

CMS방법에 의한 강교량의 동적모드해석

Modal Analysis of Steel Box Bridge by Using the Component Mode Synthesis

조 병완* 박 종철** 김 영진***
Jo, Byung-Wan Park, Jong-Chil Kim, Young-Jin

ABSTRACT

The Component Mode Synthesis Method for the vibration analysis can be applied to the large-scaled structures, which have difficulty in modeling because of their intricate shapes and boundary conditions and need much time in computational calculations. This paper uses the Component Mode Synthesis Method to analyze the free vibration for the steel box bridge having the large number of D.O.F as an example of the large structural system. By comparing the CMS method to the other method (FEM), this paper proves the accuracy of the solution in techniques and the efficiency in time.

1. 서 론

과학기술의 급속한 발전과 함께 토목구조물의 대형화, 기술집약화가 가능해짐에 따라 보다 경제적이고 안전한 설계·시공이 이루어지고 있으나, 이런 구조물들은 진동해석과 설계시 형상이나 경계조건이 복잡하여 대부분 유한요소해석에 의존하고 있다. 장대교량, 복합구조물 등과 같이 구조물이 복잡해질 경우 해석의 정확도를 높이고 구조물의 실험상에 충실한 모델링을 하기 위해 요소분할을 세밀히 함으로 인해 자유도(DOF)가 커지게 된다. 이런 큰 자유도를 갖는 대형구조계의 동적해석(컴퓨터프로그램해석)시 막대한 처리시간과 메모리용량을 필요로 하므로써 유한요소해석방법의 적용에 한계가 따른다. 또한 시공단계별 구조계, 시공중과 완성후의 구조계의 거동이 상이하고, 시간의존성 영향을 고려할 경우에는 단지 일부분의 구조거동을 파악하려해도 전체계에 대한 구조해석을 다시해야하는 번거로움이 따를 수 있다. 이러한 이유로 대형구조계에 대한 해석을 보다 효율적으로 수행할 수 있는 방법들로 크게 두가지로 자유도간의 관계식으로부터 일부 자유도를 축소시키는 방법과 전체구조계를 몇개의 부분구조계로 나누어 이들 부분구조계의 동특성을 이용하여 전체구조계의 진동해석을 하는 방법이 추구되고 있다.

-
- * 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수
 - ** 한양대학교 공과대학 토목공학과 석사과정
 - *** 한양대학교 공과대학 토목공학과 석사과정

본 연구에서는 후자의 부분구조합성방법중 하나인 CMS방법(Component Mode Synthesis Method)을 이용하여 Steel Box 교량의 동특성을 해석하고, 본 연구 방법에 대한 타당성 및 유용성을 검증하기위해 유한요소해석으로 전체 교량구조물에 대해 모드해석을 실시하여 CMS방법에 의한 특성치와의 비교를 통해 정확성을 확인하며 CMS방법과 전체구조물에 대한 해석시 소요되는 시간을 측정하여 본 방법의 효율성을 검증하고자 한다.

2. 부분구조합성법

부분구조합성법(Substructure Synthesis Method)은 구조물(전계)을 n 개의 부분구조(분계)로 나누어 각 분계의 동특성을 구한 후, 이것들을 합성해 전계의 운동방정식을 구성하여 전계의 고유진동수, 고유모드 응답, 변형에너지 분포 등을 계산하는 방법이다. 부분구조합성법을 이용한 동적해석은 크게 전달함수합성법, CMS방법, 특성행렬합성법 등으로 대표할 수 있는데, CMS방법은 부분구조계의 진동변위를 자신의 고유진동형의 선형결합으로 나타내고, 부분구조계 사이의 연결부에서의 변위 및 힘의 적합조건을 부여하여 합성함으로써 모드좌표로 축소된 전체계의 운동방정식을 형성하고 이로부터 진동특성을 산정하는 방법이다.

이 방법은 1965년 Hurty가 처음 진동해석에 도입한 이래, Human, Macneal, Craig, Benfield, 長松昭男, 大熊政明 등에 의해 많은 연구가 이루어져 왔다. 이들을 방법론적 관점에서 분류하면 합성에 이용되는 부분구조계의 동특성치들을 타부분구조계와의 연결부를 구속, 불구속 또는 이 두 방법의 조합으로 얻은 것을 사용하는가에 따라 각각 구속모드(Fixed-Interface Mode)방법, 불구속모드(Free-Interface Mode)방법 및 혼합방법으로 대별할 수 있다.

2.1 구속모드방법

구속모드방법은 인접분계와의 결합부를 고정으로 한 내부영역만의 고유모드로 표현되며, 분계의 채용모드수가 적어도 비교적 적은 계산시간내에 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있으나 연결부의 자유도가 최종방정식에 그대로 남게되어 연결부의 자유도가 많을 경우 최종방정식의 차수가 커지게 되는 문제점과 진동실험시 결합점을 고정으로 처리하기가 어렵기 때문에 실험시 이를 구현하기 어려운 단점이 있다. 또한 결합조건이 변할 경우 이에 따른 구속모드를 재계산해야 하는 불편함이 있다.

2.2 불구속모드방법

불구속모드방법은 인접분계와의 결합부를 포함하는 전 영역을 자유로 했을 때의 분계 전체의 고유모드로 표현하며, 타 방법에 비해 최종 방정식의 차수가 가장 작고 연산 과정도 간편하며 실험결과와의 이용이 쉬워 효율적이거나 고전적인 방법에서는 정확도 높은 결과를 얻을 수 없는 경우가 많다. 즉 CMS방법에서 진동변위를 가정할 때 부분구조계의 1개의 저차진동형만을 사용하므로써 축소된 자유도를 갖는 전체계의 운동방정식을 얻는다. 따라서 필연적으로 고차진동형을 무시함으로 인한 오차가 발생한다. 정확도를 높이는 방법이 개선된다면 불구속모드방법이 대형구조물의 진동해석에 가장 경제적인 방법이라 할 수 있는데, 이에 대한 연구로 Macneal이 진동형합성에 있어서 고려하지 않던 Modal Truncation Effects를 보상하기 위해 잉여컴플라이언스(Residual Compliance)를 정하고 잉여강성을 도입하는 방법을 제시하였다.

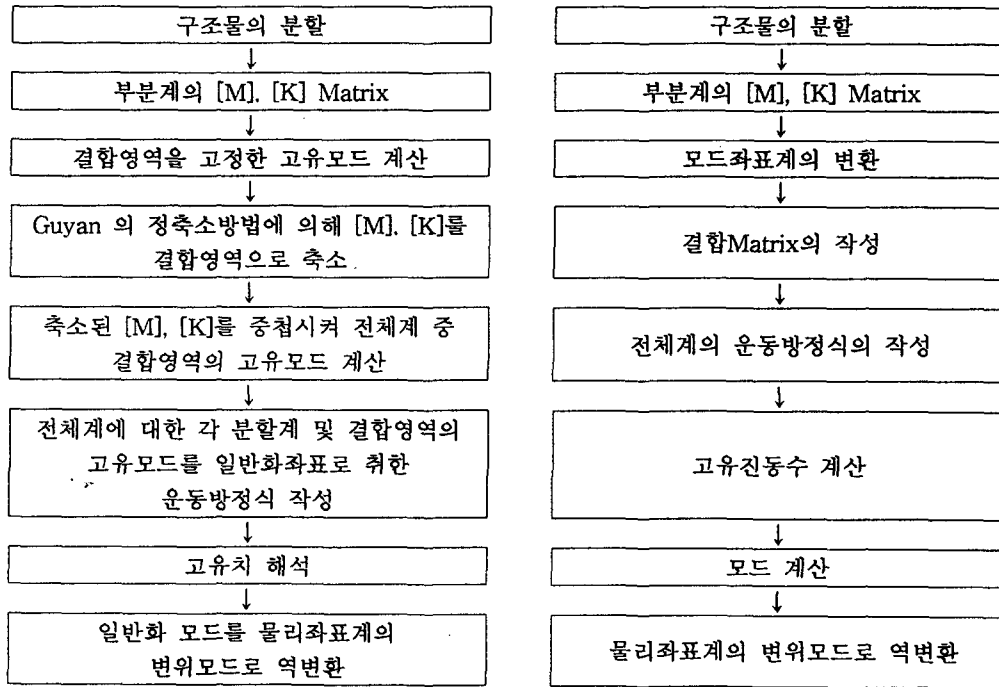
잉여강성을 고려하는 방법은 탄성결합, 강결합 모두에 함께 쓸 수 있고 정밀도도 높은 편이나 모든 분계에 대해 잉여강성매트릭스를 계산하는 것이 어렵다. 잉여강성을 고려하지 않는 방법은 탄성결합에 적합하며 결합부의 특성이 정의되면 사용하기 쉬운 범용성이 있으나, 정확도가 잉여강성을 고려할 경우에 비해 떨어지고 분계의 고유모드를 일정 이상의 고차모드까지 채용해야 만족한 결과를 얻을 수 있다. 그로 인해 차수가 높은 전계의 운동방정식이 생기므로 이를 풀기 위해 전계의 운동방정식을 작성한 다음, Guyan의 정축소 방법을 이용해 차원을 줄인 후 풀게 된다.

2.3 혼합방법

혼합방법은 구속모드방법과 불구속모드방법의 중간으로 결합부의 일부를 고정하고 다른 곳은 자유로 한 경우의 고유모드를 표현하며, 그 외의 방법으로 다이어크르티스법이 있는데 이는 n 개의 분계로 구성된 전계

에 대해 1개씩의 분계를 결합시키는 계산을 반복하면서 단계적으로 전체를 구성해 나간다.

2.4 해석절차



(a) 구속모드방법의 해석절차

(b) 불구속모드방법의 해석절차

Fig. 1 CMS방법의 해석절차

2.5 구속모드방법의 이론

그림(Fig. 2)과 같은 구조물계에서 전체의 변위를 부분계의 내부영역변위와 부분계사이의 결합영역변위로 구분하고, 각각의 변위를 몇 개의 고유Mode로 표현한다. 먼저, 결합영역의 변위는 각 부분계의 질량행렬과 강성행렬을 Guyan의 정축소로 결합영역만의 자유도로 축소하고, 그것들을 중복하여 얻어지는 고유 모드의 1차 결합으로 표현한다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^{(1)} & K_{ab}^{(1)} & K_{ac}^{(1)} \\ K_{ba}^{(1)} & K_{bb}^{(1)} & K_{bc}^{(1)} \\ K_{ca}^{(1)} & K_{cb}^{(1)} & K_{cc}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X \\ Y \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기에서, X는 결합영역 b상에서의 Sub 2에서 받는 작용력, Y는 결합영역 c상에서의 Sub 3에서 받는 작용력을 표현한다. Sub 1의 내부영역의 변위는 결합영역의 변위로 표현할 수 있기 때문에, Sub 1의 전변위는 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_{1b} \\ \delta_{1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1b} & T_{1c} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = [R_1] \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (2)$$

Sub 1의 질량행렬과 강성행렬 전후에서 행렬 $[R_1]^T$ 와 $[R_1]$ 을 곱하면, 결합영역만의 자유도를 가지는 질량행렬과 강성행렬로 된다. Sub 2, Sub 3에 관해서도 Sub 1에 대한 같은 절차를 실행하여 축소된 질량행렬과 강성행렬을 얻는다. 이렇게 얻어진 식들을 결합영역의 겹쳐진 상태와 같게 중복하고 일반 고유치문제를 푸는 것에 의하여 1차부터 K차까지의 고유모드를 구한다. 그리고 결합 영역 b, c, d의 변위는, 이러한 고유모드의 1차결합으로 표현한다. 다음으로 내부영역은 결합영역의 변위에 동반하여 생기는 변위와 결합영역을 고정으로 한 고유모드의 1차결합의 합으로 표현한다. 먼저, Sub 1의 내부영역변위에 대해서 표현하면

$$\{\delta_{1a}\} = [T_{1b}\phi_b + T_{1c}\phi_c, \phi_{1a}]\{\xi_c \xi_1\}^T \quad (3)$$

여기에서 행렬 $[\phi_{1a}]$ 는 고유Mode행렬, $\{\xi_1\}$ 은 각각의 고유Mode변위에서의 기여율을 나타낸다. 다음으로 Sub 2와 Sub3에 대해서도 구할 수 있다. 전체에 대한 변위는

$$\begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \\ \delta_{1a} \\ \delta_{2a} \\ \delta_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_b & 0 & 0 & 0 \\ \phi_c & 0 & 0 & 0 \\ \phi_d & 0 & 0 & 0 \\ T_{1b}\phi_b + T_{1c}\phi_c & \phi_{1a} & 0 & 0 \\ T_{2b}\phi_b + T_{2c}\phi_c & 0 & \phi_{2a} & 0 \\ T_{3c}\phi_b + T_{3d}\phi_d & 0 & 0 & \phi_{3a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_c \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = [A]\{\xi\} \quad (4)$$

로 된다. 그래서 전체계에 대한 운동방정식에 식(4)를 대입하고, 각항에 좌변부터 $[A]^T$ 를 곱한다. 이렇게 해서 각 Sub의 내부영역 및 Sub 사이의 결합영역의 고유모드를 일반화좌표로 해서 축소된 전체의 질량행렬, 감쇠행렬 및 강성행렬로 이루어진 식을 얻을 수 있다.

2.6 불구속모드방법이론 (잉여 강성을 고려하지 않는 방법)

다음 그림(Fig. 3)에서 2개의 부분계가 2개의 Sub를 결합시키는 요소에 의해 영역 b와 c로 결합되어 있다. 실제의 결합요소는 질량이 있지만, 일반적으로 Sub의 크기와 비교해 무시할 수 있는 경우도 많다. 또 만일 무시할 수 없는 경우에는 그 질량을 b, c영역의 부가 질량으로서 이산분배할 수 있다.

Sub 1, Sub 2의 임의의 변위는

$$\begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{Bmatrix} = [\phi^{(1)}]\{\xi_1\} = \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} \{\xi_1\}, \quad \begin{Bmatrix} \delta_c \\ \delta_d \end{Bmatrix} = [\phi^{(2)}]\{\xi_2\} = \begin{bmatrix} \phi_c \\ \phi_d \end{bmatrix} \{\xi_2\} \quad (5)$$

로 표현할 수 있다. 여기에는 행렬 $[\phi^{(1)}]$ 은 1차부터 r_1 차까지의 고유Mode를 각 열에 늘어 놓아 작성하는 Mode행렬이다. 그러면, 식(5)에서 전체 변위는

$$\begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a & 0 \\ \phi_b & 0 \\ 0 & \phi_c \\ 0 & \phi_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

과 같이 표현한다. 결합요소부재가 있을 경우 전체의 특성행렬은 중복에 의해 식(6)의 우변계수행렬에 의해 이러한 특성행렬을 각 Sub의 고유 모드를 사용한 일반화 좌표상으로 변환한다. 이러한 특성행렬을 쓰면 일반화 좌표상에서 전체의 운동 방정식은

$$[\bar{M}]\{\dot{\xi}\} + [\bar{C}]\{\dot{\xi}\} + [\bar{K}]\{\xi\} = \{g\} \quad (7)$$

과 같이 표현한다. 식(7) 방정식의 자유도는 분계 1과 2의 채용 Mode 수의 합(r_1+r_2)이고, 이 자유도는 일반적으로 물리좌표상에서의 자유도보다 훨씬 작게 되기 때문에 계산시간과 메모리용량의 면에서 효율적으로 진동 해석할 수 있다.

2.6 불구속모드방법이론 (잉여 강성을 고려하는 방법)

그림(Fig. 4)의 분계 $i(i=1, 2)$ 에 대해서 질량행렬과 강성행렬을 써서 고유치를 해석하고, 1차부터 k 차 (또는 p 차, $p > k$)까지의 고유모드를 구한다. 여기에서 얻어지는 고유모드는 분계 i 가 다른 분계와 분리되고, 결합영역을 자유단으로 한 상태의 것이기 때문에 불구속모드라고 부른다. 또 k 차보다 고차의 고유 모드가 저주파수역의 전달함수에 주는 영향을 표현하기 위한 잉여컴플라이언스행렬 $[Z]$ 를 계산한다.

분계 $i(i=1,2)$ 에 대한 운동방정식은 고유모드의 직교상에서

$$(\mathbf{r}^{(i)} - \omega^2 \mathbf{m}^{(i)})\{\xi_i\} = \{f_m\} \quad (8)$$

여기에서, $\mathbf{r}^{(i)}$ 와 $\mathbf{m}^{(i)}$ 는 각각 Mode강성행렬, Mode질량행렬로 표현되는 대각행렬이다. Sub 1과 Sub 2에 관한 식(8)을 결합하면 다음의 전계에 대한 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\begin{bmatrix} K_{\xi\xi} & K_{\xi x_b} \\ K_{x_b \xi} & K_{x_b x_b} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi \\ x_b \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (9)$$

일반적으로 식(9)을 풀어 전계에 대한 고유진동수를 구한다. 그러나 강결합 또는 결합부재(스프링 등)의 질량을 무시할 수 있는 경우에는 자유도를 채용 모드수의 합까지 작게 할 수 있다.

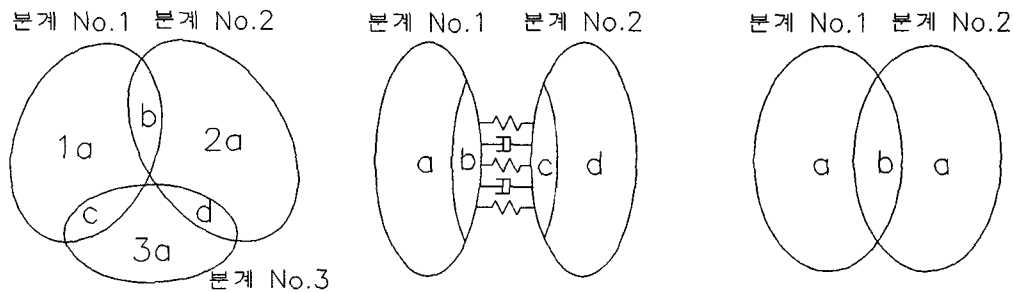


Fig. 2 3분계의 구조물

Fig. 3 2분계의 구조물(탄성결합)

Fig. 4 2분계의 구조물(강결합)

3. Steel Box 교량의 모드해석

본 연구에서는 효과적인 진동해석방법의 하나로 Steel Box 교량을 2개의 부분구조로 나눠 각 부분구조에 대해 독립적으로 얻어진 저차의 고유진동형들을 선형 결합으로 나타내고, 각 부분구조를 부분구조합성법에 의해 전체구조물의 대한 진동특성치(고유진동수, 고유벡터)를 구하였다. 한 경간의 길이가 50m, 총연장 150m의 3경간 Steel Box형교를 CMS방법에 의해 모드해석을 실시하였다. 실제 해석시 본 교량은 박스 형태의 단면을 가지나 본 연구에서는 등가의 강성을 갖는 환산단면적을 사용하여 Bernoulli-Euler 보로써 모델링하였다. CMS방법에 의한 해석은 전체구조물(Fig. 5 참조)을 두개의 좌우 대칭되는 부분구조(Fig. 6 참조)로 나누는 후, 부분계에 대해 모드해석을 실시한 후 구속모드합성을 적용하기 위해 MSC/NASTRAN의 Superelement Module Algorithm을 이용, 합성하여 구조물 전체의 모드해석을 실시하였다. 또한 본 연구의 방법에 대한 타당성 및 유용성을 검토하기 위해 전체구조물에 대한 모드해석을 실시하였다. 전계에 대한 유한요소해석은 CMS방법에 의해 계산된 결과들을 서로 비교하는데 있어서 객관성을 갖도록 구조해석 패키지인 SAP90을 사용하여 해석하였다.

구조물에 대한 모드해석은 본 방법의 효율성을 검증하기 위해 고차 모드인 90차까지의 고유진동수를 구하였다. 전계에 대한 해석결과와 CMS방법에 의한 부분구조에 대한 15차모드까지의 해석결과를 제4장에 정리하여 비교·분석하였으며 5차까지 구한 모드형상을 Fig. 7에 나타내었다. 프로그램해석시 필요로 하는 Input Data를 위한 Steel Box교량의 각 요소물성치는 Table 1에 나타내었다.

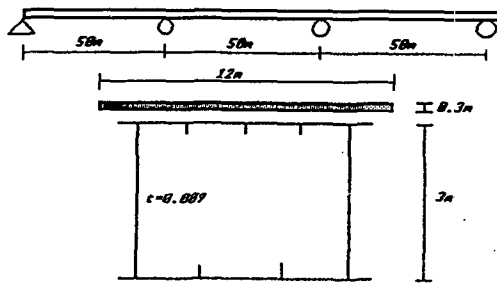


Fig. 5 구조 해석 모델 (전체계)

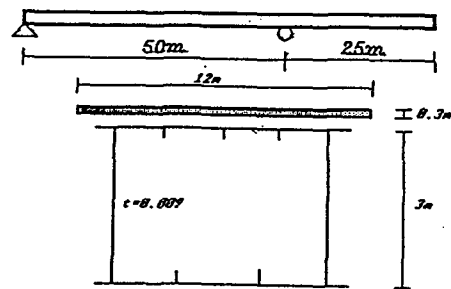


Fig. 6 구조 해석 모델 (부분계-Left Side)

Table 1 교량의 물성치

탄성계수	2.06×10^{11} N/m ²	단면적	0.5478 m ²
밀도	4300 kg/m ³	관성모멘트	0.149 m ⁴

4. Steel Box 교량의 모드해석 결과 및 고찰

4.1 모드해석결과

프로그램 해석결과는 분계에 대한 동특성 해석결과, 구속모드방법, 불구속모드방법 및 전계에 대한 해석결과와 함께 Fig. 7과 Table 2에 보였다.

4.2 모드해석결과에 대한 효율성

제안 방법을 이용하여 구조물을 해석할 때 기대되는 컴퓨터의 메모리용량의 절감효과는 전체구조물을 몇 개의 부분구조로 분할하느냐에 따라 결정된다. 일반적으로 구조물을 여러개로 분할할수록 해석과정중 한번에 다루어야 하는 자유도의 수는 감소하게 된다. 그리고 해석과정에서 물리좌표계를 모드좌표계로 변환하는 과정에서 자유도는 채용 모드수에 따라 축소시킬 수 있다는 것을 알 수 있다.

또한, 본 해석에 사용한 Steel Box 교량의 부분계는 좌우 대칭성을 가지므로 좌측의 모드해석결과를 이용하여, 우측의 부분계를 따로 수치해석할 필요없이 우측에 대한 모드해석결과를 얻을 수 있으므로 해석과정을 절약할 수 있다. 실제 해석시 소요된 CPU Time을 비교하여 Table 3에 나타내었으며, 이는 전계(FEM)로 직접 해석한 경우에 비해 자유도가 축소되어 계산시간상 더욱 효율적임을 보여주고 있다.

4.3 구속모드방법 vs 불구속모드방법

계산시간(CPU Time)만의 비교로는 불구속모드방법인 잉여컴플라이언스매트릭스를 쓰지 않은 방법이 가장 빠르고, 다음으로 구속모드방법, FEM, 잉여컴플라이언스매트릭스를 사용한 불구속모드방법의 순이었다. 이는 CMS방법을 이용할 경우 전계에 대한 FEM 해석보다 한 번에 수행해야 할 자유도수가 적어지기 때문에 계산시간이 줄어들음을 의미하며, 전계에 대한 해석결과와 부분구조합성법과의 정확도를 비교해보면 각 모드에서 정해와 거의 동일한 값을 나타낸 구속모드방법이 가장 정확하고, 다음은 잉여컴플라이언스매트릭스를 쓰는 방법의 순서이다.

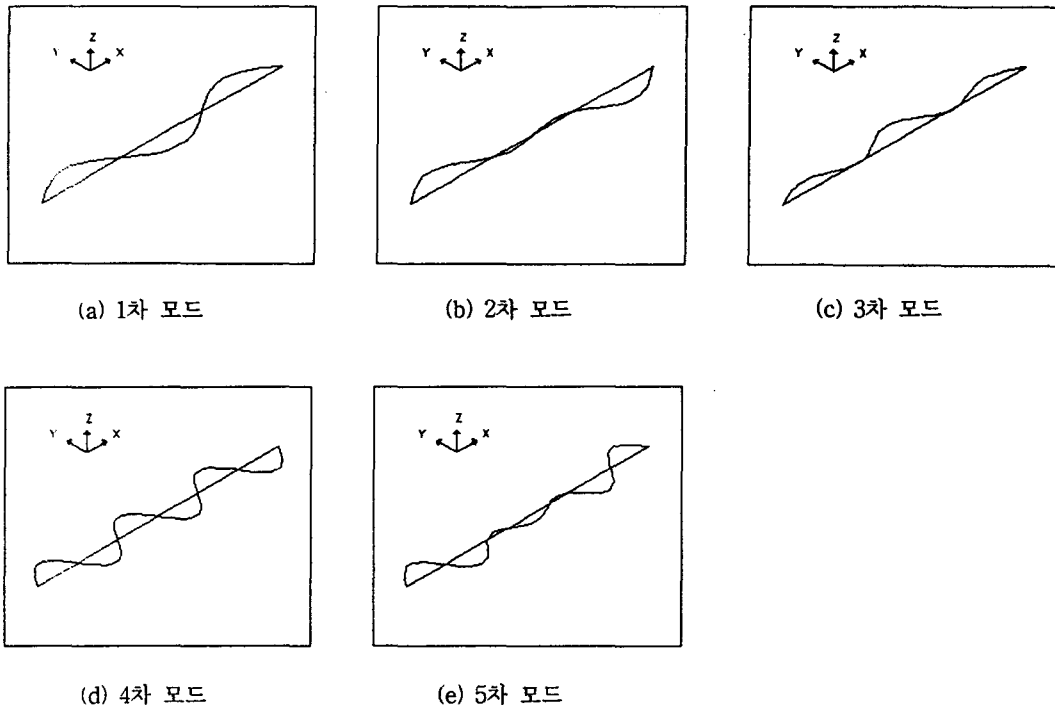


Fig. 7 Steel Box 교량의 모드형상

Table 2 고유진동수의 비교

Method	Free-Interface Mode Method				Fixed-Interface Mode Method		Global F.E.analysis
	잉여강성 비고려시		잉여강성 고려시		Freq.(Hz)	Err.(%)	
Order	Freq.(Hz)	Err.(%)	Freq.(Hz)	Err.(%)	Freq.(Hz)	Err.(%)	Freq.(Hz)
1	2.419	0.00	2.419	0.00	2.419	0.00	2.419
2	3.100	0.00	3.100	0.00	3.100	0.00	3.100
3	4.531	0.09	4.527	0.00	4.527	0.00	4.527
4	9.681	0.04	9.677	0.00	9.677	0.00	9.677
5	11.139	1.01	11.028	0.00	11.028	0.00	11.028
6	13.541	0.10	13.528	0.00	13.528	0.00	13.528
7	21.801	0.18	21.789	0.12	21.762	0.00	21.762
8	23.807	0.20	23.797	0.16	23.759	0.00	23.759
9	27.389	0.10	27.381	0.07	27.362	0.00	27.362
10	38.701	0.21	38.698	0.20	38.619	0.00	38.619
11	41.351	0.27	41.311	0.17	41.241	0.00	41.241
12	45.901	0.02	45.899	0.01	45.896	0.01	45.894
13	60.117	0.17	60.106	0.09	60.089	0.06	60.053
14	63.241	0.03	63.237	0.03	63.232	0.02	63.221
15	68.791	0.03	68.790	0.03	68.773	0.00	68.771

Table 3 CPU Time 비교

Method	Free-Interface Mode Method		Fixed-Interface Mode Method	Global F.E.analysis
	잉여강성 비고려	잉여강성 고려		
CPU Time	98sec	210sec	121sec	180sec

5. 결 론

복잡한 구조시스템의 동특성 해석을 위한 부분구조합성법(CMS)을 3경간 연속 Steel Box 교량에 적용하기 위하여, 각 부분구조계의 저차의 고유진동형들을 선형결합으로 나타내어 전체구조물에 대한 진동 특성치를 구하고, 일반적인 유한요소해석방법과 비교·분석하여 타당성을 검증하였다. 부분구조합성법을 사용할 경우 물리좌표계 대신 모드좌표계로 표현하기에 자유도는 채용모드수에 따라 축소가능하며, 소자유도를 갖는 여러개의 부분계로 나누어 행하기 때문에 자유도수를 크게 줄일 수 있고, 각 부분구조계의 해석을 독립적으로 수행하므로서 입력자료의 작성 및 검토가 용이하며, 대칭성을 가지는 부분구조계로 나누어 해석하면, 한 부분계의 해석만으로 구속모드합성방법에 의해 전체의 진동특성을 일반적인 유한요소방법보다 빠르게 효율적으로 구할 수 있음을 입증하였다. 계산시간(CPU Time)만의 비교로는 불구속모드방법인 잉여컴플라이언스매트릭스를 쓰지 않은 방법이 가장 빠르며, 이는 CMS방법을 이용할 경우 전체에 대한 FEM 해석보다 한 번에 수행해야 할 자유도수가 적어지기 때문에 계산시간이 줄어들었음을 의미한다. 해석결과와 정확도를 비교해보면 구속모드방법이 가장 정확하고, 다음은 잉여컴플라이언스매트릭스를 쓰는 방법의 순서였다.

참 고 문 헌

1. Hurty, W. C., "Vibration Analysis of Structural Systems by Component Mode Synthesis" J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol.26, 1960.
2. Hurty, W. C., "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", AIAA Journal, Vol.3, No.4, 196
3. Hurty, W. C. and 2, "Dynamic Analysis of Large Structures by Modal Synthesis Techniques", Computer & Structures, 1(1971), 535
3. Humn, B. A., "A Method of Calculating the Space Free Resonant Modes of an Aircraft", J. Royal Aeronaut. Soc., 57(1953), 420
4. Macneal, R. H., "Vibration of Composite Systems", AFOSR-TN-55-120, Office of Scientific Research Air Research and Development Command, Technical Report No.4, 1954
5. Guyan, R. J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal, Vol.3, No.2, 1965, 380
6. 이정환, "A Study on the Identification and Improvement of Dynamic Characteristics of Large Structure by Substructure Synthesis Method", 한양 대학교 기계공학과 석사 논문, 1993
7. 이인원, 이종원, 정길호, "A model Analysis Technique for Large Structural Systems" 대한토목학회 논문집 제 13권 제 5호, 1993, 11
8. 김태남, "개선된 Mode Acceleration Method에 의한 해양 구조물의 동적 해석", 대한토목학회논문집 제14권 제1호, 1994, 1
9. 조병완, "차량하중작용시 교량의 동적진동감소에 관한 연구", 대한토목학회논문집, 제17권 제 3호, 1997.5
10. 조병완, "CMS 방법에 의한 대형 해양구조물의 동적모드해석", 대한토목학회논문집, 제17권 제 3호, 1997.5
11. 김병현, "부분구조진동형 합성방법에 의한 대형구조계의 진동해석 및 동특성 최적화", 서울대학교 박사학위논문, 1992