

응력집중문제의 해석을 위한 적응적 무요소절점법에 관한 연구

A Meshless Method and its Adaptivity for Stress Concentration Problems

이 상호*
Lee, Sang-Ho

전 석기**
Jun, Sukky

김 효진***
Kim, Hyojin

Abstract

The Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), one of the popular meshless methods, is developed and applied to stress concentration problems. Since the meshless methods require only a set of particles (or nodes) and the description of boundaries in their formulation, the adaptivity can be implemented with much more ease than finite element method. In addition, due to its intrinsic property of multiresolution, the shape function of RKPM provides us a new criterion for adaptivity. Recently, this multiple scale Reproducing Kernel Particle Method and its adaptive procedure have been formulated for large deformation problems by the authors. They are also under development for damage materials and localization problems. In this paper the multiple scale RKPM for linear elasticity is presented and the adaptive procedure is applied to stress concentration problems. Therefore, this work may be regarded as the edition of linear elasticity in the complete framework of multiple scale RKPM and the associated adaptivity.

제1장 서론

무요소해석법은 요소를 사용하지 않고 절점들간의 상관관계와 경계조건을 이용하여 해석을 수행하는 방법으로 최근 몇 년동안 크게 발전되어 온 전산구조해석의 새로운 분야이다. 대표적인 무요소해석법들로는 Belytschko 등의 Element Free Galerkin(EFG)법, Babuska와 Melenk에 의한 Partition of Unity (PUM)법, Duarte와 Oden의 hp-Cloud법, Onate 등의 Finite Point Method(FPM), Liu 등의 Reproducing Kernel Particle Method(RKPM) 등이 있다.⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾ 이러한 무요소법들은 정식화 과정에서 요소를 필요로 하지 않기 때문에 유한요소법과 같이 요소를 바탕으로 하는 해석방법으로는 해결하기 힘들었던 공학문제들의 처리에 많은 성과를 거두었다. 가장 최근의 성과로서, Belytschko 등은 고체 및 유체의 대변형 문제들을 해석하기 위해서 EFG를 사용하였고⁽⁷⁾, Liu 등은 RKPM을 압축성 유체 문제와 구조 음향의 문제에 적용하였으며⁽⁸⁾ 이 외에도 무요소법을 사용하여 성공을 거둔 사례가 계속 발표되고 있다.

본 논문에서는 응력집중문제의 해석에 RKPM을 적용하고자 한다. RKPM은 Lucy⁽⁹⁾와 Monaghan⁽¹⁰⁾이 도입한 Smoothed Particle Hydrodynamics(SPH)법에서 사용된 핵함수를 이용하여 정식화된다. 경계보정항을 포함하는 새로운 핵함수를 도입함으로써 근사해의 정확도를 증가시키고, SPH의 주된 단점이던 일관성(consistency)조건을 만족시킨다. RKPM은 풍부한 응용성 이외에도, 다중해상(multiresolution)해석과 무요소법을 결합한 다단계 재생핵함수절점법(multiscale Reproducing Kernel Particle Method)이라는 새로운 해석 과정을 가능케 한다.

* 연세대학교 토목공학과 조교수

** 연세대학교 공과대학 부설 자동차기술연구소 객원연구원

*** 연세대학교 토목공학과 석사과정

RKPM의 근사화는 신호처리이론과 유사하기 때문에, 이 방법의 형상함수는 주파수공간에서 필터역할을 하는 여러개의 부수적인 성분으로 분해될 수 있고 각 성분들은 특정한 scale과 관련되어 있기 때문에 구조적응답을 분해하는 동기를 제공해준다. 보통, 고변화도 문제의 결과에서 최고단계성분은 보다 상세한 해석이 요구되는 정확한 위치를 지적해준다. RKPM 형상함수의 이와 같은 흥미있는 특징 때문에 RKPM은 다단계 해석이라는 이름으로 다른 무요소법들과 구별될 수 있다. Liu와 Chen⁽¹¹⁾은 처음으로 다중해상문제를 RKPM을 이용하여 해석하였다. 그들은 또한 다중해상해석을 이용한 오차 산정(error estimation)기법을 개발하였다. 이러한 연구들에 기초하여, 고변화도문제와 적응적해석과 같이 다단계 RKPM의 응용분야에 대한 폭 넓은 연구가 Liu 등에 의해서 수행되었다⁽⁸⁾. 특히, Liu와 Jun은 대변형문제를 위한 다중해상해석법을 성공적으로 개발하였고, 변형변화도텐서의 2차 invariant를 이용하여 새로운 적응적해석법을 제안하였다⁽¹²⁾. 그들은 먼저 상단(high scale)과 하단(low scale)으로 변위를 나누었고, 각각의 단계에 대해서 Cauchy-Green 변형텐서를 이용하여 정식화하였다. 여기서 상단성분은 적응적해석이 요구되는 위치를 정확하게 찾는 역할을 한다.

본 논문의 2장에서는 일반적인 RKPM의 정식화 과정을 보여주고, 3장에서는 응력집중에 관한 적응적해석의 측정 기준과 선형탄성해석을 위한 다단계 RKPM의 이론을 제시하고, 4장에서는 예제를 통하여 다단계 RKPM과 적응적해석의 실용성과 정확도를 증명하였다.

제2장 RKPM의 정식화

RKPM 함수의 근사화는 먼저 다음과 같은 유한한 영역 Ω 에 대한 핵함수 변환식으로 시작된다.

$$u^K(x) = \int_{\Omega} u(\tilde{x}) \Phi(x - \tilde{x}; a) d\tilde{V} \quad (2.1)$$

여기서, $\Phi(x - \tilde{x})$ 는 핵함수이고, a 는 완화계수이다. 만약 핵함수가 델타 함수라면 식(2.1)은 잘 알려진 등식이 성립된다. 프로그래밍화를 위해서는 spline 형태의 함수가 핵함수로 많이 사용되는데 그 이유는 compact support의 특성을 잘 나타낼 수 있기 때문이다. 식(2.1)의 핵함수는 2가지 속성을 가지고 있는데 그 첫째는 완화계수가 0에 가까워질수록 핵함수는 델타 함수와 유사해진다 하는 것이고, 두 번째는 핵함수를 전체영역에 대해서 적분하면 그 값이 1이 되어야 한다는 것이다. 수치적 해석을 위해서 식(2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{NP} N_j(x) u_j \quad (2.2)$$

그리고 핵함수는 아래와 같이 주어진다.

$$N_j(x) = \Phi(x - x_j) \Delta V_j \quad (2.3)$$

여기서, x_j 와 ΔV_j 는 각각 J 번째 절점의 위치벡터와 집중체적들이다. 위의 규격화(normalization)속성이 영역의 경계에서는 만족되지 않기 때문에 식(2.2)를 이용해 이산화하면 일관성(consistency)조건을 만족시키지 못하게 된다. 그러므로, RKPM은 창함수(window function)에 보정함수(correction function)를 곱하여 일관성조건을 만족시켜주는 핵함수를 도입한다.

$$\begin{aligned} K(x, \tilde{x}) &= C(x, \tilde{x}) \Phi(x - \tilde{x}) \\ &= [C_0(x, \tilde{x}) + C_1(x) \cdot (x - \tilde{x})] \Phi(x - \tilde{x}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

여기서 보정함수 $C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ 는 $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ 에 대하여 선형적이라고 가정하며, 창함수 $\Phi(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$ 는 식 (2.1)의 핵함수와 동일하다. 식 (2.4)의 RKPM 핵함수에 적용되는 보정함수는 선형 일관성 조건을 만족시킨다. 즉, 경계의 유무와 관계없이 영역내에서 $u(\mathbf{x})=1$ 과 $u(\mathbf{x})=\mathbf{x}$, ($i=1, NSD$)가 된다. 여기서 NSD는 공간 차원수를 의미한다. 보다 고차의 일관성 조건도 같은 절차를 통해서 손쉽게 얻어낼 수 있다.

앞의 일관성 조건을 만족시키는 보정함수는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} C_0(\mathbf{x}) \\ C_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

여기서 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 정의되는 모멘트 행렬이다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} m_0(\mathbf{x}) & \mathbf{m}_1^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{m}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{m}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

상기식에서 각각의 모멘트의 정의는 다음과 같다.

$$m_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{V} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{m}_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \Phi(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{V} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{m}_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \Phi(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{V} \quad (2.9)$$

본 연구에서는 이와 같은 보정함수를 취하는 RKPM 형상함수를 사용한다. 이 형상함수는 아래의 식으로 표현된다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NP} N_j(\mathbf{x}) u_j \quad (2.10)$$

$$N_j(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \Delta V_j \quad (2.11)$$

$$= [C_0(\mathbf{x}) + C_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)] \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \Delta V_j \quad (2.12)$$

보다 자세한 RKPM 형상함수와 그들의 도함수의 도출 과정은 Liu와 Jun¹²⁾ 을 참조하면 된다.

본 논문에서 사용되는 지배방정식은 영역 Ω , 경계 Γ 에서 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력텐서이고 \mathbf{b} 는 물체력이다. 자연 경계, 필수 경계조건은 각각 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (2.15)$$

여기서, \mathbf{u} 는 변위벡터이고 \mathbf{n} 은 경계에 수직인 단위 벡터이며, \mathbf{q} 와 \mathbf{h} 는 미리 규정된 변위와 표면력이다. 식(2.14)과 식(2.15)에서 $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_q$ 이다. Lagrange multiplier λ 는 필수경계

조건을 만족시켜주기 위하여 도입된 것이며 이를 이용하여 지배방정식을 약형식(weak form)로 나타내면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\nabla \delta \mathbf{u}) : \sigma dV - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} dS - \int_{\Gamma_t} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{q}) dS - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \lambda dS = 0 \quad (2.16)$$

이로부터 유도되는 행렬 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

여기서 각각의 항은

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J dV, & \mathbf{G}_{IK} &= \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_I \mathbf{N}_K dS, \\ \mathbf{f}_I &= \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}_I \mathbf{h} dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}_I \mathbf{b} dV, & \mathbf{q}_K &= \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_K \mathbf{q} dS \end{aligned} \quad (2.18)$$

로 주어진다.

제3장 선형 탄성해석을 위한 다단계 적응적해석 과정

RKPM의 형상함수는 Fourier변환에 의해 새롭게 해석될 수 있는데 저역(low-pass)필터로 간주되는 핵함수족과 wavelet의 한 형태인 고차 수준의 성분들의 합으로 이루어져 있으며 그 수학적 표현은 아래와 같이 주어진다.

$$\Psi_{m+1}(\mathbf{x}) = \phi_m(\mathbf{x}) - \phi_{m+1}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

그러므로, 시스템의 구조적 결과는 일반적으로 아래와 같은 여러개의 단계로 나눌 수 있다.

$$u^h(\mathbf{x}) = u_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

여기에서,

$$u_m(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}; 2^m a) \phi_m(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) u(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{V} \quad (3.3)$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) \phi_m(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) u(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{V} \quad (3.4)$$

$$\Psi_i = C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}; 2^{i-1} a) \phi_{i-1}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) - C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}; 2^i a) \phi_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.5)$$

로 정의된다. 위식에서 C 는 앞장의 보정함수이고, a 는 RKPM의 완화계수이다. 위 식은 또 아래와 같이 이산화될 수 있다.

$$u_m(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NP} N_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j; 2^m a) u_j \quad (3.6)$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NP} [N_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j; 2^{i-1} a) - N_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j; 2^i a)] u_j \quad (3.7)$$

여기서, N_j 는 RKPM의 형상함수이다.

다음 장에서 다룰 예제를 위해, $u^h(\mathbf{x})$ 를 2단계로 분해하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u^h = u_1(\mathbf{x}) + w_1(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

여기서,

$$u_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NP} N_j^h(\mathbf{x}) u_j = \sum_{j=1}^{NP} N_j(\mathbf{x}; 2a) u_j \quad (3.9)$$

이것은 $u^h(\mathbf{x})$ 의 하단성분이고,

$$w_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NP} N_j^h(\mathbf{x}) u_j = \sum_{j=1}^{NP} [N_j(\mathbf{x}; a) - N_j(\mathbf{x}; 2a)] u_j \quad (3.10)$$

는 $u^h(\mathbf{x})$ 의 상단성분이다. 이와 같은 2단계 분해에 의해서 형상함수는 하단성분과 상단성분으로 나누어지게 되고 각각의 성분은 해의 하단성분과 상단성분에 중요한 역할을 하게 된다. 하단성분과 상단성분은 각각 신호처리에서 저역필터와 대역(band-pass)필터와 같은 역할을 한다. 즉, $u^h(\mathbf{x})$ 의 하단성분은 계산 결과의 구조적 모드를 내포하고 있는 반면에 상단성분은 해의 고차 변화영역을 찾아낸다.

선형 탄성 문제들을 위한 다단계 해석은 변위장의 분해에서 시작된다. 계산상의 편의를 위해서, 3차원 직각 좌표계를 사용한다. 변위장을 위한 식(3.8)을 다음과 같이 표현하자.

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^h(\mathbf{x}) + u_i^l(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

여기서, 윗첨자 h 와 l 은 각각 상단성분과 하단성분을 의미한다. $u_i(\mathbf{x})$ 는 위치 \mathbf{x} 에서 변위장이며, 아래첨자 i 는 좌표축을 의미한다($i = x, y, z$). 변위장의 상단성분 $u_i^h(\mathbf{x})$ 와 하단성분 $u_i^l(\mathbf{x})$ 는 식(3.9)와 식(3.10)과 같은 형태로 주어진다. 선형성에 의해서 변형율텐서는 다음과 같이 간단하게 정리된다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^l}{\partial x_i} \right) \quad (3.12)$$

그러므로,

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^h + \epsilon_{ij}^l \quad (3.13)$$

이고, 여기에서 변형율텐서의 상단성분과 하단성분은 각각

$$\epsilon_{ij}^h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right), \quad \epsilon_{ij}^l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^l}{\partial x_i} \right) \quad (3.14)$$

와 같이 주어진다. 식(3.13)의 분해는 후처리(post processing)에서 행해지는 단순한 변형율텐서의 직접 분해와는 전혀 다르다는 것을 주지하여야 한다. 각각의 단계로 나누어진 변형율텐서로부터 다음과 같이 응력을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^h + \sigma_{ij}^l \quad (3.15)$$

여기서, 응력텐서의 상단성분과 하단성분은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}^h = D_{ijkl} \epsilon_{kl}^h, \quad \sigma_{ij}^l = D_{ijkl} \epsilon_{kl}^l \quad (3.16)$$

결론적으로, 응력텐서는 변위장에서의 같이 상단성분과 하단성분으로 나누어진다. 응력텐서의 상단성분은 응력집중문제의 적응적 해석에서 중요한 역할을 하는데 응력의 변화가 급격하게 발생하는 부분을 정확히 찾아내는 역할을 한다. 즉, 응력 집중 문제에서, 상단성분은 응력이 급격하게 변하는 국소화된 부분을 지적해주고, 그것을 통해서 해의 고정밀성과 적응적해석이 요구되는 곳을 알 수 있게 해준다. 그러므로 응력텐서의 상단성분은 다음 장에서 다룰 적응적해석을 위한 기준치의 역할을 한다.

제4장 예제 및 결과 해석

다단계 RKPM의 효율성을 입증하기 위하여 그림 1과 같이 주어지는 직사각형 판의 응력 집중 문제를 해석하였다. 초기의 절점 배치와 그에 의한 σ_{yy} 의 분포를 그림 2에 보였다. 이 결과로부터 2단계 성분 분해를 실시하여 σ_{yy} 의 상단성분의 절대값을 구하면 그림 3과 같다. 예측한 바와 같이 상단성분은 응력의 변화가 심한 곳을 나타내주며 그외의 영역에서는 0에 가까운 값을 갖는다. 이러한 상단성분을 바탕으로 적응화를 실시하여 새로운 절점 배치를 그림 4와 같이 얻을 수 있다. 상단성분 최고값의 30% 이상의 값을 가지는 절점들의 주위에 새로운 절점들을 첨가하였다. 그에 따른 결과가 그림 4에 주어졌는데 응력의 분포가 이전 결과보다 훨씬 국소화되었음을 알 수 있다.

제5장 결론

본 연구에서는 무요소해석법의 한 형태인 재생핵함수절점법(RKPM)을 이용하여 응력집중 문제를 해석하였다. RKPM은 다중해상도 해석이 용이하기 때문에 이에 의하여 다른 무요소 해석법들과 구분될 수 있는 특징을 갖는다. 이러한 다단계 RKPM을 응력집중문제의 적응화 과정에 적용하여 그 효율성을 보였다. 이 다단계 RKPM은 급격한 변화도를 갖는 제반 문제들에 적용이 가능하며 특히 대변형문제등과 같은 비선형문제들의 적응화 과정에 그 응용성이 풍부하다고 여겨진다.

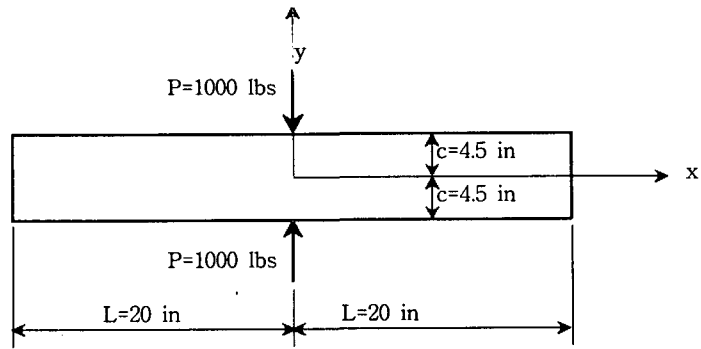


그림1. 집중하중을 받는 직사각형 판

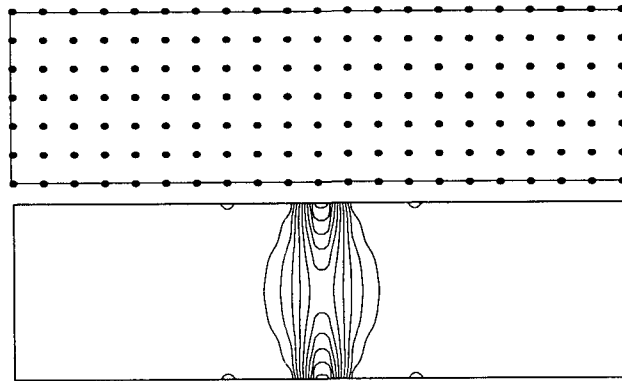


그림2. 적용적기법 적용이전의 절점배치와 σ_{yy} 의 분포도

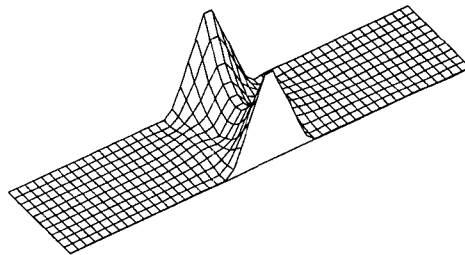


그림3. σ_{yy} 의 상단성분(high-scale component)

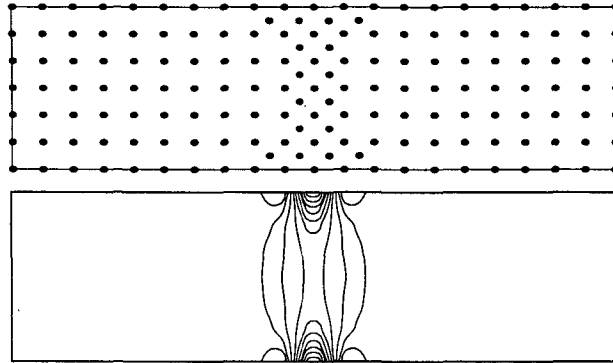


그림4. 적응적기법 적용이후의 절점배치와 σ_{yy} 의 분포도

참고 문헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, pp. 229-256, 1994.
2. Babuska, I. And Melenk, J. M., "The Partition of Unity Finite Element Method", *Univ. of Maryland, Technical Note BN-1185*, 1995.
3. Onate, E., Idelson, S., Fischer, T. and Zienkiewicz, O. C., "A Finite Point Method for Analysis of Fluid Problems", presented in *9th Int. Conference on Finite Elements in Fluids*, Venezia, Italy, October 15-21, 1995.
4. Duarte, C. A. and Oden, J. T., "hp Clouds - A Meshless Method to Solve Noundary Value Problems", *TICAM Report, 95-05*, 1995.
5. Liu, W. K., Adee, J. and Jun, S., "Reproducing Kernel Particle Methods for Elastic and Plastic Problems", *Advanced Computational Methods for Material Modelling*, eds. Benson, D. J. and Asaro, R. A., AMD 180 and PVP 268, ASME, pp. 175-190, 1993.
6. Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y., "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **20**, pp. 1081-1106, 1995.
7. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., "Meshless Methods : An Overview and Recent Developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, pp. 3-47, 1996.
8. Liu, W. K., Chen, Y., Jun, S., Chen, J. S., Belytschko, T., Pan, C., Uras, R. A. and Chang, C. T., "Overview and Application of the Reproducing Kernel Particle Method"s, *Archives of Computational Methods in Engineering*, **3**, pp. 3-80, 1996.
9. Lucy, L., "A Numerical Approach to Testing The Fission Hypothesis", *A. J.*, **82**, pp. 1013-1024, 1977.
10. Monaghan, J. J., "An Introduction to SPH", *Comp. Phys. Comm.*, **48**, pp. 89-96, 1988.
11. Liu, W. K. and Chen, Y., "Wavelet and Multiple Scale Reproducing Kernel Methods", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **21**, pp. 901-931, 1995.
12. Liu, W. K. and Jun, S., "Multiple Scale Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, to appear, 1997.