

# 지반-구조물의 상호작용 해석을 위한 해석적 2 차원 무한요소 Development of Analytical Two Dimensional Infinite Elements for Soil-Structure Interaction Analysis

윤정방\*  
Yun, Chung Bang

김두기\*\*  
Kim, Doo Kie

## ABSTRACT

In this paper, two dimensional analytical infinite elements which can include multiple wave components to model a underlying half-space are developed. Since these elements are expressed clearly and simply using Legendre polynomials of frequencies in frequency domain, these are very economical and efficient in computing the responses of strip foundations in frequency domain and are easily transformed for SSI analysis in time domain. To prove the behavior of the proposed two dimensional analytical infinite elements, vertical, horizontal, and rocking compliances of a rigid strip foundation in layered soils are analyzed and compared with those of Tzong & Penzien<sup>(17)</sup> and with those which calculated by numerical infinite elements<sup>(1)</sup> in frequency domain, and good agreements are noticed between them. As an application for a further study, a new scheme for SSI analysis in time domain are proposed and verified by comparing the displacement responses of the soil with a underlying rock due to a rectangular impulse loading with those of a soil modeled by extended FE meshes.

## 1. 서론

지반-구조물의 상호작용해석에 있어서 외부영역으로의 파동의 전파에 대한 고려는 필수적이며, 이를 효과적으로 해결하기 위한 여러가지 외부영역의 모형화 방법이 개발되어왔다. 대표적인 외부영역의 모형화 방법으로는 경계요소법<sup>(6,7,14,16)</sup> 및 무한요소법<sup>(13)</sup> 등이 있다. 이 방법들 중의 하나인 무한요소법은 내부영역(near field)의 외부(far field)를 무한요소를 사용하여 모형화하는 방법이며, 무한요소의 형상함수는 주어진 문제의 무한영역에서의 해석함수를 근간으로 구한다. 1970년대 초반에 Ungless<sup>(15)</sup>와 Bettess<sup>(12)</sup>에 의해 이 방법이 처음으로 소개된 이후, 반무한 탄성지반의 정역학 및 동역학적 문제에 대해 많은 논문들이 발표되었다<sup>(2)</sup>.

주파수영역에서의 반무한 탄성지반의 동역학적 문제에 관하여는 1981년 Chow와 Smith<sup>(20)</sup>가 지수감쇠하는 무한요소의 형상함수를 사용하여 하나의 파만 전파할 수 있는 수평 및 수직무한요소를 개발하였고, 1982년 Medina와 Penzien<sup>(8)</sup>은 반무한영역으로의 파동의 전파형상을 고려한 형상함수를 사용하여 다중파동을 동시에 전파할 수 있는 수평 및 방사형 무한요소를 개발하였다. 1987년 Zhang과 Zhao<sup>(4)</sup>는 진동의 전파형상을 고려하되 방사형 무한요소보다 자연스럽고 경제적인 수직과 모서리 무한요소를 사용한 세분화 방법을 제시하였다. 그러나, 이들은 단일파동함수를 사용하였으므로, 다중파동함수를 고려한 수직 및 모서리 무한요소에 대한 정식화가 요구되었고, 다중파동함수를 사용한 수직 및 모서리무한요소가 Yun과 Kim<sup>(9)</sup>에 의해 개발되었다.

지반과 구조물의 비선형성 등을 고려하기 위해 시간영역에서의 지반-구조물의 상호작용해석이 많이 시도되어 왔다. 이러한 해석 방법들 중의 하나로 주파수영역에서 구한 지반의 외부영역의 동적강성행렬을 사용하여 시간영역해석에서의 가상경계에서의 지반-구조물의 상호작용력을 구하는 방법들<sup>(9,10,18)</sup>이 있다. 이들 방법은 주파수영역에서의 외부영역의 동적강성행렬을 명시적인 형태로 구할 수 없으므로 가정하거나 수치적인 방법으로 구하여 이를 시간영역해석에 사용하였다.

본 연구에서는 다중파동함수를 사용한 해석적 2 차원 수평, 수직, 모서리무한요소를 개발한 후, 주파수영역과 시간영역에서 동적해석을 수행하였다. 주파수영역에서 외부영역의 동적강성행렬을 주파수에 관한 다항식의 형태로 유도했으며, 이를 이용한 거동을 다른 방법과의 비교를 통해 검증하였다. 또한 해석적 무한요소를 사용한 시간영역 해석법을 제안하였으며, 암반상에 놓인 지반의 충격 하중에 의한 변위이력을 유한요소법을 사용하여 구한 결과와 비교하여 검증하였다.

\* 정회원·한국과학기술원 토목공학과 교수

\*\* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

## 2. 다중파동함수의 정식화

수평적층된 상부의 지반과 하부의 반무한지반으로 이루어진 지반-구조물의 상호작용문제를 해석하기 위해, 외부영역을 그림 1 과 같이 3 종류의 무한요소를 사용하여 나타내었다. 즉, 수평적층지반은 수평무한요소(HIE)를, 하부의 반무한지반은 수직무한요소(VIE)와 모서리무한요소(CIE)를 사용하여 모형화하였다. 수평과 수직무한요소는 내부영역과 외부영역의 경계면에서 3 개의 절점을 가지며, 모서리무한요소는 1 개의 절점을 가진다. 또한 이들 무한요소들은 외부로 전파하는 파동의 형상에 해당하는 형상함수<sup>(3,11)</sup>를 사용하였다.

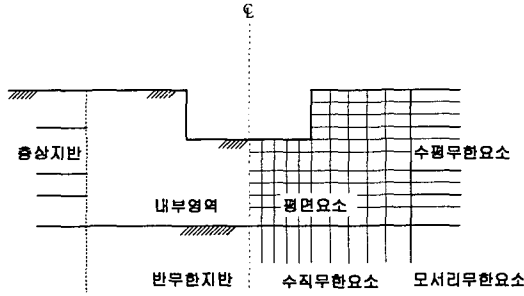


그림 1. 지반-구조물의 모형화

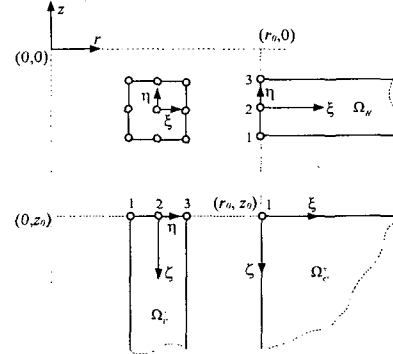


그림 2. 무한요소의 국지좌표계

각 무한요소에 사용된 국지좌표계는 그림 2 와 같으며, 국지좌표계에서 전체좌표계로의 좌표변환은 아래와 같다.

$$r = r_0(1 + \xi), \quad z = \sum_{j=1}^N L_j(\eta) z_j \quad : \text{수평무한요소} ((r, z) \in \Omega_H^e) \quad (1a)$$

$$r = r_0(1 + \xi), \quad z = z_0 - \zeta \quad : \text{모서리무한요소} ((r, z) \in \Omega_C^e) \quad (1b)$$

$$r = \sum_{j=1}^N L_j(\eta) r_j, \quad z = z_0 - \zeta \quad : \text{수직무한요소} ((r, z) \in \Omega_V^e) \quad (1c)$$

여기서  $\eta \in [-1, 1]$ ,  $\xi \in [0, \infty)$ ,  $\zeta \in [0, \infty)$  이며,  $L_j(\eta)$  는 Lagrangian 형상함수이다. 파동형상함수와 일반좌표를 사용하여 변위를 근사하면

$$\mathbf{u}(r, z; \omega) = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M N_{jm}(\omega) \mathbf{p}_{jm}(\omega) \quad (2)$$

이다. 여기서  $N$  과  $M$  은 무한요소의 절점과 파동함수의 갯수이고,  $N_{jm}$  과  $\mathbf{p}_{jm}$  은 무한요소의 형상함수와 일반좌표이다.

변위를 근사하기 위해 다음과 같은 형상함수를 사용하였다.

$$N_{jm}^H(\xi, \eta; \omega) = L_j(\eta) f_m(\xi; \omega) \quad : \text{수평무한요소(HIE)} \quad (3a)$$

$$N_{jm}^C(\zeta, \xi; \omega) = f_j(\xi; \omega) g_m(\zeta; \omega) \quad : \text{모서리무한요소(CIE)} \quad (3b)$$

$$N_{jm}^V(\zeta, \eta; \omega) = L_j(\eta) g_m(\zeta; \omega) \quad : \text{수직무한요소(VIE)} \quad (3c)$$

식 (3)에서 사용된 파동함수  $f_j(\xi; \omega)$  와  $g_m(\zeta; \omega)$  는 각각 수평과 수직방향의 파동전달형상을 근사하기 위한 함수로 다음과 같다.

$$f_j(\xi; \omega) \in \{e^{-(\alpha + ik_r)\eta_0^2}, e^{-(\alpha + ik_r)\eta_0^2}\} \oplus \{e^{-ik_r \eta_0^2}\}_{m=1}^{N_r} \quad (4a)$$

$$g_j(\zeta; \omega) \in \{e^{-(\alpha + ik_r)\zeta}, e^{-(\alpha + ik_r)\zeta}\} \oplus \{e^{-\mu_{om}\zeta}, e^{-\mu_{om}\zeta}\}_{m=1}^{N_r} \quad (4b)$$

여기서  $\xi = 0$  일때  $f_j(\xi; \omega) = 1$  이고,  $\zeta = 0$  일때  $g_j(\zeta; \omega) = 1$  이며,  $\alpha$  는 물체파에 대한 기하학적 감쇠를 나타내는 감쇠계수이다<sup>(19)</sup>.

### 3. 해석적분

수평, 수직, 모서리무한요소의 질량과 강성행렬에 대한 구성행렬(component matrix)은

$$[m_{ab}]_{(2 \times 2)} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b d\Omega, \quad [k_{ab}]_{(2 \times 2)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega \quad (5)$$

이며, 다중파동함수와 무한요소의 정의를 사용하면

$$[k_{ab}]_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} D_{11}I_{11} + D_{33}I_{22} & D_{12}I_{12} + D_{33}I_{21} \\ D_{22}I_{21} + D_{33}I_{12} & D_{22}I_{22} + D_{33}I_{11} \end{bmatrix}, \quad [m_{ab}]_{(2 \times 2)} = \rho \begin{bmatrix} I_{00} & 0 \\ 0 & I_{00} \end{bmatrix} \quad (6)$$

이다. 여기서  $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, D_{33}$ 는 탄성행렬(elasticity matrix)의 구성성분으로 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}, I_{00}$ 는 식 (8)과 같이  $C_m(\omega), C_n(\omega), C_p(\omega), C_q(\omega)$ 를 정의하면 표 1과 같으며, 표 1에서의  $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ij}, \tilde{C}_{ij}, \tilde{D}_{ij}$ 는 Lagrangian 형상함수의 적분값으로 표 2에 실었다.

$$C_m, C_n \in \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + ik_s)r_0 \\ (\alpha + ik_p)r_0 \\ \{ik_m r_0\}_{m=1}^{N_s} \end{array} \right\} : \text{수평파동함수}, \quad C_p, C_q \in \left\{ \begin{array}{l} \alpha + ik_s \\ \alpha + ik_p \\ \{\mu_{sm}\}_{m=1}^{N_s} \\ \{\mu_{pm}\}_{m=1}^{N_s} \end{array} \right\} : \text{수직파동함수} \quad (8)$$

표 1.  $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}, I_{00}$

	HIE	VIE	LCIE	RCIE
$N_a$	$N_a^{im} = L_i(\eta)f_m(\xi)$	$N_a^{ip} = L_i(\eta)g_p(\zeta)$	$N_a^{mp} = f_m(\xi)g_p(\zeta)$	$N_a^{mp} = f_m(\xi)g_p(\zeta)$
$N_b$	$N_b^{in} = L_i(\eta)f_n(\xi)$	$N_b^{iq} = L_i(\eta)g_q(\zeta)$	$N_a^{nq} = f_n(\xi)g_q(\zeta)$	$N_a^{nq} = f_n(\xi)g_q(\zeta)$
$I_{11}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{h}{2r_0} \frac{C_m C_n}{C_m + C_n}$	$\tilde{B}_{ij} \frac{2}{h} \frac{1}{C_p + C_q}$	$\frac{1}{r_0} \frac{C_m C_n}{C_m + C_n} \frac{1}{C_p + C_q}$	$\frac{1}{r_0} \frac{C_m C_n}{C_m + C_n} \frac{1}{C_p + C_q}$
$I_{12}$	$-\tilde{C}_{ij} \frac{C_m}{C_m + C_n}$	$\tilde{D}_{ij} \frac{C_q}{C_p + C_q}$	$\frac{C_m}{C_m + C_n} \frac{C_q}{C_p + C_q}$	$-\frac{C_m}{C_m + C_n} \frac{C_q}{C_p + C_q}$
$I_{21}$	$-\tilde{D}_{ij} \frac{C_n}{C_m + C_n}$	$\tilde{C}_{ij} \frac{C_p}{C_p + C_q}$	$\frac{C_n}{C_m + C_n} \frac{C_p}{C_p + C_q}$	$-\frac{C_n}{C_m + C_n} \frac{C_p}{C_p + C_q}$
$I_{22}$	$\tilde{B}_{ij} \frac{2r_0}{h} \frac{1}{C_m + C_n}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{h}{2} \frac{C_p C_q}{C_p + C_q}$	$r_0 \frac{1}{C_m + C_n} \frac{C_p C_q}{C_p + C_q}$	$r_0 \frac{1}{C_m + C_n} \frac{C_p C_q}{C_p + C_q}$
$I_{00}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{1}{2} r_0 h \frac{1}{C_m + C_n}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{h}{2} \frac{1}{C_p + C_q}$	$r_0 \frac{1}{C_m + C_n} \frac{1}{C_p + C_q}$	$r_0 \frac{1}{C_m + C_n} \frac{1}{C_p + C_q}$

표 2. Lagrangian 형상함수의 적분

$L_1(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta-1), L_2(\eta) = (1+\eta)(1-\eta), L_3(\eta) = \frac{1}{2}(\eta+1)\eta$			
$\tilde{A}_{ij} = \int_{-1}^{+1} L_i(\eta)L_j(\eta)d\eta$	$\tilde{B}_{ij} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial L_i(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial L_j(\eta)}{\partial \eta} d\eta$	$\tilde{C}_{ij} = \int_{-1}^{+1} L_i(\eta) \frac{\partial L_j(\eta)}{\partial \eta} d\eta$	$\tilde{D}_{ij} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial L_i(\eta)}{\partial \eta} L_j(\eta)d\eta$
$[\tilde{A}_{ij}]_{(3 \times 3)} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	$[\tilde{B}_{ij}]_{(3 \times 3)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$	$[\tilde{C}_{ij}]_{(3 \times 3)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$	$[\tilde{D}_{ij}]_{(3 \times 3)} = -[\tilde{C}_{ij}]_{(3 \times 3)}$

#### 4. 해석적 무한요소

어떤 주파수 영역내에서 물체파와 표면파에 대해 표 3 과 같은 2 개의 가정을 도입하였다.

표 3. 해석적 무한요소의 기본가정

		가정전	가정후
가정 1	물체파(P-, S- waves)	$\alpha + \text{Re}\{ik_s\omega\}$ $\alpha + \text{Re}\{ik_p\omega\}$	$\text{Re}\{\tilde{k}_s\omega\}$ $\text{Re}\{\tilde{k}_p\omega\}$
가정 2	표면파(R-waves)	$k_m(\omega)$	$\tilde{k}_m\omega \Big _{m=1}^N$

여기서  $\tilde{k}_s, \tilde{k}_p, \tilde{k}_m$ 은 복소상수이다.

2 차원 파동전파이론에 의하면 물체파의 거리에 따른 감쇠는 주파수 독립적인 감쇠인 기하학적 감쇠와 주파수 종속적인 감쇠인 재료감쇠로 표현된다. 무한요소에서는 기하학적인 감쇠를 감쇠계수  $\alpha$  를 사용하여, 재료감쇠는  $\text{Re}\{ik_s\omega\}$  를 사용하여 나타낸다. 기하학적 감쇠는 주로 매우 저주파수영역에 영향을 미치며, 그 영향이 미비한 것으로 알려져 있으므로, 본 연구에서는 해석적 무한요소를 유도하기 위해 주파수 독립적인 기하학적 감쇠의 영향을 주파수 종속적인 재료감쇠를 사용하여 고려하였으며, 이를 그림 3 에 개념도로 나타내었다. 특히, 2 차원 문제의 경우에 표면파에 의한 에너지의 방사가 지배적이므로 본 연구에 사용된 가정 1 은 타당하다고 판단되며, 예제해석을 통해 이를 수치적으로 검증하였다. 또한, 가정 2 에서는 층상지반에서의 표면파의 분산적인 전파특성을 비분산 다중 표면파를 사용하여 고려하였으며, 가정 2 를 분산곡선을 사용하여 그림 4 에 개념도로 보였다.

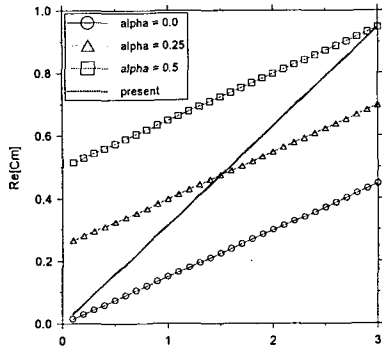


그림 3. 물체파에서의 등가 재료감쇠

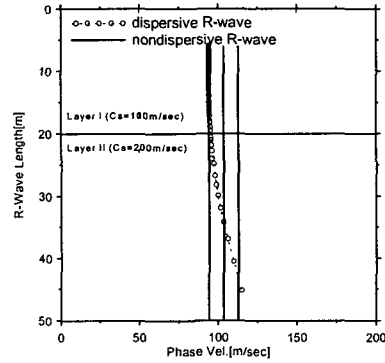


그림 4. 비분산 표면파

위의 가정들을 사용하면 식 (8)은 아래와 같다.

$$C_m, C_n \in \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + ik_s)r_0 \\ (\alpha + ik_p)r_0 \\ \{ik_m r_0\}_{m=1}^{N_s} \end{array} \right\} = \omega \left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_s r_0 \\ \tilde{k}_p r_0 \\ \{\tilde{k}_m r_0\}_{m=1}^{N_s} \end{array} \right\} = \omega \times \text{constants} \implies C_m(\omega) = \omega \tilde{C}_m, C_n(\omega) = \omega \tilde{C}_n \quad (9a)$$

$$C_p, C_q \in \left\{ \begin{array}{l} \alpha + ik_s \\ \alpha + ik_p \\ \{\tilde{\mu}_{sm}\}_{m=1}^{N_s} \\ \{\tilde{\mu}_{pm}\}_{m=1}^{N_s} \end{array} \right\} = \omega \left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_s \\ \tilde{k}_p \\ \{\tilde{\mu}_{sm}\}_{m=1}^{N_s} \\ \{\tilde{\mu}_{pm}\}_{m=1}^{N_s} \end{array} \right\} = \omega \times \text{constants} \implies C_p(\omega) = \omega \tilde{C}_p, C_q(\omega) = \omega \tilde{C}_q \quad (9b)$$

여기서  $\tilde{C}_m, \tilde{C}_n, \tilde{C}_p, \tilde{C}_q$ 는 복소상수이며,  $\tilde{\mu}_{sm}$ 과  $\tilde{\mu}_{pm}$ 은  $\{\sqrt{\tilde{k}_m^2 - \tilde{k}_s^2}\}_{m=1}^{N_s}, \{\sqrt{\tilde{k}_m^2 - \tilde{k}_p^2}\}_{m=1}^{N_s}$ 이다.

식 (9)를 사용하여 무한요소의 구성행렬을 구성하면 아래와 같이 주파수에 관한 다항식의 형태의 행렬이 나타낼 수 있다.

$$[k_{ab}] = \frac{1}{\omega} [k_1] + [k_2] + \omega [k_3], \quad [m_{ab}] = \frac{1}{\omega^2} [m_1] + \frac{1}{\omega} [m_2] \quad (10)$$

여기서  $[k_1], [k_2], [k_3]$ 와  $[m_1], [m_2]$ 는 주파수에 무관한 복소상수들로 구성된 복소상수 구성행렬들이며, 수평, 수직, 모서리 무한요소에 대해 표 4 에 나타내었다.

표 4. 복소상수 구성행렬

	HIE	VIE	LCIE, RCIE
$[k_1]$	$\begin{bmatrix} D_{33}\tilde{I}_{22} & 0 \\ 0 & D_{22}\tilde{I}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11}\tilde{I}_{11} & 0 \\ 0 & D_{33}\tilde{I}_{11} \end{bmatrix}$	---
$[k_2]$	$\begin{bmatrix} 0 & D_{12}\tilde{I}_{12} + D_{33}\tilde{I}_{21} \\ D_{22}\tilde{I}_{21} + D_{33}\tilde{I}_{12} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & D_{12}\tilde{I}_{12} + D_{33}\tilde{I}_{21} \\ D_{22}\tilde{I}_{21} + D_{33}\tilde{I}_{12} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11}\tilde{I}_{11} + D_{33}\tilde{I}_{22} & D_{12}\tilde{I}_{12} + D_{33}\tilde{I}_{21} \\ D_{22}\tilde{I}_{21} + D_{33}\tilde{I}_{12} & D_{22}\tilde{I}_{22} + D_{33}\tilde{I}_{11} \end{bmatrix}$
$[k_3]$	$\begin{bmatrix} D_{11}\tilde{I}_{11} & 0 \\ 0 & D_{33}\tilde{I}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{33}\tilde{I}_{22} & 0 \\ 0 & D_{22}\tilde{I}_{22} \end{bmatrix}$	---
$[m_1]$	---	---	$\rho \begin{bmatrix} \tilde{I}_{00} & 0 \\ 0 & \tilde{I}_{00} \end{bmatrix}$
$[m_2]$	$\begin{bmatrix} \tilde{I}_{00} & 0 \\ 0 & \tilde{I}_{00} \end{bmatrix}$	$\rho \begin{bmatrix} \tilde{I}_{00} & 0 \\ 0 & \tilde{I}_{00} \end{bmatrix}$	---

여기서  $\tilde{I}_{11}, \tilde{I}_{12}, \tilde{I}_{21}, \tilde{I}_{22}, \tilde{I}_{00}$  는 복소상수로 표 5 와 같다.

표 5.  $\tilde{I}_{11}, \tilde{I}_{12}, \tilde{I}_{21}, \tilde{I}_{22}, \tilde{I}_{00}$

	HIE	VIE	LCIE	RCIE
$\tilde{I}_{11}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{h}{2r_0} \frac{\tilde{C}_m \tilde{C}_n}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n}$	$\tilde{B}_{ij} \frac{2}{h} \frac{1}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$\frac{1}{r_0} \frac{\tilde{C}_m \tilde{C}_n}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{1}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$\frac{1}{r_0} \frac{\tilde{C}_m \tilde{C}_n}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{1}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$
$\tilde{I}_{12}$	$-\tilde{C}_{ij} \frac{\tilde{C}_m}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n}$	$\tilde{D}_{ij} \frac{\tilde{C}_q}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$\frac{\tilde{C}_m}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{\tilde{C}_q}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$-\frac{\tilde{C}_m}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{\tilde{C}_q}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$
$\tilde{I}_{21}$	$-\tilde{D}_{ij} \frac{\tilde{C}_n}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n}$	$\tilde{C}_{ij} \frac{\tilde{C}_p}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$\frac{\tilde{C}_n}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{\tilde{C}_p}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$-\frac{\tilde{C}_n}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{\tilde{C}_p}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$
$\tilde{I}_{22}$	$\tilde{B}_{ij} \frac{2r_0}{h} \frac{1}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{h}{2} \frac{\tilde{C}_p \tilde{C}_q}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$r_0 \frac{1}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{\tilde{C}_p \tilde{C}_q}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$r_0 \frac{1}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{\tilde{C}_p \tilde{C}_q}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$
$\tilde{I}_{00}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{1}{2} r_0 h \frac{1}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n}$	$\tilde{A}_{ij} \frac{h}{2} \frac{1}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$r_0 \frac{1}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{1}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$	$r_0 \frac{1}{\tilde{C}_m + \tilde{C}_n} \frac{1}{\tilde{C}_p + \tilde{C}_q}$

무한요소의 구성행렬을 조합하면 해석적 무한요소의 질량 및 강성행렬을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{pp}^{(e)}(\omega) = \frac{1}{\omega} \mathbf{K}_{pp}^1 + \mathbf{K}_{pp}^2 + \omega \mathbf{K}_{pp}^3, \quad \mathbf{M}_{pp}^{(e)}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \mathbf{M}_{pp}^1 + \frac{1}{\omega} \mathbf{M}_{pp}^2 \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{K}_{pp}^1, \mathbf{K}_{pp}^2, \mathbf{K}_{pp}^3$  과  $\mathbf{M}_{pp}^1, \mathbf{M}_{pp}^2$  는 주파수에 무관한 해석적 무한요소의 복소상수행렬이다.

### 5. 시스템 행렬의 구성

2 절에서 구한  $\mathbf{p}(\omega)$  는 일반좌표계에서의 변위벡터이므로, 앞절에서 구한 해석적 무한요소의 질량 및 강성행렬은 전체 시스템행렬에 조합할 수는 없다. 따라서 일반좌표로 구성된 무한요소의 질량 및 강성행렬을 식 (12)로 정의한 변환행렬<sup>(5)</sup>을 사용하여, 식 (13)과 같은 절점변위( $\mathbf{u}^{(d)}$ ), 변변위( $\mathbf{u}^{(s)}$ ) 및 내부변위( $\mathbf{u}^{(b)}$ )로 구성된 물리좌표계에서의 변위벡터  $\mathbf{q}(\omega)$ 로 정의된 질량 및 강성행렬 ( $\mathbf{M}_{qq}^{(e)}(\omega), \mathbf{K}_{qq}^{(e)}(\omega)$ )로 변환한다.

$$\mathbf{p}(\omega) = \mathbf{T}_{pq} \mathbf{q}(\omega), \quad \mathbf{N}_q(r, z; \omega) = \mathbf{N}_p(r, z; \omega) \mathbf{T}_{pq} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{qq}^{(e)}(\omega) &= \mathbf{T}_{pq}^T \left( \frac{1}{\omega} \mathbf{K}_{pp}^1 + \mathbf{K}_{pp}^2 + \omega \mathbf{K}_{pp}^3 \right) \mathbf{T}_{pq}, & \mathbf{M}_{qq}^{(e)}(\omega) &= \mathbf{T}_{pq}^T \left( \frac{1}{\omega^2} \mathbf{M}_{pp}^1 + \frac{1}{\omega} \mathbf{M}_{pp}^2 \right) \mathbf{T}_{pq} \\ &= \frac{1}{\omega} \mathbf{K}_{qq}^1 + \mathbf{K}_{qq}^2 + \omega \mathbf{K}_{qq}^3, & &= \frac{1}{\omega^2} \mathbf{M}_{qq}^1 + \frac{1}{\omega} \mathbf{M}_{qq}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{N}_q(r, z; \omega) = [\mathbf{N}_d, \mathbf{N}_s, \mathbf{N}_b]$  이며,  $\mathbf{q} = \langle \mathbf{d}^T, \mathbf{s}^T, \mathbf{b}^T \rangle^T$  이다.

## 6. 주파수영역 해석

식 (14)를 사용하여 앞절에서 구한 무한요소의 질량 및 강성행렬을 조합하면 식 (15)와 같은 외부영역의 동적강성행렬( $S_{bb}^*(\omega)$ )을 구할 수 있다.

$$S(\omega) = (1 + 2\zeta i)K - \omega^2 M \quad (14)$$

$$S_{bb}^*(\omega) = \frac{1}{\omega} S^1 + S^2 + \omega S^3 \quad (15)$$

여기서  $S^1, S^2, S^3$ 는 각각  $(1 + 2\zeta i)K^1, (1 + 2\zeta i)K^2 - M^1, (1 + 2\zeta i)K^3 - M^2$ 로 복소상수행렬이다.

$S_{bb}^*(\omega)$ 를 유한요소로 구성된 내부영역의 동적강성행렬과 조합하면 식 (16)과 같은 지반-구조물 호작용계의 동적강성행렬( $S(\omega)$ )을 구할 수 있다.

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} S_{ss}(\omega) & S_{sb}(\omega) \\ S_{bs}(\omega) & S_{bb} + S_{bb}^*(\omega) \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서 아래첨자  $s$ 는 가상경계를 제외한 내부영역의,  $b$ 는 가상경계의 자유도를 나타낸다.

수치적 검증용을 위해 그림 5와 같은 층상반무한 지반위에 놓인 스트립기초의 거동을 고찰하였다. 해석에 사용한 지반-구조물계의 모형화와 물성치를 그림 6과 표 6에 나타냈다.

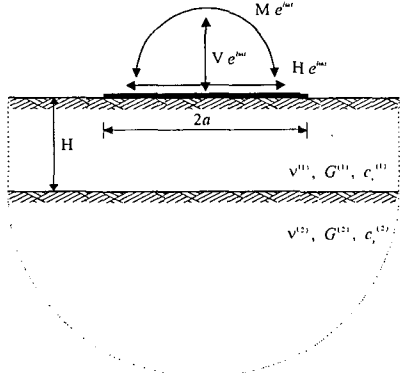


그림 5. 스트립기초

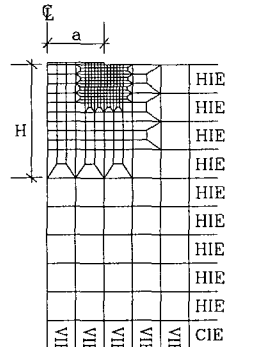


그림 6. 스트립기초의 모형화

표 6. 지반-구조물의 물성치

일반제원	사용치
유한요소 최대크기	해석상 최고주파수의 전단파장의 1/5 크기
재료감쇠비( $\xi$ ), 포아송비( $\nu$ )	0.05, 1/3
층깊이	$H/a = 2$
층간강성차이	$c_s^{(2)} / c_s^{(1)} = 3$
물체파와 Rayleigh 파	각각 1개

스트립기초의 수직, 수평, 회전 compliance를 Tzong & Penzien<sup>(17)</sup> 및 수치적 2차원 무한요소<sup>(1)</sup>의 결과와 서로 비교하였으며 그림 7에 그 결과를 나타냈다.

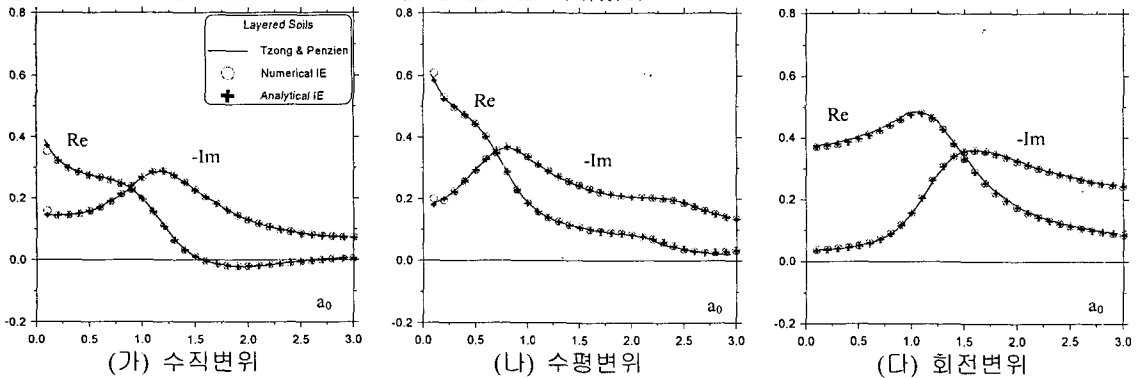


그림 7. 스트립기초의 compliance

## 7. 시간영역 해석

시간영역에서 지반-구조물 상호작용계의 운동방정식은 아래와 같다<sup>(9,10,18)</sup>.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}'_s(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}'_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(t) \\ \mathbf{u}'_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ -\mathbf{R}(t) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서  $\mathbf{u}'_s(t)$ 와  $\mathbf{F}(t)$ 는 가상경계를 제외한 내부영역에서의 변위와 작용하중이며,  $\mathbf{u}'_b(t)$ 와  $-\mathbf{R}(t)$ 는 가상경계에서의 변위와 외부영역으로의 파동의 전파에 따른 상호작용력이다.  $\mathbf{R}(t)$ 는 가상경계에서의 충격응답함수  $\mathbf{S}_{bb}^g(t)$ 를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{R}(t) = \int_0^t \mathbf{S}_{bb}^g(t-\tau) \mathbf{u}'_b(\tau) d\tau \quad (18)$$

여기서  $\mathbf{S}_{bb}^g(t)$ 는 주파수영역에서 구한 외부영역의 동적강성행렬( $\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)$ )의 푸리에역변환으로<sup>(9,10,18)</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{bb}^g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{S}_{bb}^g(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega} \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 + \omega \mathbf{S}^3\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega} (i\mathbf{S}^1) + \mathbf{S}^2 - i\omega (i\mathbf{S}^3)\right\} \\ &= i\mathbf{S}^1 H(t) + \mathbf{S}^2 \delta(t) - i\mathbf{S}^3 \dot{\delta}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

이다. 식 (19)에서 구한  $\mathbf{S}_{bb}^g(t)$ 를 식 (18)에 대입하여  $\mathbf{R}(t)$ 를 구하면

$$\mathbf{R}(t) = i\mathbf{S}^1 \int_0^t \mathbf{u}'_b(\tau) d\tau + \mathbf{S}^2 \mathbf{u}'_b(t) - i\mathbf{S}^3 \dot{\mathbf{u}}'_b(t) \quad (20)$$

이며, 이를 식 (17)에 대입하면

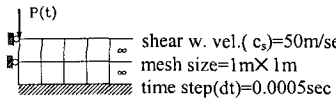

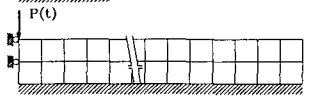
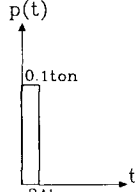
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}'_s(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}'_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\mathbf{S}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}'_s(t) \\ \dot{\mathbf{u}}'_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} + \mathbf{S}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(t) \\ \mathbf{u}'_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ -i\mathbf{S}^1 \int_0^t \mathbf{u}'_b(\tau) d\tau \end{Bmatrix} \quad (21)$$

이고, 지반의 재료감쇠비( $\zeta$ )가 0일 경우에  $i\mathbf{S}^1$ ,  $\mathbf{S}^2$ ,  $i\mathbf{S}^3$ 는 실수부가 허수부에 비해 지배적이므로 허수부의 영향을 무시하면, 실수행렬로만 구성된 시간영역에서의 지반-구조물 상호작용계의 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}'_s(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}'_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\text{Re}\{i\mathbf{S}^3\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}'_s(t) \\ \dot{\mathbf{u}}'_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} + \text{Re}\{\mathbf{S}^2\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_s(t) \\ \mathbf{u}'_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ -\text{Re}\{i\mathbf{S}^1\} \int_0^t \mathbf{u}'_b(\tau) d\tau \end{Bmatrix} \quad (21)$$

수치예제로 사용한 모형화와 충격하중을 표 7에 보였으며, 이때의 하중점에서의 변위응답을 그림 8에 보였다.

표 7. 지반의 모형화와 충격하중

	FE's	IE's	모형화
경우 1	8	2	
경우 2	8	0	
경우 3	200	0	
하중			

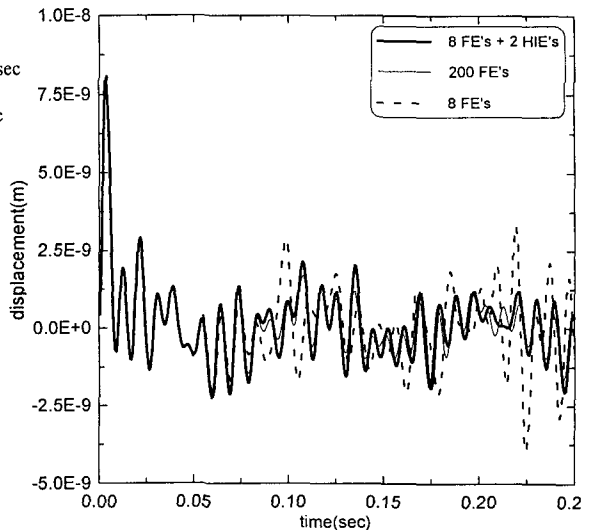


그림 8. 하중점에서의 변위응답 비교

## 8. 결론

본 연구에서는 다중파동함수를 사용한 해석적 2차원 수평, 수직, 모서리무한요소를 개발한 후, 주파수영역과 시간영역에서 동적해석을 수행하였다. 주파수영역에서 외부영역의 동적강성행렬을 주파수에 관한 다항식의 형태로 유도했으며, 이를 이용한 거동을 다른 방법과의 비교를 통해 검증하였다. 또한 해석적 무한요소를 사용한 시간영역 해석법을 제안하였으며, 암반상에 놓인 지반의 충격 하중에 의한 하중점에서의 변위이력을 유한요소법을 사용하여 구한 결과와 비교하여 검증하였다.

## 감사의 글

본 연구는 1995년 한국과학재단의 특정기초연구인 “대형복합역사 구조물의 건설 및 열차운행에 관한 지반-구조물 복합계의 해석기술개발”에 대한 2차년도 연구를 바탕으로 작성되었으며 연구비의 지원에 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

## 참고문헌

1. 윤정방, 김두기, 김유진, 박종찬(1996). “무한요소를 사용한 층상지반에 놓인 스트립기초의 진동전파해석,” 1996년 한국전산구조공학회 추계학술발표회 논문집, 202-209.
2. A. Curnier(1983). “A Static Infinite Element,” *Int. J. Numer. Methods Eng.* Vol. 19.
3. A.C. Eringen and E.S. Suhubi(1975), *Elastodynamics: II. Linear Theory*, Academic Press.
4. C. Zhang and C. Zhao(1987). “Coupling Method of Finite and Infinite Elements for Strip Foundation Wave Problems,” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 15, 839-851.
5. C.B. Yun, J.M. Kim(1995). “Axisymmetric Infinite Elements for Multi-Layered Halfspace,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*
6. C.C. Spyrakos and D.E. Beskos(1986). “Dynamic Response of Rigid Strip Foundation by Time Domain Boundary Element Method,” *Int. J. Numer. Methods Eng.* Vol. 23, 1547-1565.
7. E. Kausel(1974). “Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media,” Ph.D. Dissertation, MIT, Cambridge, Mass.
8. F. Medina and J. Penzien(1982). “Infinite Elements for Elastodynamics,” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 10, 699-709.
9. Hayashi and H. Katukura(1990). “Effective time-domain soil-structure interaction analysis based on FFT algorithm with causality condition”, *Earth. Engrg. Str. Dyn.*, Vol.19, pp.693-708.
10. J.P. Wolf(1988). *Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain*, Prentice Hall.
11. K.F. Graff(1975), *Wave Motion in Elastic Solids*, Ohio State.
12. P. Bettles(1977). “Infinite Elements,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 11, 54-64.
13. P. Bettles(1992). *Infinite Elements*, Penshaw Press.
14. P.K. Banerjee(1994). *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill.
15. R.F. Ungless(1973). “An Infinite Element,” M.A.Sc. Dissertation, Univ. of British Columbia.
16. S. Ahmad and P.K. Banerjee(1988). “Multi-domain BEM for Two-dimensional Problems in Elastodynamics,” *Int. J. Numer. Methods Eng.* Vol. 26, 891-911.
17. T.J. Tzong and J. Penzien(1983), *Hybrid Modelling of Soil-Structure Interaction in Layered Media*, Rep. No. UCB/EERC-83/22, EERC, Univ. of California, Berkeley, CA.
18. Wolf and C. Song(1996). *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*, John Wiley & Sons.
19. Y.B. Yang, S.R. Kuo, and H.H. Hung(1996). “Frequency-Independent Infinite Elements for Analysing Semi-Infinite Problems,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 39, 3553-3569.
20. Y.K. Chow and I.M. Smith(1981). “Static and Periodic Infinite Solid Elements,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 17, 503-526.