

재료적 비선형을 고려한 p -Version 유한요소해석

p -Version Finite Element Analysis for Material Nonlinearity

정우성* 홍중현** 우광성*** 신영식***
Jung, Woo-Sung Hong, Chong-Hyun Woo, Kwang-Sung Shin, Young-Shik

ABSTRACT

The high precision analysis by the p -version of the finite element method are fairly well established as highly efficient method for linear elastic problems, especially in the presence of stress singularity. It has been noted that the merits of p -version are accuracy, modeling simplicity, robustness, and savings in user's and CPU time. However, little has been done to exploit their benefits in elasto-plastic analysis. In this paper, the p -version finite element model is proposed for the materially nonlinear analysis that is based on the incremental theory of plasticity, the associated flow rule, and von-Mises yield criteria. To obtain the solution of nonlinear equation, the Newton-Raphson method and initial stiffness method, etc are used. Several numerical examples are tested with the help of the square plates with cutout, the thick-walled cylinder under internal pressure, and the center cracked plate under tensile loading. Those results are compared with the theoretical solutions and the numerical solutions of ADINA software.

1. 서론

구조물의 정적 및 동적하중이 작용시 파괴규준은 다음 세가지로 요약될 수 있다. 첫째는, 구조물의 항복(yielding)이다. 즉, 강구조물이나 콘크리트 구조물에서 하중의 수준이 기준값을 넘게 되면 재료는 항복되어 본래의 재료강도를 발현하지 못하고 구조물의 파괴를 초래한다. 둘째는, 균열 발생에 의한 파괴(fracture)이다. 강재의 경우 공장에서 제품화되어 현장에서 실제 시공될 때는 강재내부의 기포(void), 표면흠집, 용접부의 공극 및 이탈 등을 포함하는 초기흠집(initial flaws)을 갖게 된다. 구조역학의 특성상 이러한 취약부에는 응력집중이 발생되어 균열을 발생하며, 균열성장곡선에 따라 시간이 경과함에 따라 급속한 균열성장을 야기하여 구조물의 파괴를 가져온다. 셋째는, 기둥과 같은 압축재에서 발생하는 좌굴(buckling)에 의한 파괴를 들 수 있다. 둘째와 셋째의 경우는 재료가 항복점에 도달하기 전인 탄성영역에서도 발생하는 것이 첫째와 다른 점이라 할 수 있겠다.

본 연구에서는 앞에서 열거한 파괴규준중 첫째의 경우가 관심대상이 된다. 그러나, 구조물내에서는 외력에 저항하는 응력이 항상 구조물내에 균등한 공칭응력상태가 될 수 없다. 다시 말하면 구조물내에는 여러 요인에 의해 특정점에서는 수학적으로 무한응력이 발생하는 응력특이(stress singularity)가 발생할 수 있으며, 특히 응력특이점에서는 공칭응력의 몇 배 높은 응력이 발생되고 응력특이점 부근에서도 응력경사(stress gradient)가 매우 가파르게 되므로 쉽게 항복응력에 도달하여 탄소성거동을 하게 되는 것이다.

* 한국 수자원공사 수자원 연구소 구조재료팀 연구원

** 영남대학교 토목공학과 박사과정

*** 영남대학교 토목공학과 교수

한편, 지난 20년간 탄소성 구조해석에 관한 h-version 유한요소 논문들이 상당수 발표되었으나 p-version 유한요소법에 의한 연구논문은 거의 시작 단계라 할 수 있다. 그러므로, 본 연구의 목적은 계층적 성질을 갖는 적분형 르장드르 다항식(integrals of Legendre polynomials)에 기초를 둔 2차원 탄소성 평면응력/변형요소와 탄소성 축대칭요소를 개발하여 응력특이점이 발생하는 균열 문제, 손상단면 및 개구부를 갖는 문제에 적용하여 선형탄성해석에서 보인 효율성을 다시 입증시키고자 한다. 그리고, 제안된 탄소성 p-version 유한요소 해의 정확도와 우월성을 보이기 위해 h-version 소프트웨어인 ADINA의 수치해석 결과와 비교하고자 한다. 탄소성이론은 증분소성이론을 근거로 소성유동법칙(associated flow rule)과 von Mises 항복규준을 사용한 J_2 -이론에 의한 유한요소 정식화가 수행되며, 비선형방정식을 풀기 위해 Newton-Raphson 계열의 알고리즘과 직접강성도법 등의 반복법이 적용되었다. 또한, 탄소성과괴역학해석을 할 수 있도록 J -적분법 기초의 p-version 탄소성 균열모델의 기본 알고리즘을 개발하여 장차 반복하중을 받는 다양한 구조물의 J -값 산정 및 피로수명(fatigue life) 계산을 가능케 하는 등 효율적인 균열제어계획을 수립할 수 있는 기초적 연구가 되도록 하였다.

2. 연구내용, 범위 및 방법

2.1 고전적 소성이론

소성이론은 먼저 재료의 항복특성에 따라 분류될 수 있다 즉, 완전소성 재료와 변형경화 재료로 나누어 볼 수 있다. 완전소성 재료의 경우는 변형경화 재료에 비해 일정 소성흐름(constant plastic flow) 상태로 가정되므로 알고리즘이 간단한 형태를 취한다. 본 연구에서는 완전소성과 변형경화를 동시에 고려할 수 있는 소성이론을 채택하였다. 한편, 일반적으로 소성이론은 소성변형률을 어떻게 정의하느냐에 따라 다음 두 가지로 분류될 수 있다.

- (가) 변형소성이론(deformation theory of plasticity)
- (나) 증분소성이론(incremental theory of plasticity)

변형소성이론에 의하면 하중경로에 무관하게 전체 응력-변형률관계(total stress-strain relation)로 소성변형률을 정의하는데 아래 식과 같다.

$$\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^e = f(\sigma_{ij}) \quad (1)$$

여기서, ϵ_{ij}^p 는 소성변형률, ϵ_{ij} 는 전체변형률, ϵ_{ij}^e 는 탄성변형률을 나타내며 $f(\sigma_{ij})$ 는 하중함수(load function)이다. 이에 비해 본 연구에서 고려하고자 하는 증분소성이론은 하중경로를 고려하여 소성변형률을 정의하는데 소성유동법칙(associated flow rule) 즉, 소성이 발생하는 소성포텐셜 함수(plastic potential function) $g(\sigma_{ij})$ 와 하중함수 $f(\sigma_{ij})$ 가 동일하다는 가정과 von Mises 항복규준을 따른다. 즉, von Mises 하중함수는 다음과 같다.

$$f(\sigma_{ij}) = J_2 - k(x)^2 = 0 \quad (2)$$

여기서, J_2 는 축차응력텐서(stress deviator tensor)의 제 2불변량, $k(x)$ 는 일축 인장시험으로부터 얻어지는 재료상수로, 보통 일축응력시의 항복강도가 사용된다. 따라서, 소성유동법칙에 의한 소성변형률은 다음과 같이 정의될 수 있다. 따라서, $f=J_2$ 인 경우 소성유동법칙에 의한 직교조건(normality condition)으로부터 다음 관계를 쉽게 증명할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \quad (3)$$

한편, 소성변형률의 증분은 소성포텐셜 $g(\sigma_{ij})$ 의 응력경사(stress gradient)에 비례하므로 다음과 같다.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

소성유동법칙에 의해 $g=f$ 이므로 식(3)을 식(4)에 대입하면 아래 식을 얻는다.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \cdot s_{ij} \quad (5)$$

여기서, $d\lambda$ 는 비례상수, s_{ij} 는 축차응력텐서를 나타낸다. 소성변형률을 축차응력텐서로 표현되는 식을 일컬어 Prandtl-Reuss 방정식이라 한다. 또한, 전체변형률 증분량 $d\varepsilon_{ij}$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다[5,6].

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \cdot d\sigma_{kl} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

여기서, D_{ijkl} 는 재료의 탄성계수텐서이다. 그러므로, 식(6)의 첫 번째 항은 탄성변형률의 증분이고, 두 번째 항은 소성변형률의 증분을 나타낸다.

하중함수 f 를 어떻게 가정하느냐에 따라 항복기준이 달라지게 된다. 일반적으로 하중함수 $f(\sigma_{ij})$ 는 항복함수(yield function) 또는 변형경화함수(strain hardening function) $k(x)$ 와 등치로 둔다. 즉,

$$f(\sigma_{ij}) = k(x) \quad (7)$$

본 연구에서는 항복함수를 Tresca(1864년)는 식(8)과 같이 최대전단응력으로, von Mises(1913년)는 식(9)와 같이 축차응력의 제 2불변량으로 가정하고자 한다. 즉,

$$k(x) = \frac{\sigma_o}{2} = \frac{1}{2} \max[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|] \quad (8)$$

$$k(x) = \sqrt{J_2} \quad (9)$$

2.2 비선형 방정식 풀이를 위한 알고리즘

비선형 연립방정식을 푸는 알고리즘은 이미 여러 가지가 제안되어 있다. 일반적으로 탄소성재료의 비선형 매트릭스방정식은 다음과 같다[7].

$$\Psi^{m+1}\{U\} = {}^{m+1}\{F^{m+1}\{U\}\} - {}^{m+1}\{R\} \quad (10)$$

여기서, ${}^{m+1}\{U\}$ 는 변위, ${}^{m+1}\{F\}$ 는 내력, 그리고 ${}^{m+1}\{R\}$ 은 외력을 나타내며 내력과 외력이 같아질 때까지 반복수행된다. 즉, 증분해석에서 구조물에 작용하는 전체하중 $\{R\}$ 은 $(m+1)$ 반복단계에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{m+1}\{R\} = {}^m\{R\} + \{\Delta R\} \quad (11)$$

여기서, 뒀첨자 m 은 m 증분단계를 나타낸다. 한편, 변위와 응력도 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$${}^{m+1}\{U\} = {}^m\{U\} + \{\Delta U\} \quad (12)$$

$${}^{m+1}\{\sigma\} = {}^m\{\sigma\} + \{\Delta \sigma\} \quad (13)$$

그러므로, 응력에 의해 계산되는 내력 ${}^{m+1}\{F\}$ 는 다음과 같다.

$${}^{m+1}\{F\} = \int_V [B]^T \cdot {}^{m+1}\{\sigma\} dV \quad (14)$$

식(11)과 식(14)가 충분한 허용오차내로 같아지면 반복수행은 완료된다. 본 연구에서는 비선형 방정식을 풀기 위해 Initial stiffness Method 등을 사용하였다.

3. 수치해석

3.1 내압을 받는 두꺼운 원관(A thick-walled cylinder under internal pressures)

해석모델이 Fig.1에 나타나 있으며 이 문제의 경우 포아손비 ν 는 0.5로 가정하였고 항복조건으로는 Tresca의 항복규준을 사용하였다. 이론값은 참고문헌[5]에서 제시한 값을 사용하였고 p-version해석값은 수렴성 조사한 후 수렴구간에 있는 최소의 차수 6차를 사용하여 이론값과 비교하였다. Fig.2에 원주방향응력과 반경방향응력에 대한 이론값과 p-version해석값이 일치하는 것을 알 수 있고 Fig.3에 정규(normalized) 하중-변위 곡선에서도 제안된 p-version모델의 정확성을 알 수 있다.

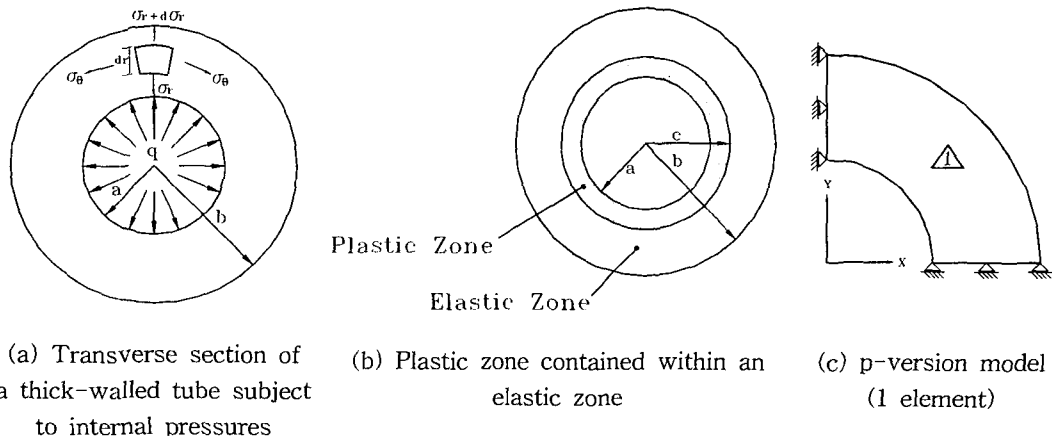


Fig.1 A thick-walled cylinder under internal pressures

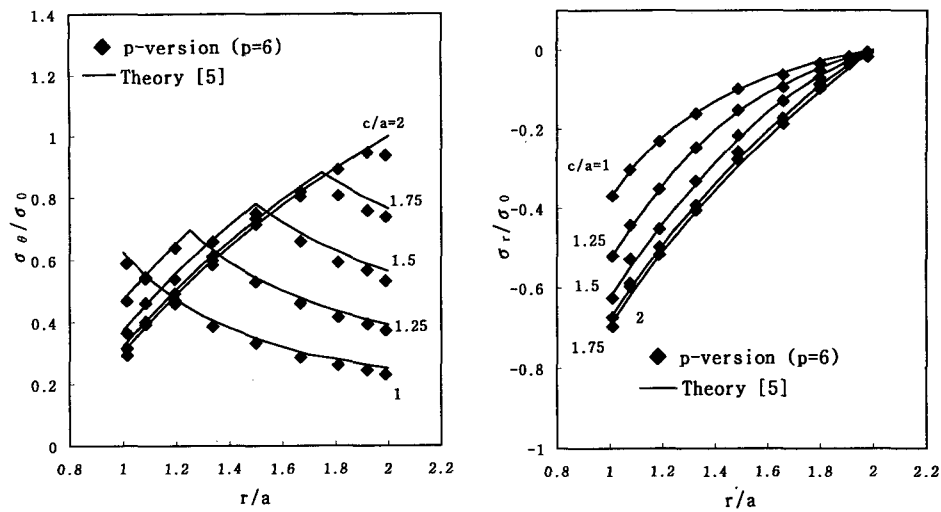


Fig.2 Successive distributions of the circumferential and radial stress in the elastic-plastic expansion of a tube : $b/a = 2$

3.2 단순지지된 원판(Simply supported circular plate)

등분포하중을 받고있는 단순지지된 원판을 축대칭요소로 모델링하였다. ADINA의 경우 8절점 등매개변수 요소 5개를 사용하였고 p-version의 경우 1개의 요소($p=4$)만을 사용하여 하중 변위 곡선으로 구축된 모델의 정확성을 Fig.4에 나타내었다.

3.3 손상단면을 갖는 정방형 평판(Square Plate with Cut-outs)

사각형 開口가 있는 정사각형 평판이 ADINA 134요소, 390요소와 618요소로 체눈 설계되었고 p-version모델은 2개 요소로 모델링되었다. Fig.7에서 수렴성 조사한 결과 차수 p 가 5차에서 부터 수렴하는 것을 알 수 있고 ADINA의 경우 Table 1에서 618개로 체눈 설계된 모델이 p-version모델의 결과와 가장 가깝다는 것을 알 수 있다. 한편, 제안된 p-version모델은 Fig.6에서 알 수 있듯이 ADINA 모델과 일치하는 결과를 보여주고 있다.

Table 1. Displacements of the outer edge and re-entrant corner ($\times 10^{-2}cm$)

distributed load (kg/cm^2)	midside of outer edge				reentrant corner			
	h-version model			p-version	h-version model			p-version
	134 elements	390 elements	618 elements	$p=5$	134 elements	390 elements	618 elements	$p=5$
100	2.30	2.42	2.45	2.48	1.06	1.10	1.10	1.14
200	4.61	4.85	4.89	4.96	2.12	2.20	2.20	2.28
300	6.91	7.28	7.35	7.44	3.18	3.32	3.32	3.43
400	9.23	9.72	9.80	9.92	4.28	4.47	4.50	4.57
500	11.57	12.24	12.34	12.46	5.39	5.70	5.71	5.78

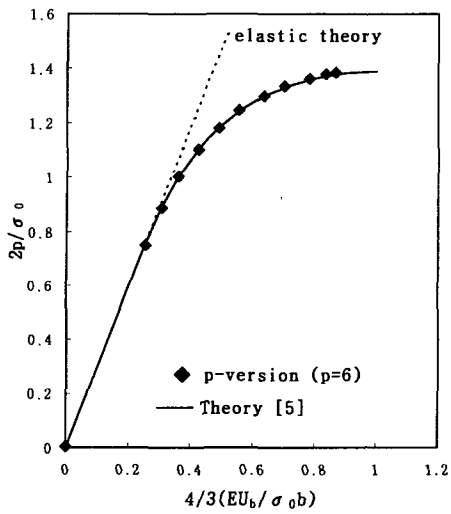


Fig.3 Elastic-plastic pressure-expansion curve

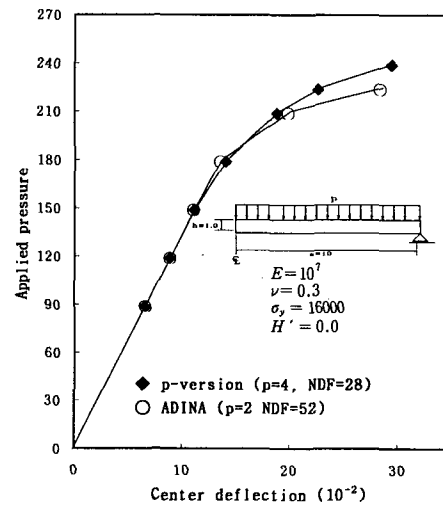


Fig.4 Central deflection response for a simply supported circular plate

3.4 중앙 균열판(Centre-cracked plate)

응력집중이 가장 심하게 발생하는 균열문제를 해석하였다. 해석예제는 Fig.8에 나타난 바와 같이 중앙균열판 문제로 균열선단에 높은 응력집중현상으로 인해 비교적 낮은 응력상태에서도 항복이 발생된다. Fig.9에서는 하중증분에 따른 J 적분값을 도시하였고, h-version 모델은 8절점 등매개변수 요소를 사용하여 20개 요소를 사용한 반면 p-version 모델은 4개 요소에 차수 p 는 6차를 사용하고 있다.

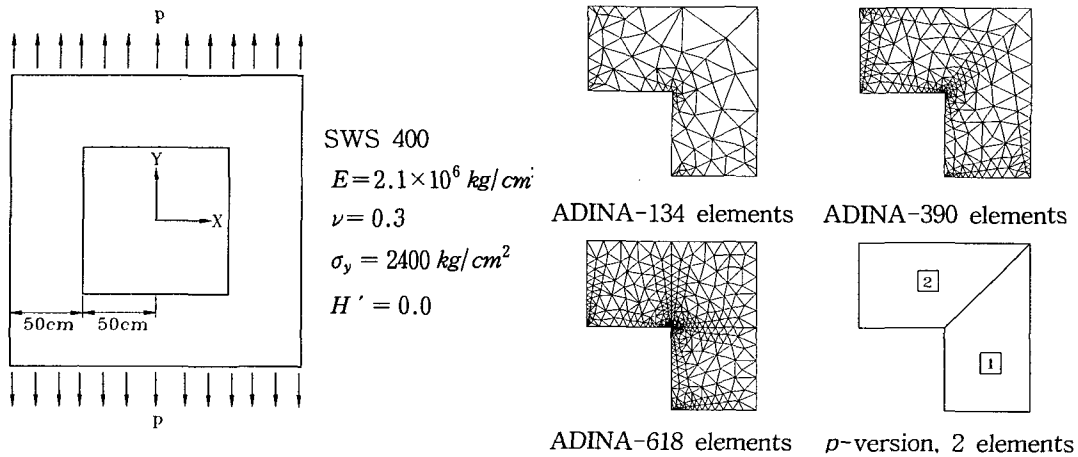


Fig.5 A square plate with cut-outs

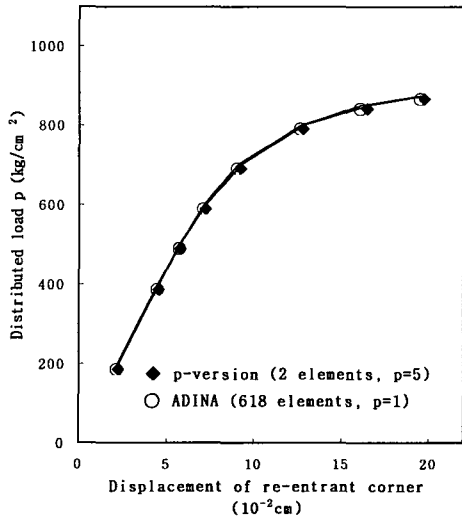


Fig.6 Displacement of outer edge & re-entrant corner

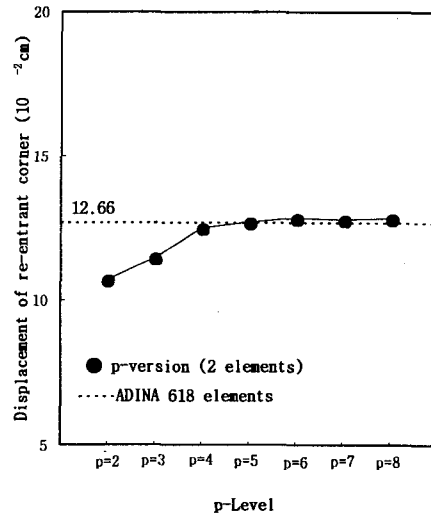


Fig.7 Convergence check of displacement when $\sigma = 800 \text{ kg/cm}^2$

4. 결론

본 연구에서는 2차원 평면응력/변형과 축대칭 p-version 탄소성 요소를 개발하였다. 응력특이성을 갖기 때문에 응력특이점으로 부터 항복에 쉽게 도달하여 소성영역이 비교적 큰 구조물의 탄소성해석시 제안된 모델의 정확도를 나타내었다. 또한 선형탄성 한도내에서 입증된 p-version 유한요소법의 장점들이 탄소성 역학 분야에서도 응용될 수 있다는 것을 확인하였다.

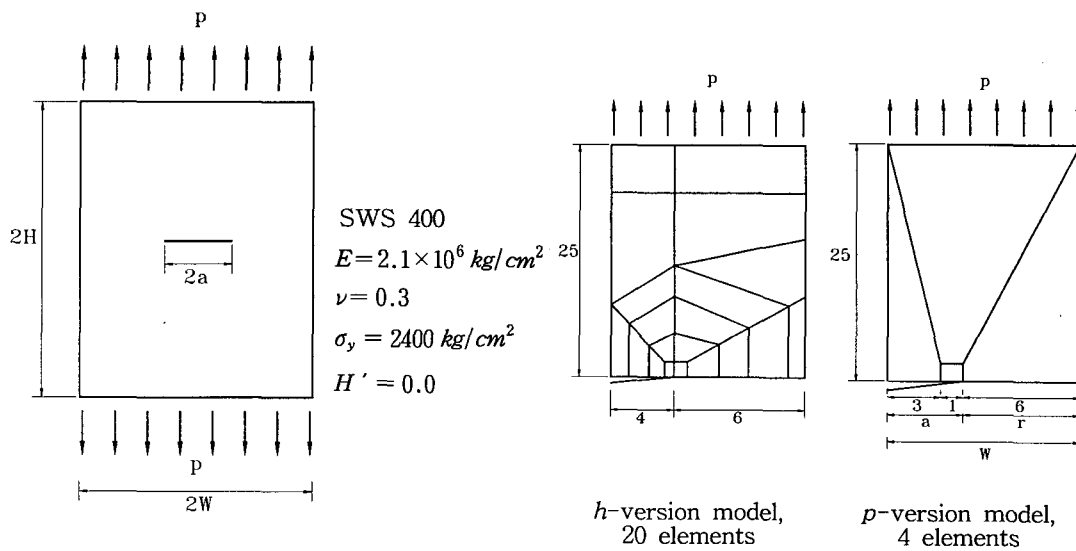


Fig.8 Finite element models for the center-cracked plates

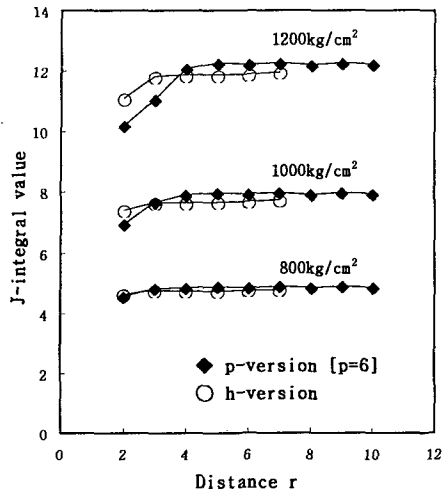


Fig.9 Variation of J with radial distance of the contour from the tip for the elasto-plastic center-cracked plate

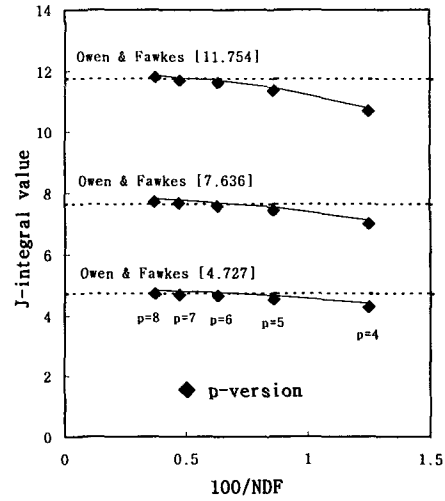


Fig.10 J -integral values versus NDF of center-cracked plate ($a/W = 2/3$, $H/W = 2.5$)

5. 참고문헌

- (1) I. Babuska, B.A. Szabo, "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method", *Numer. Meth. Engng.*, Vol.18, pp.323-341 (1982)
- (2) B.A. Szabo, "Some Recent Developments in Finite Element Analysis", *Comp. Math. Applications*, Vol.5, pp.99-115 (1979)
- (3) O.C. Zienkiewicz, J.P. De, S.R. Gago, D.W. Kelly, "The Hierarchic Concept in Finite Element Analysis", *Compt. Struct.*, Vol.16, pp.51-65 (1983)
- (4) P.K. Basu, R.M. Lamprecht, "Some Trends in Computerized Stress Analysis", Proc. of the *Seventh ASCE Conference in Electronic Computation*, Washington University, St. Louis (1979)
- (5) W.F. Chen, D.J. Han, "Plasticity for Structural Engineers", *Springer-Verlag*, (1988)
- (6) A. Mendelson, "Plasticity: Theory and Application", *Robert E. Krieger Pub.*, (1968)
- (7) D.R.J. Owen, E. Hinton, "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice", *Pineridge Press* (1980)
- (8) S.M. Holzer, "The p-Version of the Finite Element Method in Incremental Elasto-Plastic Analysis", *Numer. Meth. Engng.*, Vol.39, pp.1859-1878 (1996)