

**기하학적 비선형성을 고려한  
핀접합 단층 래티스 돔의 불안정 거동에 관한 연구**  
**A Study on the Unstable Behavior of Pin-connected Single-layer Latticed  
Domes considering Geometric Nonlinearity**

권택진<sup>\*</sup>  
KWUN, TAEK-JIN

김승덕<sup>\*\*</sup>  
KIM, SEOUNG-DEOG

김종민<sup>\*\*\*</sup>  
KIM, JONG-MIN

---

**Abstract**

Single-layer latticed domes, which are consisted of slender linear elements, are able to transmit external loads to the structure by in-plane forces, therefore spatial structures can be constructed with the merit of its own lightweight. But, as external load reaches to any critical level at which each member has not material nonlinearity, the single-layer latticed dome shows unstable phenomenon. In particular, pin-connected single-layer latticed domes have much complicate unstable phenomena that are combined with nodal buckling and member buckling. Furthermore, single-layer latticed domes are very sensible to the initial imperfection which occurred inevitably in construction. In this study, we are going to grasp the characteristics of instability for the latticed dome by finite element method considering geometrical nonlinearity.

---

**1. 서론**

구조물 자체가 세장한 선 부재들로 구성된 단층 래티스 돔은 구조물 자체의 곡률을 이용하여 면외방향으로 작용하는 외력을 주로 면내력으로 저항할 수 있는 구조형식이다. 따라서 내부에 기둥이 없이 경량으로 대공간을 형성할 수 있는 장점이 있다. 그러나 사용 재료의 경량화와 단면의 최소화에 의해 외력이 어느 한계치에 도달하면, 부재가 재료적인 비선형성을 나타내기 전에 挫屈이라고 하는 탄성 불안정 현상으로 인해 파괴되는 경향이 있다. 특히 핀접합 단층 래티스 돔의 경우, 셀적인 전체 불안정 현상(overall buckling) 뿐만 아니라, 어느 국부적인 부분의 절점이 면외 방향으로 크게 변형하는 절점 좌굴(nodal buckling)과 부재 좌굴(member buckling) 등에 의해 구조물에 미치는 영향이 매우 크다.

단층 래티스 돔은 선부재가 3차원적으로 배치되어 있는 관계로 하중-변위 곡선상에 복수개의 극한점을 가지며, 극한점 이후 다양한 거동특성을 나타낸다. 따라서 단층 래티스 돔의 안전성 평가를 위해서는 기하학적 비선형성이 고려되어야만 하며, 좌굴후의 거동파악이 필수적이다. 이러한 탄성 안정 문제는 유한 요소 강성방정식의 탄젠트 강성 매트릭스의 특성에 따라 파악될 수 있다.

---

\* 성균관대학교 건축공학과 교수

\*\* 세 명 대학교 건축공학과 전임강사

\*\*\* 성균관대학교 건축공학과 공학석사

또한 셀형태의 구조물은 장주와는 달리 형상과 하중의 다소의 불완전으로 인하여, 매우 민감한 거동을 나타낸다. 따라서 단층 래티스 돔의 불안정 거동을 심층적으로 파악하기 위해서는 구조물에 도입된 불완전에 대한 고려가 필수적이다. 본 연구에서는 편접합 단층 래티스 돔의 이러한 전체 불안정 거동을 파악하기 위하여 기하학적 비선형의 대변형 이론에 의한 유한요소해석을 수행한다. 또한 형상초기불완전에 따른 구조물의 거동특성을 파악하기 위하여 구조물의 고유모드를 형상초기불완전으로 도입하여 절점에 주어지는 하중비에 따른 해석을 수행한다. 비선형 수치해석 기법으로는 변위 증분법을 이용하고, 구조물의 안정 및 불안정 여부를 파악하기 위하여 행렬값 및 고유치 해석을 수행한다.

## 2. 입체 트러스 요소의 비선형 강성 방정식

입체 트러스 요소의 요소좌표계를 (그림2-1)과 같이 정의하며, 각 절점에서의 절점변위벡터를 요소좌표계로 나타내면 식(2-1)과 같다.

$$d_1 = \begin{Bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{z1} \end{Bmatrix}, \quad d_2 = \begin{Bmatrix} d_{x2} \\ d_{y2} \\ d_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

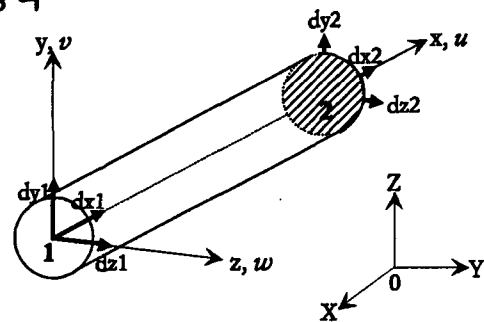


그림2-1. 트러스 요소의 좌표계 및 절점변위

기하학적 비선형을 고려한 요소 좌표계에서의 입체 트러스 요소의 비선형 강성방정식은 식(2-2)와 같다.

$$f - \gamma = [k_E + k_G] d \quad (2-2)$$

$$\text{여기서, } k_E = A L E [A^T A]$$

$$A = [N_{1,x} \ 0 \ 0 \ N_{2,x} \ 0 \ 0]$$

$$k_G = A L [\sigma_x^{(0)} B^T B]$$

$$d = [d_{x1} \ d_{y1} \ d_{z1} \ d_{x2} \ d_{y2} \ d_{z2}]^T$$

$$\gamma = A L (A^T \sigma_x^{(0)}) - f^{(0)}$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} \end{bmatrix}$$

$f^{(0)}$  : 증분의 초기 상태의 하중벡터

$\sigma_x^{(0)}$  : 증분의 초기 상태의 응력

식(2-2)에서  $N_1, N_2$ 는 Lagrange 보간함수를 이용하여  $x$ 의 함수로 나타낸 형상함수이며,  $k_E$ 는 요소좌표계에서의 탄성 강성매트릭스,  $k_G$ 는 요소좌표계에서의 기하 강성매트릭스,  $\gamma$ 은 불평형력(residual force)을 각각 나타낸다.

## 3. 래티스 구조물의 불안정 현상

선부재로 이루어진 래티스 구조물은 외력에 의해 변형이 일어날 경우, 어느 레벨까지는 탄성적인 변형을 일으키다가 변형 혹은 외력의 크기가 어느 정도 이상이 되면 지금까지의 변형과는 전혀

다른 변형 양식의 안정 평형상태로 이동하거나 급격한 대변형의 발생으로 인하여 파괴되는 경향이 있다.

안정상태에 있는 물체에 외력이 작용할때, 물체의 안정성은 외력에 의해 물체의 포텐셜 에너지  $\Pi$ 가 증가하면 안정한 상태이며, 감소하면 불안정한 상태인 것으로 파악할 수 있다.

즉, 평형상태의 물체가 외력을 받아 운동할 경우, 물체의 안정성은 외력에 의한 구조물의 전체 에너지  $\Delta\Pi$ 에 의해 결정되며,  $\Delta\Pi$ 는 (그림3-1)에 나타낸것과 같이  $\delta\Pi$ 와  $\delta^2\Pi$ 의 관계로 파악할 수 있다.

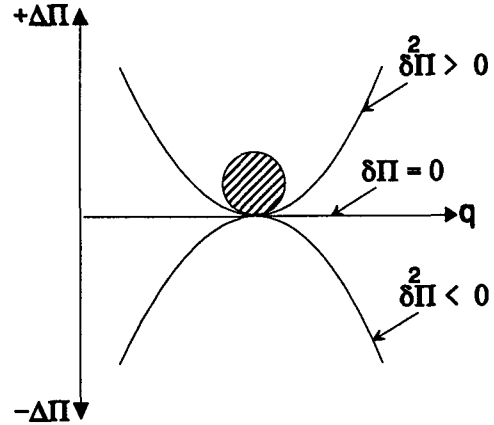


그림3-1. 포텐셜 에너지와 물체의 평형상태

초기에 안정한 구조물이 변화하는 정적 하중에 의한 작용으로 인하여 안정을 잃게 되는 경우, 일반적으로 관찰되는 불안정현상은 편평 셀과 같은 비선형의 "Softening"한 특성을 갖는 구조물에 주로 나타나는 **Snapthrough**현상과 압축을 받는 단일 부재에서 일반적으로 발생하는 비셀형의 **Bifurcation** 현상이다. 주어진 구조물이 Snapthrough 불안정을 일으킬지 Bifurcation 불안정을 일으킬지의 문제는 하중-변위 곡선상의 극한점 및 분기점의 위치와 종류에 따라 결정될 수 있다. 특히 임계점(critical point)에서의 탄젠트 강성 매트릭스 ( $K_t$ )는 몇 가지 유형의 특이(singularity)를 나타내며, 따라서 이러한 불안정 현상들의 구분은 탄젠트 강성 매트릭스 ( $K_t$ )의 특성에 따라 파악될 수 있다.

보존계 하중하에서의 구조적 안정에 대한 수치해석에 있어서, 임계상태(critical state)는 탄젠트 강성 매트릭스 ( $K_t$ )의 특성에 따라서, 일반적으로 다음과 같은 기준에 의해 파악된다.

- (1) 탄젠트 강성 매트릭스 ( $K_t$ )의 행렬식의 값(Determinant)이 식(3-1)과 같이 0이 되는 점

$$\det | K_t | = 0 \quad (3-1)$$

- (2) 탄젠트 강성 매트릭스 ( $K_t$ )에 대한 최소고유값이 식(3-2)와 같이 0이 되는 점

$$\lambda_1 = 0 \quad (3-2)$$

여기서,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$

(그림3-2)에서 점선은 매 증분의  $\det | K_t |$ 를  $\det | K_t |$ 의 최소값으로 일반화시킨 값과 변위와의 관계곡선이다. 또한 이점쇄선은 매 증분의 고유치 해석을 통하여 얻어진 최소 고유치를 고유값의 최대값으로 일반화시킨 값과 변위와의 관계를 각각 나타낸 곡선이다. (그림3-2)에서 탄젠트 강성매트릭스의 행렬값과 고유값은 임계점에서 0이 되며, 두 곡선은 0이 되는 지점에서 서로 교차하고 있다.

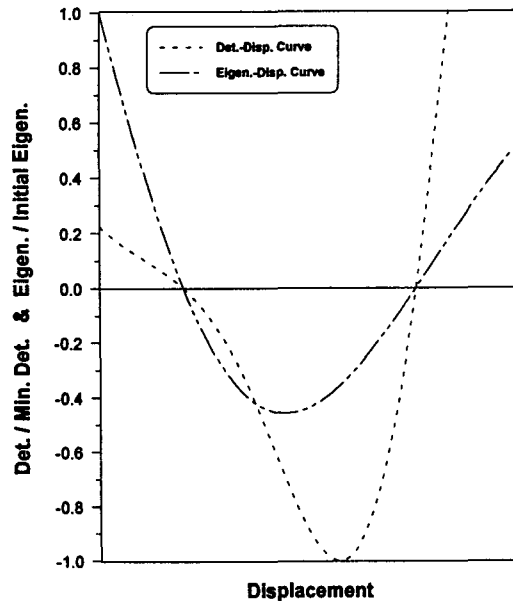


그림3-2. 행렬값과 고유치 곡선

본 연구에서는 탄젠트 강성 매트릭스의 특성을 파악하기 위하여, 매 증분당 행렬값 및 고유치 해석을 수행하여 구조물의 안정여부를 검토한다. 본 연구에서 이용하는 행렬값 해석 기법은 LU 분해법을 이용하고, 고유치 해석 기법은 Householder Tridiagonal법과 QR법을 이용한다.

#### 4. 수치해석 기법

단층 래티스 등과 같이 기하학적으로 비선형 거동을 하는 구조물은 하중-변위관계의 평형경로가 "Softening"한 특성을 나타낸다. 이러한 "Softening"한 구조물의 첫 번째 극한점 이후의 평형경로는 기존의 하중 증분법에 의해서 추적이 불가능하다. 따라서, 본 연구에서는 극한점 및 극한점 이후의 평형경로를 추적할 수 있는 변위 증분법을 수치해석기법으로 이용한다.

2장의 기하학적 비선형성을 고려한 입체 트리스 요소의 비선형 강성방정식은 식(4-1)과 같이 나타낼 수 있으며, 절점하중은 하중의 패턴을 나타내는 하중 모드로서 취급된다.

$$\lambda \{P_m\} = [K] \{D\} \quad (4-1)$$

여기서,  $\lambda \{P_m\} = \{F\} - \{R\}$        $\{P_m\}$  : 하중 모드

$[K] = [K_E + K_G]$        $\lambda$  : 하중 파라미터

식(4-1)을 매트릭스로 나타내면 식(4-2)와 같고, 식(4-2)는 n개의 자유도를 갖는 구조물의 l번째 증분의 강성방정식이다.

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & \cdots & k_{1n}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & \cdots & k_{2n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1}^{(i)} & k_{n2}^{(i)} & \cdots & k_{nn}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d_1^{(i)} \\ \Delta d_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta d_n^{(i)} \end{bmatrix} = \Delta \lambda^{(i)} \begin{bmatrix} \Delta p_1^{(i)} \\ \Delta p_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_n^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

여기서,  $k_{nn}$  : 전체 강성매트릭스의 nn성분       $\Delta p_n$  : 하중모드벡터의 n번째 성분  
 $\Delta d_n$  : 변위벡터의 n번째 성분       $n$  : 자유도 수

강제 변위시킬 절점에서의 강제 변위 자유도의 변위 증분을 변위 증분 파라미터라 하면, 식(4-2)의 변위벡터 성분중에서  $\Delta d_1^{(i)}$ 을 변위 증분 파라미터로 선택하여 하중과 변위성분의 역할을 바꾸면 식(4-3)과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -\Delta p_1^{(i)} & k_{12}^{(i)} & \cdots & k_{1n}^{(i)} \\ -\Delta p_2^{(i)} & k_{22}^{(i)} & \cdots & k_{2n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\Delta p_n^{(i)} & k_{n2}^{(i)} & \cdots & k_{nn}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda^{(i)} \\ \Delta d_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta d_n^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta d_1^{(i)} k_{11}^{(i)} \\ -\Delta d_1^{(i)} k_{21}^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ -\Delta d_1^{(i)} k_{n1}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

식(4-3)을 풀어서 변위 증분  $\Delta d_1^{(i)}$ 에 대응하는 하중 파라미터의 증분  $\Delta \lambda^{(i)}$  과  $\Delta d_1^{(i)}$ 를 제외한 변위 증분인  $\Delta d_2^{(i)}, \Delta d_3^{(i)}, \dots, \Delta d_n^{(i)}$  을 구한다. 미지의 하중벡터를  $\{P\}$ 라 하면,  $\{P\}$ 는 하중파라미터의 증분  $\Delta \lambda^{(i)}$ 와  $\{P_m\}$ 을 이용하여 식(4-4)와 같이 구할 수 있다.

$$\{P\} = \lambda \{P_m\} \quad (4-4)$$

## 5. 래티스 구조물의 불안정 거동 해석

본 장에서는 2장의 기하학적 비선형이 포함된 유한 요소법의 정식화 과정을 통해 유도된 강성 증분 방정식을 이용하여 채택된 구조물의 해석을 수행한다. 또한 강성 방정식의 탄젠트 강성 매트릭스의 행렬값 및 고유치 해석을 통하여, 3장에서 살펴본 구조물의 안정 및 불안정 여부를 파악한다. 수치해석 기법으로는 변위 증분법을 이용한다.

### 5.1 Reticulated 트러스 돔의 해석

(그림5-1)에 나타난 Reticulated 트러스 돔은 개개의 부재가 網狀을 형성하며 구성되어, 주어진 하중조건에 따라 Snapthrough 불안정 및 Bifurcation 현상이 서로 連成하여 매우 복잡한 불안정 거동 특성을 나타내는 구조물이다.

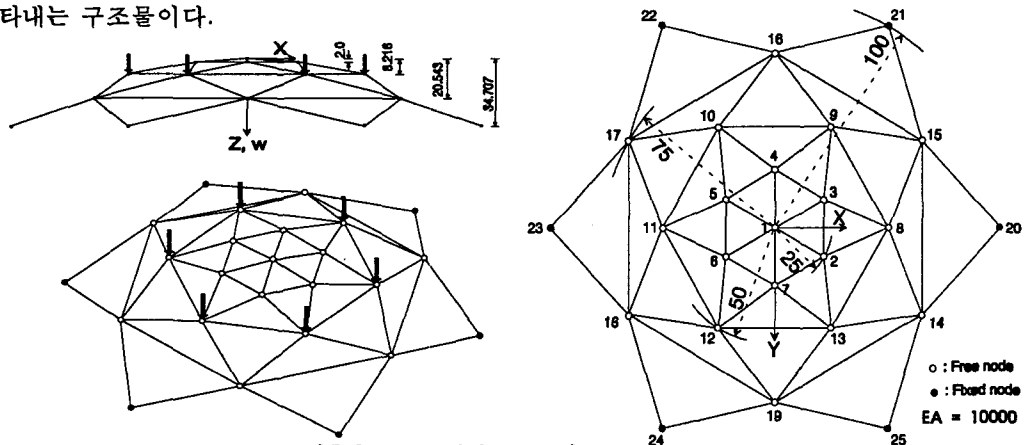
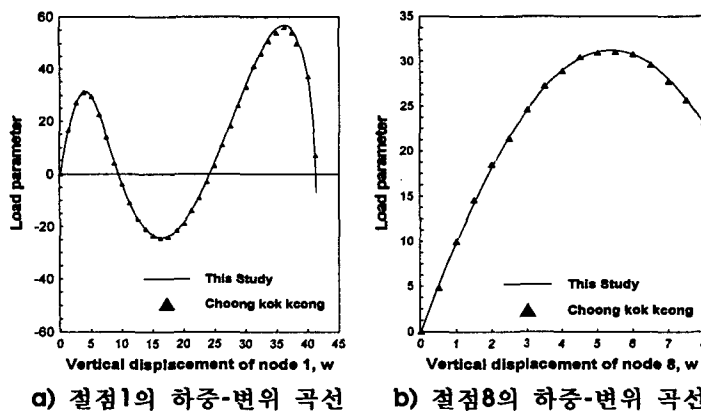


그림5-1. Reticulated 트러스 돔



a) 절점1의 하중-변위 곡선      b) 절점8의 하중-변위 곡선

표5-1. 본 연구와 문헌3)의 분기점하중 비교

	본 연구	문헌3)	편차(%)
BP1	25.997	25.937	0.23
BP2	28.801	28.695	0.40
BP3	28.822	28.745	0.27

그림5-2. 본 연구와 문헌3)의 결과비교

(그림5-2)는 (그림5-1)의 모델을 해석하여 얻어진 해석결과와 문헌3)에서의 해석결과를 비교한 그림으로, 전체 곡선의 概形이 서로 잘 일치하고 있음을 나타내고 있다. (그림5-3)은 매 증분의 행렬식 및 고유치 해석을 통해 얻어진 결과와 하중-변위 곡선을 나타낸 그림으로, 점선은 일반화된 행렬값과 변위와의 관계를, 이점쇄선은 일반화된 고유치 값과 변위와의 관계를 나타낸 곡선이다. (그림5-3)에서 LP는 극한점을 나타내며, BP1, BP2, BP3는 첫 번째와 두 번째, 세 번째 분기점을 각각 나타낸다. (그림5-3)을 통하여 본 구조물은 Bifurcation현상에 의해 불안정거동하며, 첫 번째 극한점 이전에 3개의 분기점(BP)이 존재하는 것을 알 수 있다.

<표5-1>은 각 분기점에서의 하중을 본 연구의 결과와 문헌3)의 결과를 비교하여 나타내고 있다.

따라서 본 구조물은 하중 조건에 따라서 다양한 평형 경로가 존재할 수 있으며, 동적효과가 있는 Snapthrough 현상 뿐만 아니라 동일한 변위에서 하중값이 급격히 저하되는 Snapback 현상 등도 나타날 것으로 사료된다.

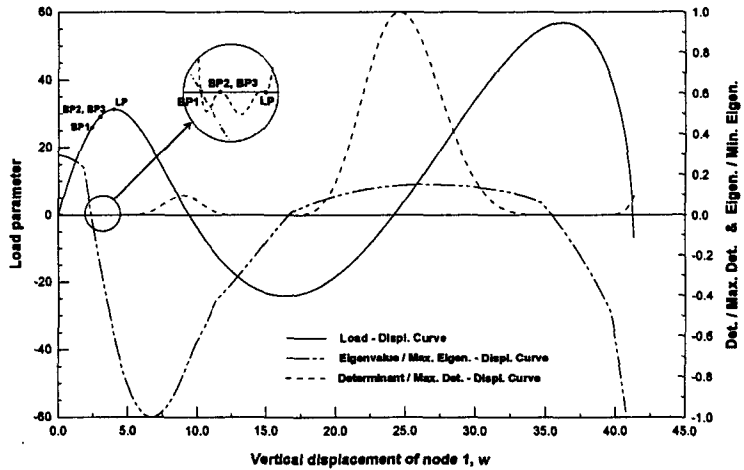


그림5-3. 단층 트러스 돔의 하중-변위 곡선과 행렬값 및 고유치 해석결과

## 5.2 편평 트러스 돔의 해석

(그림5-4)의 해석 모델을 채택하여 구조물에 형상초기불완전이 도입된 경우의 편평 트러스 돔의 불안정 거동을 살펴본다. 또한 구조물에 주어지는 하중조건에 따른 형상초기불완전에 의한 거동을 파악한다. 형상초기불완전은 탄젠트 강성매트릭스의 초기 증분에 대한 1차 고유벡터를 통하여 얻어지는 고유모드형상으로 도입하고, 형상초기불완전의 정도는 절점1과 절점2의 z방향 좌표값의 차를 100%로 가정하여, 단계별로 적용하여 초기불완전에 따른 거동을 파악한다. 또한 하중 조건을 절점1과, 절점1을 제외한 타 자유절점간의 하중을 비율에 따라 달리 적용하여, 절점1의 하중변화에 따른 거동을 형상초기불완전과 병행하여 살펴본다. 이때 절점1을 제외한 타 자유절점의 하중은 항상 일정한 값으로 한다. 부재 단면적 A는  $2\text{cm}^2$ , 탄성계수 E는  $2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ 이다.

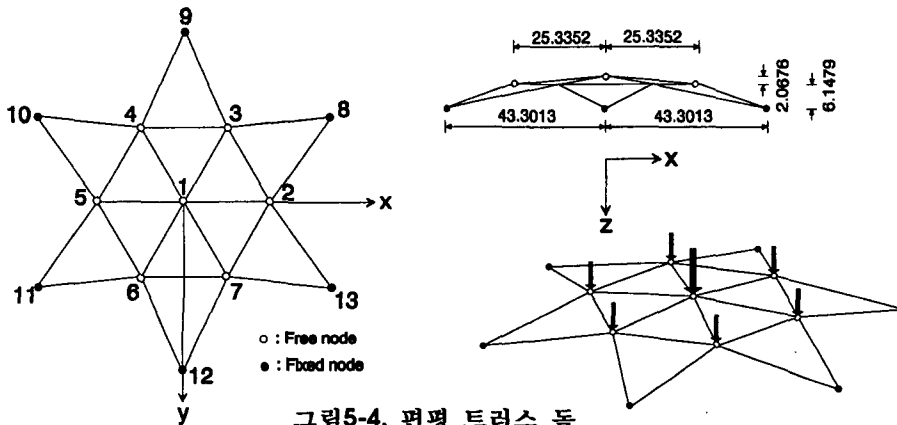


그림5-4. 편평 트러스 돔

(그림5-5)는 탄젠트 강성 매트릭스의 초기 증분에 대한 고유치해석을 통해 얻어진, 1차 모드의 모드형상을 나타낸다. 점선으로 나타난 형상은 구조물의 초기 형상이고, 실선으로 나타난 형상이 고유 벡터를 통해 얻어진 모드형상으로서 비대칭 형상이다. (그림5-6)은 (그림5-5)의 모드형상을 구조물의 형상초기불완전으로 도입하여 해석을 수행한 결과이다. 형상 초기불완전이 도입된 모델의 경우는 완전 형상의 모델에 비해서 극한점 하중이 현저히 감소하고 있음을 알 수 있으며, 특히 초기불완전의 정도가 10%인 경우는 완전형상인 경우에서 얻어지는 극한점 하중에 비하여, 하중의 저하가 미소하게 나타나고 있으나, 20%이상의 초기불완전이 도입된 경우의 극한점 하중은 현저한 저하를 나타나고 있음을 나타내고 있다.

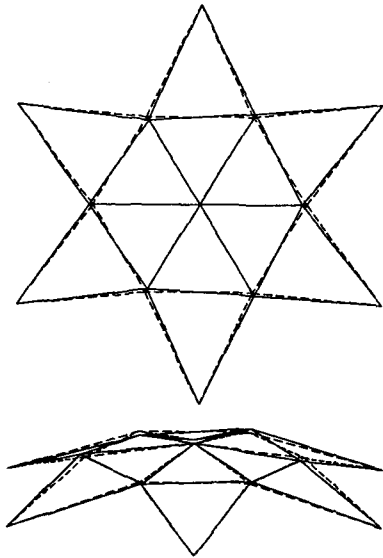


그림5-5. 1차 모드의 모드형상

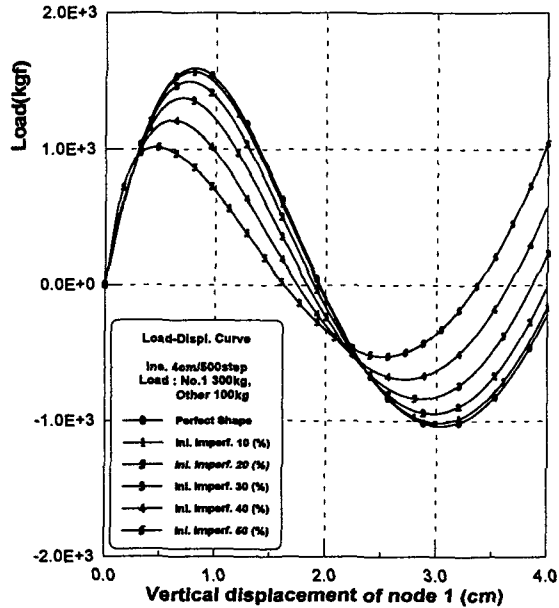


그림5-6. 형상초기불완전에 따른 하중-변위 곡선비교

(그림5-7)은 하중 조건을 단계별로 달리하였을 경우의 형상초기불완전에 의한 영향을 극한점 하중의 변화로서 나타낸 그림이고, (그림5-8)은 (그림5-7)의 관계를 극한점 변위의 변화로 나타낸 그림이다. 여기서 하중비는 절점1을 제외한 타 자유절점의 하중을 일정하게 가하였을때, 절점1의 하중을 타 절점하중으로 나눈 값이다.

(그림5-7)에서 점선으로 나타난 부분은 하중-변위관계의 평형경로가 존재하지 않는 불안정한 범위를 나타낸다. (그림5-7)에서 하중비가 4.0이하인 경우에는 하중비에 따른 극한점 하중의 저하가 현저하게 나타나고 있으며, 특히 초기불완전이 50%이상인 경우에는 극한점이 수렴되지 않고 발산함을 나타내고 있다. 하중비가 4.5이상인 경우에는 하중비에 따른 극한점 하중의 저하는 하중비에 비례하여 일어나는 것으로 파악된다. 특히 형상초기불완전이 80%를 전후로 하여, 모든 하중비에 대한 극한점 하중은 0이 되며, 80%이상에서 다시 증가를 나타내고 있는데, 이것은 형상초기 불완전이 80%에서 구조물 자체의 내력이 상실되기 때문인 것으로 사료된다.

(그림5-8)에서 변위는 절점1의 수직방향(+z) 변위를 나타내며, 극한점이 발생하는 변위를 구조물의 전체 높이로 나눈 값을 변위의 비율로 나타내었다. (그림5-8)에서 형상초기불완전이 12%이하에서는 각 하중비에 따른 극한점 변위값은 매우 복잡한 양상을 나타내다가 형상초기불완전이 12% 부근에서는 극한점 변위값은 주어지는 하중비에 관계없이 일정한 값을 나타내는 것을 알 수 있다. 또한 형상초기불완전이 12%이상에서 하중비가 큰 경우의 극한점 변위는 하중비가 작은 경우의 극한점 변위값에 비하여 큰 값을 나타내고 있다.

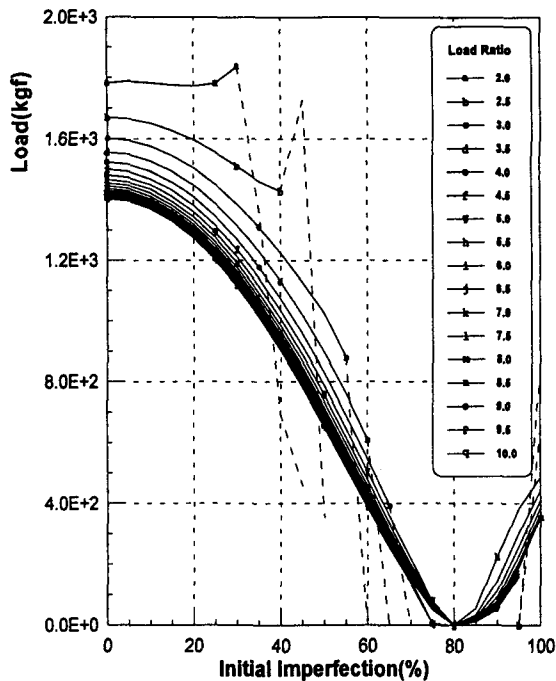


그림5-7. 하중조건에 따른 형상초기불완전과 극한점 하중과의 관계곡선

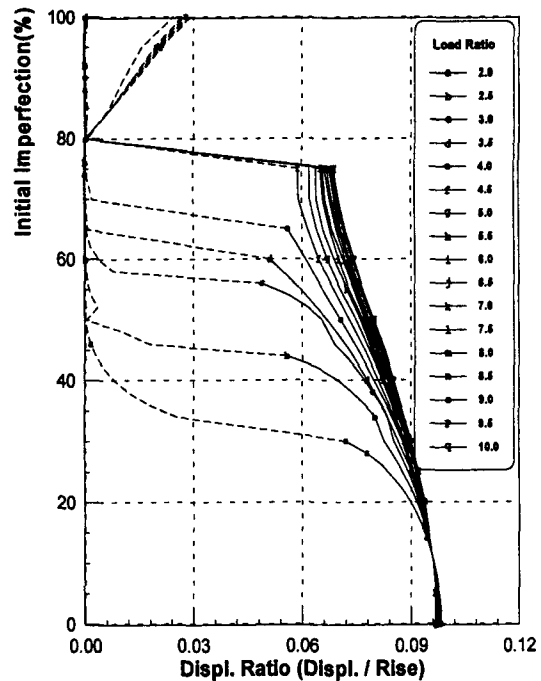


그림5-8. 하중조건에 따른 형상초기불완전과 극한점 변위와의 관계곡선

## 6. 결론

변위 증분법에 의한 해석결과는 하중 증분법으로는 구할 수 없는 극한점 및 극한점 이후의 평형경로를 추적할 수 있었고, 기존의 연구에 의한 해석결과와 비교하여 본 연구의 해석결과를 검증할 수 있었다. 또한 채택된 모델해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) Reticulated 트러스 돔은 복수개의 극한점을 가지며, 첫 번째 극한점 이전에 2차적인 평형경로로 Bifurcation이 일어나는 복수개의 분기점이 존재함을 알 수 있었다.
- 2) 형상초기불완전이 도입된 편평 트러스 돔은 불완전의 정도가 작고 주어진 하중비가 높은 경우 형상초기불완전에 따른 거동의 변화는 미소하나, 불완전이 크고 하중비가 낮은 경우 매우 민감하게 반응함을 알 수 있었다.

## 參 考 文 獻

1. Brush, D. O. and Almroth, B. O., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill, 1975
2. Bazant, Z. P. and Cedolin, L., *Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Oxford, 1991
3. 鍾國強, 「幾何學的非線形性構造物系および彈性物体に支持された構造系の分岐解析法」, 博士學位論文, 東京大學, 1994
4. 金勝德, 「扁平構造物の動的安定に関する研究」, 博士學位論文, 東京大學, 1990
5. 권택진, 이병해, 한상을, 김승덕, 정환목, 「SPACE FRAME 구조물의 구조해석, 설계 및 시공」, 제12회 전산구조공학기술강습회, 한국전산구조공학회, 1995, 7.