

무요소절점법의 수치해 정도 향상을 위한 연구

A Study on the Enhancement of the Solution Accuracy of Meshless Particle Method

이 상호* 김 상효** 강 용규*** 박 철원****
Lee, Sang-Ho Kim, Sang-Hyo Kang, Young-Kyu Park, Cheol-Won

Abstract

Meshless particle method is a numerical technique which does not use the concept of element. This method can easily handle special engineering problems which cause difficulty in the use of finite element method, however it has a drawback that essential boundary condition is not satisfied.

In this paper, several studies for satisfying essential boundary conditions and enhancing the accuracy of solutions are discussed. Particular emphasis is placed on a new numerical technique in which finite elements are used on the boundaries to satisfy the essential boundary conditions and meshless particle method is used in the interior domain. For coupling of the two methods interface elements are introduced into the zone between the subdomains using meshless particle method and finite element method. The shape functions and the approximated displacement functions of the interface element are derived with the ramp function based on the shape function of finite elements. The whole numerical procedures are formulated by Galerkin method. Several numerical examples for enhancing the accuracy of solution in the meshless particle method and a new coupling method are presented.

제 1 장 서 론

유한요소법(Finite Element Methods)은 광범위한 분야의 여러 공학적인 문제들을 해결하기 위한 가장 강력한 수치해석방법중의 하나로 지속적인 발전을 거듭하여 왔다. 그러나 유한요소법은 해의 정확도가 요구되는 부분에서 세분화된 요소망을 사용하여야 하며, 요소분할시 요소를 구성하는 절점들 사이에 어떤 규칙성과 연속성을 만족시켜야 하는 제약성을 지니고 있다. 이러한 제약은 응력이나 변형률이 집중되는 국부화문제, 특이성(singularity)이 발생하는 문제, 불연속 구간이 존재하는 문제, 기하학적 형상이나 경계조건, 불연속 구간 등이 계속적으로 변화하는 문제와 같은 특수 공학적 문제의 해결에 있어서는 유한요소법사용상의 큰 단점으로 지목받고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 요소의 개념을 사용하지 않고 절점들의 상호관계와 경계영역의 조건만을 사용하여 문제를 해결할 수 있는 무요소절점법(Meshless Particle Method)이라는 새로운 수치해석방법이 개발되었다.^{[1][4]} 무요소절점법에서는 어떤 기준점을 중심으로 그 점으로부터 일정한 영향영역내에 포함되어 있는 불규칙하게 분포된 절점들과의 위치적 상관관계에 의해 형상함수가 도출되고 변위함수가 결정된다. 이때 경계영역에 위치한 절점들은 필수경계조건을 정확히 만족시키지 못하는 경우가 발생할 수 있으므로 추가의 구속조건을 사용하여 경계조건이 만족될 수 있도록 하여야 한다.

* 연세대학교 토목공학과 조교수

** 연세대학교 토목공학과 부교수

*** 우대기술단

**** 연세대학교 토목공학과 석사과정

본 연구에서는 무요소절점법의 수치해의 정도를 향상시키기 위하여 해의 정확성을 유지시켜줄 수 있는 적절한 영향영역의 크기를 결정하고, 필수경계조건을 만족시킬 수 있는 기법들을 연구하며, 기존의 유한요소법의 장점과 무요소절점법의 장점을 살린 유한요소법과 무요소절점법의 조합에 의한 새로운 수치해석방법을 연구해 보기로 한다. 두 해석방법의 조합에 있어서는 Ramp함수를^{[5][6]} 이용한 접속요소를 사용하였다.

제 2 장 무요소절점법의 정식화

2.1 이동최소제곱보간법에 의한 형상함수와 변위함수의 도출

무요소절점법의 정식화에 사용되는 이동최소제곱보간법(moving least squares approximation)은 각각의 기준점을 중심으로 일정거리내에 있는 영향영역내에서 정의되는 가중함수(weight function)와 변위장(displacement field)을 대표하는 다항식 및 이에 대응하여 위치에 따라 변화하는 미지계수를 사용하여 수행된다. 영향영역내에서의 절점들의 연결성은 그 영향영역의 기준점으로부터 떨어진 거리에 따른 가중치로 나타내며, 전체영역에서의 연속성은 수치적분을 위해 기준점이 이동함에 따라 새로이 형성되는 영향영역들이 상호중첩됨으로써 나타나는 형상함수의 중복치로 유지된다.

무요소절점법에서 변위장 $u_i(\mathbf{x})$ 는 이동최소제곱보간에 의해 다음과 같이 근사변위함수 $u_i^h(\mathbf{x})$ 로 나타낼 수 있다. 이때 i 는 공간성분을 나타낸다.

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_{ji}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 는 임의의 차수의 m 개의 항을 갖는 벡터이며, 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 에 대응하는 계수값 $\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$ 역시 좌표계 \mathbf{x} 의 함수로서 이동최소제곱보간에 의한 변위 $u_i^h(\mathbf{x})$ 를 결정해 주는 미지계수값이다.

임의의 점 \mathbf{x} 에서의 미지계수값 $\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$ 는 \mathbf{x} 를 기준으로 하는 일정한 영향영역내의 절점들 \mathbf{x}_j 의 변위 오차에 대한 가중이산형 L_2 norm을 최소화시켜 구할 수 있다. 즉,

$$S = \sum_{j=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) - u_{ij}]^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{a}_i(\mathbf{x})} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i = 0 \rightarrow \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (3)$$

여기서, n 은 \mathbf{x} 를 중심으로 일정거리내에 포함되는 절점들의 개수이며, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ 는 \mathbf{x} 점으로부터 떨어진 거리비에 따른 가중함수이다. 또한, 매트릭스 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 와 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (5)$$

이동최소제곱보간에 의한 근사변위함수 $u_i^h(\mathbf{x})$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다고 하면

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\mathbf{x}) u_{iI} \quad (6)$$

영향영역내에 속하는 임의의 절점 I 에서의 형상함수 $\phi_I(\mathbf{x})$ 는 식(6)과 식(3)을 (1)에 대입한 결과로부터 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} \quad (7)$$

임의의 점에서의 변위함수는 그 점을 중심으로한 영향영역내의 절점들의 형상함수가 결정되면 식(6)을 이용하여 구할 수 있다.

2.2 가중함수

무요소절점법의 정식화에 사용되는 가중함수 $w_I(\mathbf{x}) \equiv w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 는 \mathbf{x}_I 가 기준점 \mathbf{x} 에 가까울수록 그 가중치는 상대적으로 커지고 반대로 \mathbf{x}_I 가 멀어질수록 작아지며, \mathbf{x}_I 가 영향영역 밖에 위치할 경우는 가중함수의 값은 0이 되고 기준점 \mathbf{x} 에서는 가중치가 1이 되는 특성을 가져야 한다. 따라서 다음과 같이 오직 두 점사이의 거리에만 종속되는 가중함수를 고려할 수 있다.

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w_I(r) \quad (8)$$

여기서, r 은 영향영역의 반경에 대한 기준점과 임의의 절점간의 거리비를 나타내는 무차원계수로 $r = d_I/R_I$ 이며 $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$, R_I 는 I 번째 절점의 영향영역의 반경을 의미한다. 경험에 의하면 가중함수의 선택에 있어 중앙에서 1의 값을 가지며 중앙에 밀집된 분포를 가지는 가중함수가 가장 정확한 수치해를 얻을 수 있으므로 본 연구에서는 다음과 같은 exponential 형태의 가중함수를 사용하였다.

$$w_I(r) = \begin{cases} e^{-(r/0.4)^2} & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (9)$$

2.3 필수경계조건을 만족시키기 위한 방법

무요소절점법의 형상함수는 kronecker delta 조건을 완벽하게 만족시키지 못하므로 무요소절점법에서 필수 경계조건을 만족시키기 위해 경계조건의 수정이 필요하다. 필수경계조건을 만족시키기 위해서는 Lagrange multiplier 방법, 수정변분원리(modified variational principle), boundary collocation method 등을 사용할 수 있다.

Lagrange Multiplier를 이용한 방법

Lagrange multiplier 방법은 기본적인 변분형식이 어떤 조건을 만족하도록 하기 위하여 Lagrange multiplier λ 를 포함하는 구속조건식을 변분형식에 추가시켜 줌으로써 그 조건식이 자동적으로 만족되도록 하는 방법이다. 즉, Lagrange multiplier는 표면력과 같고 필수경계조건의 만족을 위해 변위장 u_i 에 규정된 변위 \bar{u}_i 를 가한 구속조건을 추가한 변분형식으로부터 약형식(weak form)을 유도하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i d\Gamma = 0 \quad (10)$$

$$\forall \delta u_i \in H^1, \delta \lambda_i \in H^0$$

변분형식으로부터 이산방정식(discrete equation)에 의한 수치해를 얻기위하여 근사해 u_i 와 임의의 가상해 δu_i 는 식 (6)에 따라 구성할 수 있으며, 이때 Lagrange multiplier λ_i 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_i(x) = N_I(s) \lambda_{iI}, \quad x \in \Gamma_u \quad \text{그리고} \quad \delta \lambda_i(x) = N_I(s) \delta \lambda_{iI}, \quad x \in \Gamma_u \quad (11)$$

여기서 $N_I(s)$ 는 표준 Lagrange 형상함수이다. Lagrange multiplier 방법을 사용할 경우 강성도 매트릭스는 정치(positive definite)가 아니며, 미지수의 수가 증가하게 되고, 띠폭(banded width)을 가지지 않아 급속한 계산량의 증가를 초래하게 되는 단점이 있다.

수정변분원리를 사용하는 방법

수정변분원리에 의한 식을 얻기 위하여 식 (10)의 첫째 항을 부분적분하여 발산정리를 이용하면 약형식은 다음과 같이 된다.

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i (\bar{t}_i - t_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u_i (\lambda_i - t_i) d\Gamma = 0 \quad (12)$$

모든 변수에 대해 가상변위 δu_i 와 가상의 Lagrange multiplier $\delta \lambda_i$ 에 대한 상기식에서 첫 번째항은 평형방정식에 관한 것이며, 두 번째항은 경계영역 Γ_t 에서의 자연경계조건이고, 나머지항들은 경계영역 Γ_u 에서의 필수경계조건들이다. 식 (12)의 마지막 항으로부터 Lagrange multiplier λ_i 의 물리적인 의미는 변위경계영역 Γ_u 에서의 표면력임을 알 수 있다. 이 관계식을 식 (12)에 대입하면 다음과 같은 수정변분원리에 관한 변분형식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta t_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \quad (13)$$

수정변분원리를 이용하여 필수경계조건을 만족시키는 방법은 Lagrange multiplier를 사용하는 방법에 비해 계산량을 줄일 수 있으나 그 수식화 과정이 복잡하고 프로그래밍 과정에 있어 정형적인 Galerkin 방법에 의한 정식화 과정을 어색하게 만드는 단점이 있다.

제 3 장 무요소절점법과 유한요소법의 조합

무요소절점법은 경계영역 Γ 에서 필수경계조건 ($u_i = \bar{u}_i$)을 만족시키지 않는 단점이 있으므로 이를 해결하기 위하여 경계영역은 유한요소를, 내부영역에는 무요소절점법을 사용하는 조합방식을 이용한다. 유한요소와 무요소절점법의 조합에는 Ramp함수를 사용하는 접속요소가 사용되었다.

3.1 Ramp 함수

접속요소영역 Ω_I 에서 Ramp 함수는 무요소절점법의 영역과 접속요소가 만나는 경계 Γ_{PM} 에서는 1의 값을 갖고, 유한요소법의 영역과 접속요소가 만나는 경계 Γ_F 에서는 0의 값을 가지며 두 경계 사이에서 선형으로 분포되는 함수이다.

$$R(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Gamma_{MP}, \\ 0 & x \in \Gamma_F, \end{cases} \quad (14)$$

상기 조건을 만족하는 Ramp 함수는 무요소절점법 영역과 유한요소의 접속형상에 따라 3가지 형태로 나누어지며 접속요소와 접속요소가 만나는 면에서 값이 일정해야 한다. 이러한 Ramp 함수는 다음과 같이 유한요소의 형상함수의 합으로 정의될 수 있다.

$$R(x) = \sum_{x_j \in \Gamma_{MP}} N_j(x) \quad (15)$$

여기서 J 는 무요소절점의 개수를 나타낸다.

3.2 접속요소의 근사변위함수

접속요소에서 혼합된 근사변위함수는 무요소절점영역과 유한요소의 경계를 가로질러 연속되어야 하며 접속요소영역 Ω_I 내에서 다음과 같이 무요소절점법 근사변위함수와 유한요소 근사변위함수의 합으로 나타낼 수 있다.

$$u_i^h(x) = u_i^{FE}(x) + R(x)[u_i^{MP}(x) - u_i^{FE}(x)] \equiv [1 - R(x)]u_i^{FE}(x) + R(x)u_i^{MP}(x), \quad x \in \Omega_I \quad (16)$$

여기서, u_i^{MP} 와 u_i^{FE} 은 각각 무요소절점법과 유한요소의 근사변위함수를 의미한다. 따라서 접속요소의 근사변위함수와 형상함수의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_i^h(x) = [1 - R(x)] \sum_{l=1}^n N_l(\xi(x))u_{il}(x) + R(x) \sum_{l=1}^n \phi_l(x)u_{il}(x) \equiv \sum_{l=1}^n N_l^C(x)u_{il}(x), \quad x \in \Omega_I^e \quad (17)$$

식 (17)에서 접속요소의 I 번째 절점의 형상함수 $N_l^C(x)$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$N_l^C(x) = \begin{cases} [1 - R(x)]N_l(\xi(x)) + R(x)\phi_l(x) \\ R(x)\phi_l(x) \end{cases} \quad (18)$$

여기서 식 (18)의 첫 번째식은 영향영역의 기준점 x_l 가 접속요소의 영역 Ω_I^e 에 포함될 경우에 형상함수를 나타낸 것이며, 두 번째식은 기준점 x_l 가 접속요소의 영역의 외부에 위치할 경우의 형상함수를 나타낸 것이다.

Galerkin 방법에 의한 정식화 과정에 있어 무요소절점법과 유한요소법의 근사변위함수는 같은 형태의 식을 사용하며, 형상함수 $\bar{N}_l(x)$ 는 무요소절점법 영역내에서는 무요소절점법 형상함수 $\phi_l(x)$ 를, 유한요소 영역내에서는 유한요소 형상함수 $N_l(x)$ 를, 그리고 접속요소 영역내에서는 접속요소의 형상함수 $N_l^C(x)$ 를 사용하

며, 그 경계에서 상호 연속성이 유지된다.

$$\bar{N}_I(x) = \begin{cases} N_I(\xi(x)) & x \in \Omega_F^e \\ \phi_I(x) & x \in \Omega_{MF} \\ N_I^C(x) & x \in \Omega_I^e \end{cases} \quad (19)$$

제 4 장 수치해석 및 결과분석

4.1 무요소절점법의 적정 영향영역 크기 결정

무요소절점법에서 형상함수의 도출을 위한 영향영역의 크기는 해의 정확도에 큰 영향을 미친다. 영향영역의 크기가 지나치게 작아져서 영향영역내에 포함되는 절점의 개수가 다항식의 항수보다 적어지게 될 경우에는 수치해석적으로 특이성이 발생하게 되며, 반대로 그 크기가 지나치게 크게 되면 원거리에 있는 절점들이 미치는 영향으로 인해 해의 정확도가 떨어지게 된다.

본 연구에서는 무요소절점법 사용시 적정 영향영역의 크기를 결정하기 위하여 그림 1과 같은 해석대상 모형의 경계에 가정한 구속변위조건을 가한 후, 영향영역의 크기를 계속적으로 변화시켜가며 대상영역 내부의 절점들에서 계산된 수치해의 변위오차를 분석하였다. 그림 2와 3은 영향영역 크기에 따른 변위오차를 나타낸 것이다. 그림의 결과로부터 알 수 있듯이 일반적인 절점의 배치 간격에 비해 영향영역의 크기가 지나치게 클 경우 원거리의 절점들이 영향을 미치게 됨으로써 해의 정확도가 악화될 수 있으며, 불규칙한 절점배치를 갖는 경우, 영향영역의 크기가 충분치 않으면 상호영향을 미치는 절점들의 수가 제한됨으로 인해 해의 정도가 떨어지게 될 것을 시사하는 것이다. 상기의 결과와 다양한 예제들을 통한 경험으로부터 해의 높은 정도를 유지할 수 있는 적정 영향영역의 크기는 그 반경이 cell 크기의 1.5~2.0배일 때 임을 알 수 있었다.

4.2 패취시험

무요소절점법과 유한요소법의 조합에 의해 개발된 새로운 수치해석 프로그램의 정확성을 검증하기 위하여 그림 4와 같이 규칙적인 내부절점을 갖는 모형과 불규칙적인 내부절점을 갖는 모형을 사용하여 패취시험을 수행하였다. 두 경우 모두 필수경계조건을 완벽하게 만족시켰다. 내부절점의 정확도 검증 결과 규칙적인 내부 절점을 갖는 (a)모형의 경우 임의의 내부점에서의 변위와 응력의 오차는 1% 미만으로 나타났다. 이는 무요소절점법 영역내에 포함된 무요소절점의 수가 4개뿐인 관계로 나타나는 수치해석적 에러로 4개의 무요소절점을 C영역내에 추가로 배치하여 임의의 점들에서의 오차를 다시 확인한 결과 0%의 에러를 나타내었다. 불규칙한 내부절점을 갖는 (b)모형의 경우 임의점의 변위와 응력오차는 최고 4~5%를 나타냈으며, 4개의 절점을 추가한 경우 0.3%이하 수준으로 에러가 감소됨을 알 수 있었다.

4.3 직사각형 판의 응력집중 문제

그림 5는 2차원 직사각형 판에 집중하중이 작용하는 응력집중현상 문제이다. 그림 6은 각 해석방법에 따른 모형의 절점배치 형상을 나타낸 것으로, 그림 6(a)는 동일한 요소크기를 갖는 유한요소모형을 나타내며, 그림 6(b)는 경계부근 1층은 유한요소를, 그 내부는 1층의 점속요소와 무요소절점영역을 나타낸 것이고, 그림 6(c)는 응력집중이 예상되는 부위에 무요소절점을 집중배치한 형상이다. 모두 동일한 절점수를 사용하였다. 그림 7은 집중하중을 받는 직사각형 판의 $y=0$ 에서의 σ_x 분포를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 동일한 절점수와 배치상태를 사용한 경우(a, b), 유한요소 해석결과에 비해 무요소절점법과 유한요소법을 조합한 새로운 해석방법이 우월한 정도를 나타냄을 알 수 있었으며, 그림 7(c)와 같이 무요소절점들을 임의로 이동배치한 경우 손쉽게 수치해의 정도를 향상시킬 수 있음을 알 수 있었다.

제 5 장 결론

1. 본 연구를 통하여 무요소절점법이 필수경계조건을 만족시키지 못하는 단점을 보완할 수 있었다.
2. 무요소절점법 사용시 영향영역의 적정크기는 그 반경이 cell 크기의 1.5~2배 정도일 때 가장 높은 정확도를 유지할 수 있음을 알았다.

3. 동일한 절점배치를 사용한 2차원 응력집중문제의 해석을 통하여 본 연구에서 개발된 수치해석방법이 기존의 유한요소 해석방법에 비해 해의 정확도를 향상시킬 수 있음을 보였다.
4. 본 연구에서 개발된 무요소절점법과 유한요소법의 조합에 의한 새로운 수치해석기법은 필수경계조건을 만족시키며 요소망의 재구성 없이도 임의로 절점들을 추가, 삭제, 재배치할 수 있어 필요한 부위에서 손쉽게 수치해의 정확도를 향상시킬 수 있는 효율적인 해석방법임을 입증하였다.

감사의글

본 연구의 일부는 1996년도 연세대학교 학술연구비 지원에 의하여 수행되었으며 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

1. Lancaster, P. and Salkauskas, K., "Surfaces generated by moving least squares method", *Mathematics of Computation*, **37**, pp. 141-158, 1981.
2. Lancaster, P. and Salkauskas, K., *Curve and Surface Fitting*, Academic Press, 1986.
3. Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P., "Generalized the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, **10**, pp. 307-318, 1992.
4. Belytschko, T., Lu Y. Y., and Gu, L., "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods of Engineering*, **37**, pp. 229-256, 1994.
5. Belytschko, T., Chang, H. S., and Lu, Y. Y., "A variationally coupled finite element-boundary element method", *Computer and Structure*, **33**, pp. 17-20, 1989.
6. Lu, Y. Y., Belytschko, T., and Liu, W. K., "A variationally coupled FE-BE methods for elasticity and fracture mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, **85**, pp. 21-37, 1991.

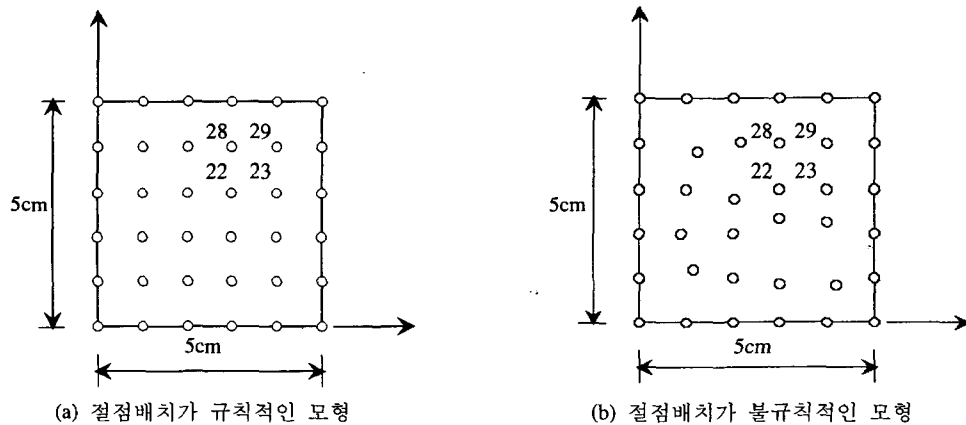


그림 1 적정 영향영역 크기 결정을 위한 모형

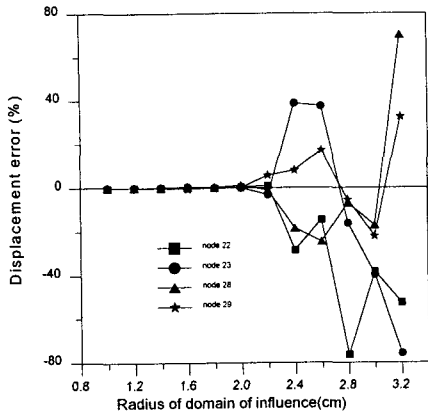


그림 2 규칙적인 절점배치 모형의 영향영역 크기에 따른 변위오차

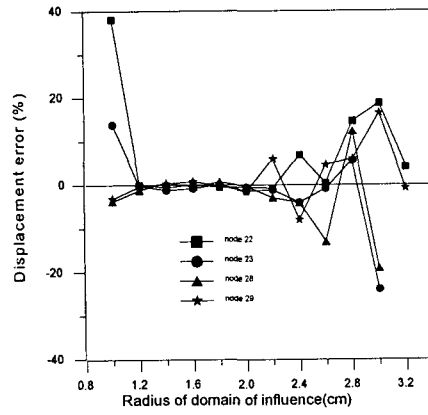
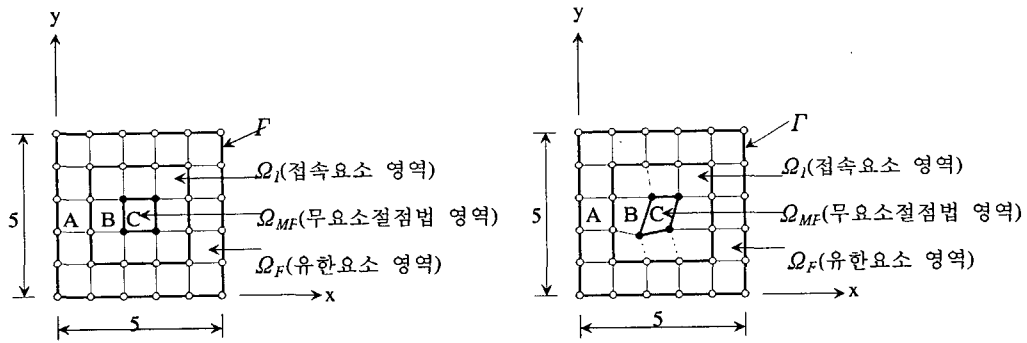


그림 3 불규칙적인 절점배치 모형의 영향영역 크기에 따른 변위오차



(a) 규칙적인 내부절점을 갖는 패취모형

(b) 불규칙적인 내부절점을 갖는 패취모형

그림 4 무요소절점법과 유한요소법의 조합에 의한 패취모형

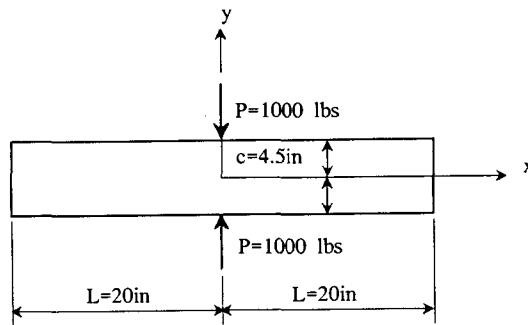
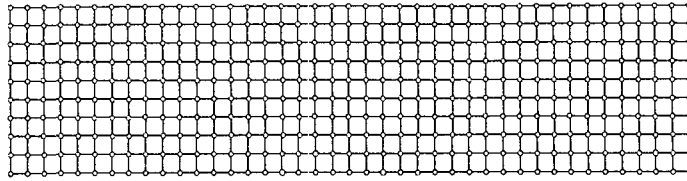
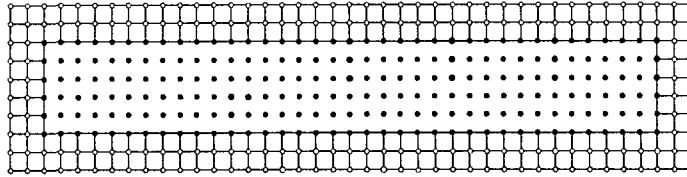


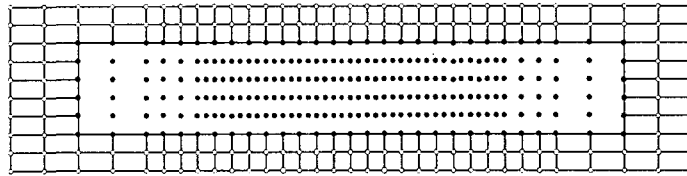
그림 5 집중하중을 받는 직사각형 판



(a) 유한요소 모델



(b) 조합모델



(c) 무요소절점의 조밀한 배치모델

○ 유한요소절점 ● 무요소절점

그림 6 직사각형 판의 절점배치 형상

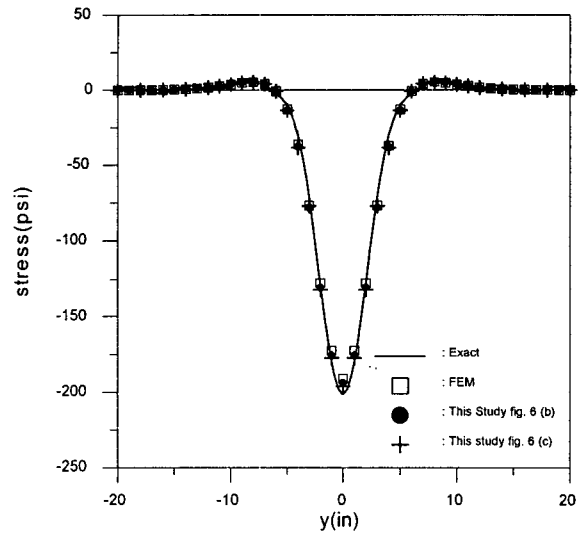


그림 7 직사각형 판의 $y=0$ 에서의 σ_y 분포