbf{u}_b'(t) \end{array} \right\} + a_2 \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} + a_3 \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} \right) \\ &\quad + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Re}\{\mathbf{S}^3\} \end{array} \right] \left(a_1 \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_s'(t) \\ \mathbf{u}_b'(t) \end{array} \right\} + a_4 \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} + a_5 \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} \right) \\ &= \hat{\mathbf{R}}^{(t+\Delta t)} + \Delta \hat{\mathbf{R}}^{(t+\Delta t)} \quad (\text{i.e., knowns + unknowns})\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t + \Delta t) &= - \int_{0}^{+\Delta t} \text{Re}\{[\mathbf{S}^0(t + \Delta t - \tau) + \mathbf{S}^1]\} e^{-a(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{u}_b'(\tau) d\tau \\ &= - \sum_{\tau}^{t+\Delta t} \text{Re}\{[\mathbf{S}^0(t + \Delta t - \tau) + \mathbf{S}^1]\} e^{-a(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{u}_b'(\tau) \Delta t \\ &= - \sum_{\tau}^{t} \text{Re}\{[\mathbf{S}^0(t + \Delta t - \tau) + \mathbf{S}^1]\} e^{-a(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{u}_b'(\tau) \Delta t - \text{Re}\{\mathbf{S}^1\} \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \Delta t \\ &= \hat{\mathbf{P}}(t + \Delta t) - \text{Re}\{\mathbf{S}^1\} \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \Delta t \quad (\text{i.e., knowns + unknowns}) \\ \hat{\mathbf{R}}^{(t+\Delta t)} &= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}(t + \Delta t) \\ \hat{\mathbf{P}}(t + \Delta t) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{array} \right] \left(a_0 \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_s'(t) \\ \mathbf{u}_b'(t) \end{array} \right\} + a_2 \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} + a_3 \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} \right) \\ &\quad + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Re}\{\mathbf{S}^3\} \end{array} \right] \left(a_1 \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_s'(t) \\ \mathbf{u}_b'(t) \end{array} \right\} + a_4 \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} + a_5 \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} \right) \\ \Delta \hat{\mathbf{R}}^{(t+\Delta t)} &= \begin{cases} 0 \\ -\text{Re}\{\mathbf{S}^1\} \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \Delta t \end{cases} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\text{Re}\{\mathbf{S}^1\} \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s'(t + \Delta t) \\ \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. Solve $\mathbf{U}^{(t+\Delta t)}$ at $(t + \Delta t)$;

$$\tilde{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s'(t + \Delta t) \\ \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{R}}^{(t+\Delta t)}$$

where

$$\tilde{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}\{\mathbf{S}^1\} \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \Delta t \end{bmatrix}$$

3. Calculate $\ddot{\mathbf{U}}^{(t+\Delta t)}, \dot{\mathbf{U}}^{(t+\Delta t)}$;

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{c} {}^{(k)} \ddot{\mathbf{u}}_s'(t + \Delta t) \\ {}^{(k)} \ddot{\mathbf{u}}_b'(t + \Delta t) \end{array} \right\} &= a_0 \left(\left\{ \begin{array}{c} {}^{(k)} \mathbf{u}_s'(t + \Delta t) \\ {}^{(k)} \mathbf{u}_b'(t + \Delta t) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_s'(t) \\ \mathbf{u}_b'(t) \end{array} \right\} \right) - a_2 \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} - a_3 \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} {}^{(k)} \dot{\mathbf{u}}_s'(t + \Delta t) \\ {}^{(k)} \dot{\mathbf{u}}_b'(t + \Delta t) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} + a_6 \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_s'(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_b'(t) \end{array} \right\} + a_7 \left\{ \begin{array}{c} {}^{(k)} \ddot{\mathbf{u}}_s'(t + \Delta t) \\ {}^{(k)} \ddot{\mathbf{u}}_b'(t + \Delta t) \end{array} \right\}\end{aligned}$$

표 2 암반층의 모형화와 충격하중

	FE's	IE's	모형화
경우 1	8	2	<p>shear w. vel. ($c_s = 150 \text{m/sec}$) mesh size = $1\text{m} \times 1\text{m}$ time step($\Delta t = 0.001 \text{sec}$) mass density ($\rho = 2.0 \text{ ton/m}^3$) Poisson's ratio ($\nu = 0.25$) no material damping</p>
경우 2	8	0	
경우 3	200	0	

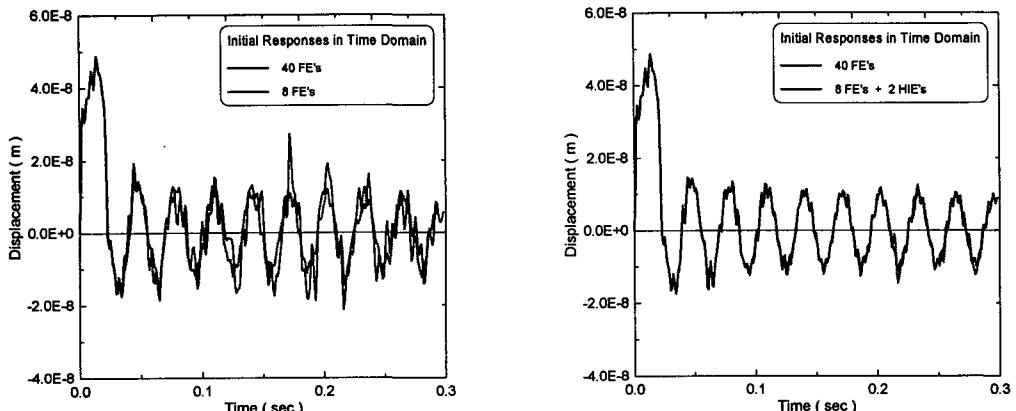
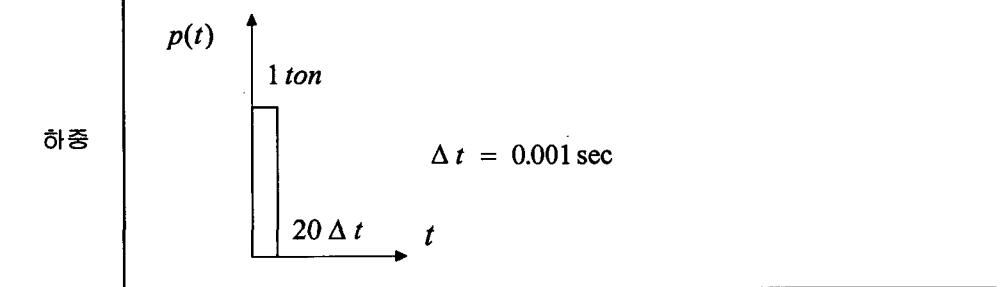


그림 1 시간영역에서의 하중점 초기변위응답 비교

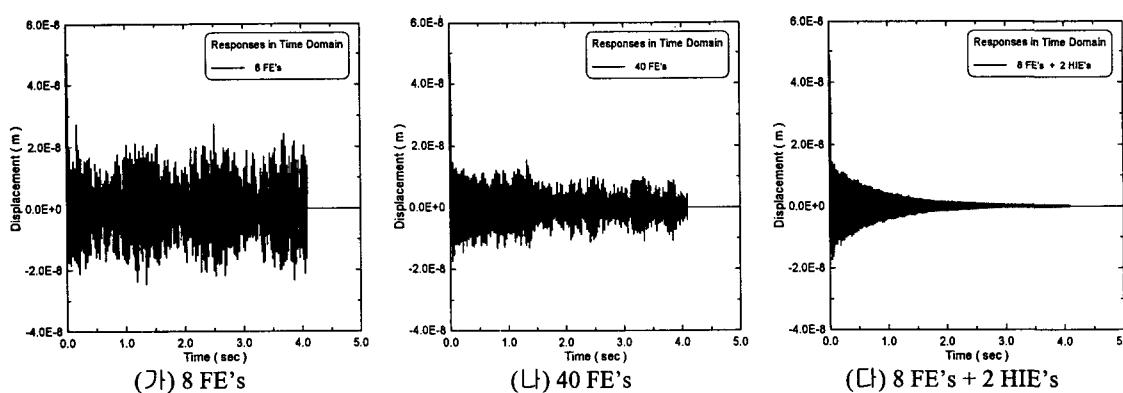


그림 2 시간영역에서의 하중점 변위응답 비교

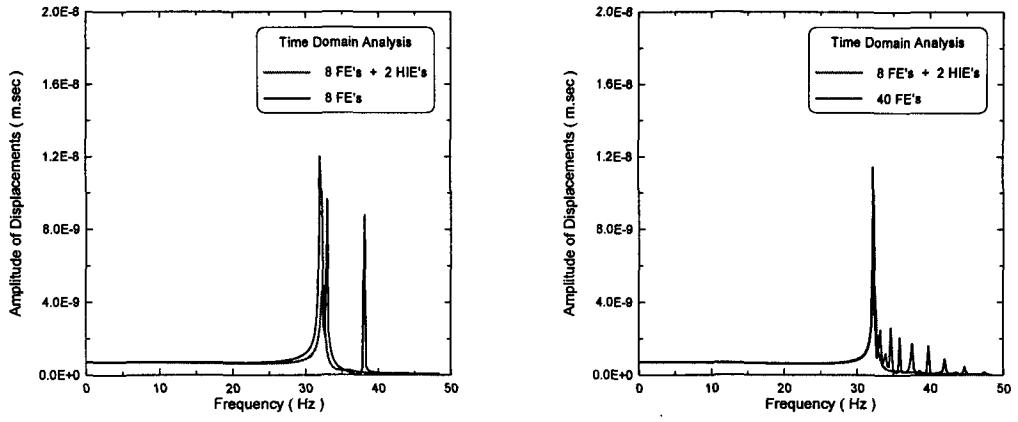


그림 3 주파수영역에서의 하중점 변위응답 비교

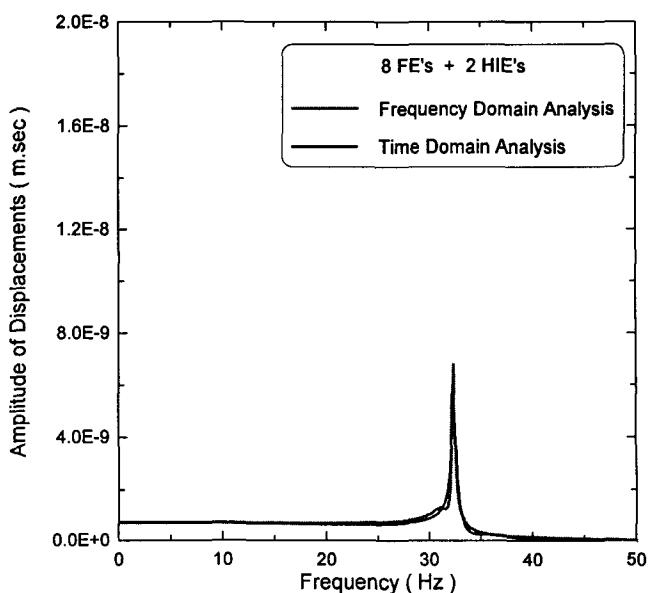


그림 4 주파수영역해석과의 비교