깁스표본기법을 이용한 와이블분포의 모수추정
An Estimation of Parameters in Weibull Distribution using Gibbs Sampler

이 우 동

(경산대학교 자연과학대학 통계학과)

이 창 순

(경산대학교 자연과학대학 정보처리학과)

강 상 길

(경북대학교 통계학과)

요 약

와이블분포에서 척도모수와 형상모수를 베이지안 방법을 이용하여 추정한다. 깁스표본법을 사용하여 모수들에 대한 추정, 결합사후확률분포 와 주변사후확률분포를 구한다. 9개의 열 전달기기자료와 10개의 인위적인 자료를 이용하여 제안된 방법을 적용하여 사례를 연구한다.

Ⅰ. 서 론

와이블 분포(Weibull Distribution)는 수명시간과 연관된 응용분야로 볼베어링이나 진공관, 전기인슐레이션의 분포모형이나 의학분야에서 사람에게 종양이 나타날 때 까지 걸리는 시간의 분포등 많은 분야에서 응용되는 분포이다. 그리고 분포의 위험률(failure rate)은 형상모수(shape parameter)에 따라 증가위험률(increasing failure rate, IFR), 감소위험률(decreasing failure rate, DFR), 상수위험률(constant failure rate)을 가진다.

와이블분포의 모수추정에 관련된 대표적인 연구는 크게 두가지 방향으로 접근해왔다. 첫째는 고전적 접근법(classical approach)으로 Cohen, Whitten and Ding(1984)는 수정된 최우추정량을 구하였고, Lawless(1982)는 변환(log 변환)을 통하여 생존함수와 관측된 자료를 일차직선화시킨후, 최소자승법을 이용하여 와이블분포와 극단치 분포(extreme value distribution)의 모수를 추정하는 방법을 제안 하였다. 특히 통계적 추론분야에서 좋은 통계적 성질들을 만족하는 최우추정법에 이용한 방법은 뉴턴-랩슨법

(Newton-Raphson method)등의 비선형방정식(non-linear equation)의 해를 구하는 복잡한 문제이다. 두 번째로 와이블분포의 모수추정법으로는 베이지안 접근법(Bayesian approach)이 있다. 관련된 과거의 자료나 유사한 정보를 사전정보(prior information)로 두고 현재자료와 결합하여 사후정보(posterior distribution)를 이끌어내는 베이지안 접근법은 많은 장점이 있음에도 불구하고 사후확률에 관련된 계산은 어려운 경우가 많았다. 척도모수(scale parameter)와 형상모수(shape parameter)를 가지는 와이블분포에 관한 베이지안 추론문제로 Soland(1968)는 형상모수를 고정한 조건에서 척도모수에 대한 베이즈 추정량을 구하였고, Soland(1969)는 척도모수와 형상모수에 대한 베이즈 추정량을 구하였다. 위와 같은 베이즈 추정량을 계산하기 위해 다차원 적분을 해야하는 경우, 베이즈 추정량을 구하는 문제는 매우 복잡하다.

최근 공학분야에서 영상자료의 처리를 목적으로 Geman 과 Geman(1984)은 깁스표본법(Gibbs sampling method)을 제안하였다. 깁스표본법은 반복적인 몬테칼로(iterative Monte Carlo)기법으로, Gelfand 와 Smith(1990)는 베이지안 통계계산에 깁스표본법이 매우 유용하게 사용됨을 밝혔다. 특히, 다차원 적분에 매우 유용하다. 그러나 깁스표본법을 적용하기 위해서는 완전 조건부 확률분포가 난수(random number)발생이 가능한 분포여야 하므로 통계적 적분함수가 아닌 경우에는 이용이 어려운 경우가 많다. 그러나 최근에는 이와 같은 문제에서 Metropolis 알고리즘, adaptive-rejection 표본법 등으로 많은 문제를 해결하고 있다.

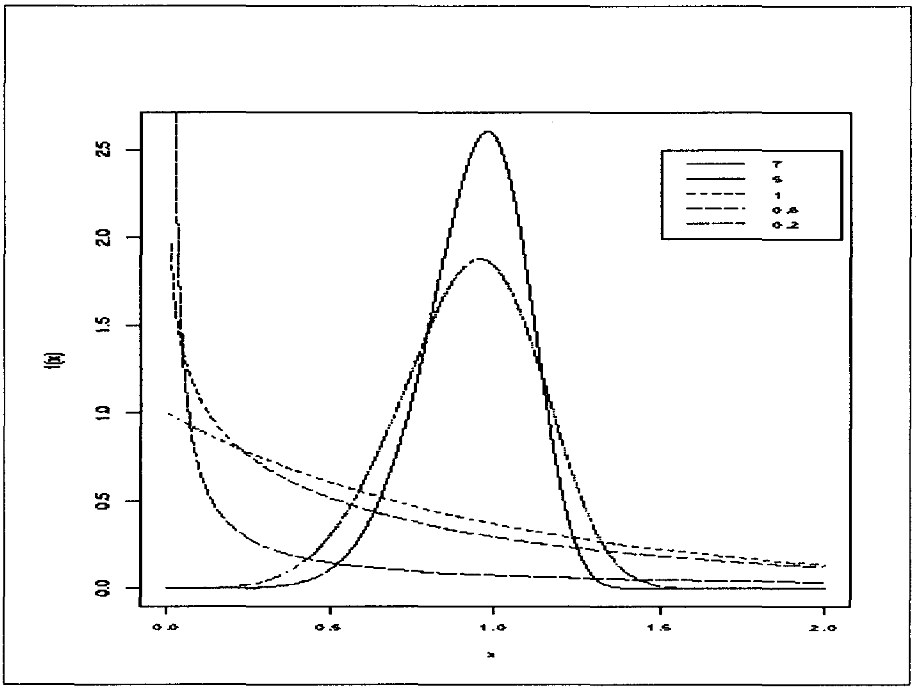
이 논문에서는 척도모수와 형상모수가 알려져 있지 않은 와이블분포모형에서 척도모수의 사전분포로는 공액사전분포(conjugate prior)인 감마분포(Gamma distribution)를 형상모수의 사전분포는 특정한 구간에서 확률이 동일한 일양분포를 고려하였으며, 두 개의 사전분포는 독립(independent)이라 가정하였다. 깁스표본법을 이용하여 두 모수에 대한 사후확률을 추정한다. 2절에서는 두 모수에 대한 베이즈 추정량을 구하고, 3절에서는 깁스표본법을 이용하여 사후분포를 추정하는 방법을 소개하고, 4절에서는 실제 자료와 난수를 이용한 자료를 이용하여 제안된 방법에 대한 예를 소개한다.

II. 베이지안 방법을 이용한 와이블분포의 모수추정

척도모수 λ와 형상모수 β를 가지는 와이블분포에 대한 확률밀도함수(probability density function: pdf)는 다음과 같다.

$$f(t|\lambda, \beta) = \lambda\beta t^{\beta-1}\exp(-\lambda t^{\beta}), 0 < t < \infty, 0 < \lambda < \infty, 0 < \beta < \infty \qquad (2.1)$$

식(2.1)의 와이블분포는 형상모수 β에 따라 다양한 형태의 분포모양을 가진다. 아래의 그림1에 형상모수의 변화에 따라 와이블분포곡선의 변화를 나타내었다.



<그림 1> 형상모수에 따른 와이블분포곡선

이제 $T_1, T_2, \cdots, T_n$을 확률밀도함수(2.1)을 가지는 확률표본(random sample)이라 두자. 그리고 $\underline{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$을 확률표본의 관찰된 값(observed value)들이라 둔다면, 우도함수(likelihood function)는 다음과 같다.

$$L(\lambda, \beta | \underline{t}) \propto \lambda^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}\}$$

그리고, 형상모수 λ에 대한 사전분포를 모수 a, b 를 가지는 감마(Gamma)분포 ($\lambda \sim \Gamma(a, b)$)로 가정하자. 즉, λ에 대한 확률밀도함수는

$$\pi_1(\lambda|a,b)=\frac{b^a\lambda^{a-1}\exp(-b\lambda)}{\Gamma(a)},0<\lambda<\infty \tag{2.2}$$

이다. λ의 사전분포와 독립인, 형상모수 β 에 대한 사전분포는 구간 $(0,c)$에서 동일한 확률을 갖는 균등분포($\beta \sim U(0,c)$)라 가정하면 β 에 대한 확률밀도함수는

$$\pi_2(\beta)=\frac{1}{c},0<\beta<c \tag{2.3}$$

이다.

사전정보(2.2)와 (2.3)을 이용한 λ와 β의 결합사후확률밀도함수(joint posterior pdf)는 베이즈정리(Bayes theorem)을 이용하여 비례식으로 나타내면

$$\begin{aligned}\pi(\lambda,\beta|\underline{t}) &\propto L(\lambda,\beta|\underline{t})\pi_1(a,b)\pi_2(\beta)\\ &\propto\lambda^{n+a-1}\beta^nT^{\beta-1}\exp\{-\lambda(\sum_{i=1}^{n}t_i^\beta+b)\},0<\lambda<\infty,0<\beta<c\end{aligned} \tag{2.4}$$

이며, 여기서 $T=\prod_{i=1}^{n}t_i$이다. 그러므로, λ와 β의 결합사후확률분포는

$$\pi(\lambda,\beta|\underline{t})=K\cdot\lambda^{n+a-1}\beta^nT^{\beta-1}\exp\{-\lambda(\sum_{i=1}^{n}t_i^\beta+b)\},0<\lambda<\infty,0<\beta<c \tag{2.5}$$

이며, 정규화 상수(normalizing constant)인 K 는 다음을 만족한다.

$$\frac{1}{K}=\int_0^\infty\int_0^c\lambda^{n+a-1}\beta^nT^{\beta-1}\exp\{-\lambda(\sum_{i=1}^{n}t_i^\beta+b)\}d\beta d\lambda \tag{2.6}$$

식(2.5)로부터 λ와 β 의 주변사후확률분포를 구하면 아래와 같다.

$$\pi(\lambda|\underline{t})=\int_0^c\pi(\lambda,\beta|\underline{t})d\beta\ ,\quad \pi(\beta|\underline{t})=\int_0^\infty\pi(\lambda,\beta|\underline{t})d\lambda$$

그리고 λ에 대한 베이즈 추정량은

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}&=E[\lambda|\underline{t}]\\ &=\int_0^\infty\lambda\pi(\lambda|\underline{t})d\lambda\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \lambda \int_0^c \pi(\lambda, \beta | \underset{\sim}{t}) d\beta d\lambda \tag{2.7}$$
$$= \int_0^\infty \lambda \int_0^c K \cdot \lambda^{n+a-1} \beta^n T^{\beta-1} \exp\{-\lambda(\sum_{i=1}^n t_i^\beta + b)\} d\beta d\lambda$$

이다. 또 β에 대한 베이즈 추정량은

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= E[\beta | \underset{\sim}{t}] \\ &= \int_0^c \beta \pi(\beta | \underset{\sim}{t}) d\beta \\ &= \int_0^c \beta \int_0^\infty \pi(\lambda, \beta | \underset{\sim}{t}) d\lambda d\beta \\ &= \int_0^c \beta \int_0^\infty K \cdot \lambda^{n+a-1} \beta^n T^{\beta-1} \exp\{-\lambda(\sum_{i=1}^n t_i^\beta + b)\} d\lambda d\beta \end{aligned} \tag{2.8}$$

이다.

그리고 λ와 β 의 완전 조건부 분포(full conditional distribution)는

$$f_1(\lambda | \beta, \underset{\sim}{t}) \propto \lambda^{n+a-1} \exp\{-\lambda(\sum_{i=1}^n t_i^\beta + b)\}, 0 < \lambda < \infty \tag{2.9}$$

와

$$f_2(\beta | \lambda, \underset{\sim}{t}) \propto \beta^n T^{\beta-1} \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i^\beta\}, 0 < \beta < c \tag{2.10}$$

이다.

III. 깁스표본법을 이용한 사후확률분포의 추정

깁스표본법은 반복적인 몬테칼로 적분방법이다. 예를 들어

$$\int \cdots \int T(v_1, \cdots, v_m) f(v_1, \cdots, v_m) dv_1 \cdots dv_m \tag{3.1}$$

과 같은 적분을 고려해 보자. 여기서 $f(v_1, \cdots, v_m)$는 non-negative이며,

$$\int \cdots \int f(v_1, \cdots, v_m) dv_1 \cdots dv_m = 1$$

을 만족하는 m변량 함수이다. 이때, 적분변수 $v_1, \cdots, v_m$을 확률변수 $V_1, \cdots, V_m$로 간주하면 함수 $f(v_1, \cdots, v_m)$는 밀도함수의 조건을 만족시킨다. 그러므로 확률변수 $V_1, \cdots, V_m$의 결합확률밀도함수(joint probability density function)로 볼 수 있다. 만약, $(V_{11}, V_{21}, \cdots, V_{m1}), (V_{12}, V_{22}, \cdots, V_{m2}), \cdots, (V_{1N}, V_{2N}, \cdots, V_{mN})$을 $f(v_1, \cdots, v_m)$으로부터의 확률표본이라 한다면, 식(3.1)을

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T(V_{1j}, V_{2j}, \cdots, V_{mj})$$

로 추정할 수 있다.(몬테칼로 적분법) 그러나 대부분의 경우에 $f(v_1, \cdots, v_m)$를 구하기 힘들 뿐만 아니라 난수발생은 더욱 더 어려운 문제이다. 깁스표본법은 위와 같은 어려운 문제를 해결할 수 있는 통계적 기법이다.

Gelfand 와 Smith(1990)은, V_i들의 완전조건부분포가 $f(v_i|v_j, j\neq i), i=1,2,\cdots,m$라면, 적절한 조건(mild condition)이 충족되면, $f(v_i|v_j, j\neq i), i=1,2,\cdots,m$의 분포로부터 결합확률분포 $f(v_1, \cdots, v_m)$을 얻을 수 있고 , 또 V_i들의 주변확률분포 $f(v_1)$도 얻을 수 있음을 밝혔다. 구체적인 방법을 소개하면 다음과 같다.

주어진 m개의 임의의 초기값(starting value)을 $(V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, \cdots, V_m^{(0)})$라 두자.

단계1 $V_1^{(1)}$을 $f(v_1|V_2^{(0)}, V_3^{(0)}, \cdots, V_m^{(0)})$로부터 발생하고
단계2 $V_2^{(1)}$을 $f(v_2|V_1^{(1)}, V_3^{(0)}, \cdots, V_m^{(0)})$로부터 발생하고
$\vdots$
단계 m $V_m^{(1)}$을 $f(v_m|V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \cdots, V_{m-1}^{(1)})$로부터 발생하여,

단계1에서 단계 m까지로부터 발생된 난수를 $(V_{11}^{(1)}, V_{21}^{(1)}, \cdots, V_{m1}^{(1)})$이라 두자. 위의 단계1에서 단계 m의 과정에서 고정시키는 값들을 가장 최근에 생성된 확률표본의 값으로 대체하면서 충분히 큰 반복수 l 만큼 반복수행하여 얻은 랜덤표본을 $(V_{11}^{(l)}, V_{21}^{(l)}, \cdots, V_{m1}^{(l)})$이라 한다. 이러한 반복과정을 N 개의 병렬(parallel)로 수행하면, N개의 확률표본

$$(V_{11}^{(l)}, V_{21}^{(l)}, \cdots, V_{m1}^{(l)}), (V_{12}^{(l)}, V_{22}^{(l)}, \cdots, V_{m2}^{(l)}), \cdots (V_{1N}^{(l)}, V_{2N}^{(l)}, \cdots, V_{mN}^{(l)})$$

을 얻을 수 있다. $j=1,2,\cdots,N$ 에 대하여, $l\to\infty$이면

$$(V_{1j}^{(l)}, V_{2j}^{(l)}, \cdots, V_{mj}^{(l)}) \to^{d} (V_1, V_{2,}\cdots, V_m) \sim f(v_1,\cdots,v_m)$$

이다. 그러므로 $(V_{1j}^{(l)}, V_{2j}^{(l)}, \cdots, V_{mj}^{(l)}), j=1,2,\cdots,N$ 는 $f(v_1,\cdots,v_m)$로 부터의 표본으로 고려 될 수 있다. 그리고, 식(3.1)의 값은

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T(V_{1j}^{(l)}, V_{2j}^{(l)}, \cdots, V_{mj}^{(l)}) \tag{3.2}$$

로 추정 할 수있다. 식(3.2)는 $l, N\to\infty$일 때, 식(3.1)로 수렴할 확률은 1(almost sure convergence)임이 밝혀져 있다.

그리고, $(V_1, V_2,\cdots, V_m)$의 분포는 $(V_{1j}^{(l)}, V_{2j}^{(l)}, \cdots, V_{mj}^{(l)}), j=1,2,\cdots,N$의 경험적 분포(empirical distribution)로 추정될 수 있으며, V_k에 대한 주변밀도함수 $f(v_k)$는

$$\hat{f}(v_k)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(v_k | V_{sj}^{(l)}, s\neq k) \tag{3.3}$$

로 추정된다.

Gelman 과 Rubin(1992)는 N 개의 초기치를 임의의 과산포분포(overdispersed distributi-on)로부터 난수를 사용하고, 초기치에 의한 영향을 없애기 위해 $2l$ 번의 반복과정을 거친 후, 초기값부터 l 개의 난수를 버리고(warming-up time), $l+1$부터 $2l$ 까지의 난수를 이용하는 방법을 제안 하였다.

위의 깁스표본법을 이용하기 위하여 식(2.9)와 식(2.10)의 완전조건부 분포는 난수 발생이 가능한 형태이어야 한다.

식(2.9)의 λ에 대한 완전조건부 분포는 모수 $n+a$와 $\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}+b$ 를 가지는 감마분포임을 알 수 있다. 그러므로 β 의 값만 주어진다면 λ에 대한 난수는 쉽게 얻을 수있다. 그러나 β 에 대한 완전조건부 분포는 잘 알려져 있는 확률분포가 아니므로 난수를 발생하는데는 어려움이 있다. 이러한 분포에서 난수를 얻는 하나의 방법으로 Gilks와 Wilds(1992)에 의해 제안된 adaptive rejection 표본법을 사용한다. 그러나 이 방법을 사용하여 β 의 난수를 이용하기 위해서는 β 의 확률밀도함수가 β 의 log-concave함

수임을 보여야 한다. 아래의 정리 1이 그 결과이다.

정리 1 $f_2(\beta|\lambda,\underline{t})$는 $\beta(0<\beta<c)$ 의 log-concave function 함수이다.

증 명 β 의 조건부 주변사후확률분포는

$$f_2(\beta|\lambda,\underline{t})=c\cdot\beta^n T^{\beta-1}\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\}$$

이다. 여기서 c 는 정규화 상수이다.

$$\log f_2(\beta|\lambda,\ \underline{t})=n\log\beta+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log t_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}+c$$

이므로 일차 편미분한 식은

$$\frac{\partial\log f_2(\beta|\lambda,\ \underline{t})}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}\log t_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\log t_i$$

이다. 또, $0<\lambda<\infty, 0<\beta<c$ 그리고, $t_i>0$이므로,

$$\frac{\partial^2\log f_2(\beta|\lambda,\ \underline{t})}{\partial\beta^2}=-\frac{n}{\beta^2}-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}(\log t_i)^2\ <\ 0$$

임을 알 수있다.

위의 제안된 방법을 이용하여 깁스표본법으로 N 개의 각 병렬연쇄에서 $2l$ 개의 난수를 발생한 후, 1부터 l 까지의 난수를 버리고, 추출된 난수를 $(\lambda_j^{(k)},\beta_j^{(k)})$, $k=l+1,\cdots,2l$, $j=1,2,\cdots,N$ 이라 두자. 그러면, λ의 완전조건부분포를 이용한 라오-브랙웰형(Rao-Blackwell type) 베이즈 추정량은 λ의 완전 조건부 분포가 $\Gamma(n+a,\ \sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}+b)$이므로 다음과 같다.

$$\hat{\lambda}\approx\frac{1}{Nl}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=l+1}^{2l}\left\{\frac{n+a}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta_j^{(k)}}+b}\right\} \qquad (3.4)$$

그리고, 주변사후확률밀도함수는

$$\pi(\lambda|\underline{t})\approx\frac{1}{Nl}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=l+1}^{2l}f_1(\lambda|\beta_j^{(k)},\underline{t}) \qquad (3.5)$$

로 추정 된다. 그리고 β에 대한 베이즈 추정량은

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{Nl} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=l+1}^{2l} \beta_j^{(k)} \tag{3.6}$$

로 추정 되며, 주변사후확률밀도함수는 $\beta_j^{(k)}, j=1,2,\cdots,N$, $k=l+1,\cdots,2l$ 를 이용하여 추정 한다.

IV. 예 제

실제의 자료와 인위적인 자료(artificial data)를 이용하여 앞에서 제안된 분석방법을 적용해 보기로 한다. 아래의 두 예제에서, λ에 대한 사전분포는 $\Gamma(0.00001, 0.00001)$로 가정하였다. 가정된 λ의 사전분포는 분산이 10,000인 분포로 λ에 대한 사전 정보가 거의 없다도 볼 수 있다. 그리고 β의 사전분포는 $c=7$로 가정하였다. β 의 값은 $(0,\infty)$에 있는 값이지만, β의 값이 $(0,7)$사이에 균등한 확률을 가진다고 가정하였다. 그리고 병렬연쇄의 개수는 10, 각 병렬연쇄마다 난수를 1000개 추출하여, 총 $N\times l = 10\times 1000$개의 $(\lambda_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}), j=1,2,\cdots,10, k=1,\cdots,1000$을 이용하였다. 깁스표본법의 수렴여부를 알아보기 위하여, Gelman과 Rubin(1992)이 제안한 방법을 이용하였다. $B/1000$을 10개의 병렬연쇄의 1000개 난수의 평균에 대한 분산이라 두자. 즉, $B/1000 = \sum_{a=1}^{10}(m_a - \overline{m})^2/(10-1)$. 여기서 $m_a, a=1,2,\cdots,10$은 1000개의 표본에 대한 평균이며, $\overline{m} = \sum_{a=1}^{10} m_a/10$은 10개의 평균에 대한 표본평균이다. 그리고 각 병렬연쇄 내의표본의 분산을 $S_a = \sum_{b=1}^{1000}(m_{ab} - m_a)^2/(1000-1)$라 두자. 여기서 m_{ab}는 a번째병렬연쇄의 b 번째 난수이다. 10개의 병렬연쇄의 분산에 대한 평균을 $W = \sum_{a=1}^{10} S_a^2/10$이라 하자. 그리고

$$\hat{V} = \frac{1000-1}{1000} W + \frac{1}{1000} B + \frac{1}{10\times 1000} B$$

라 두고, $\hat{R} = \hat{V}/W$ 의 값이 1 근방의 값인지를 관찰하였다. $\hat{R}\approx 1$이면, 표본이 수렴

했음을 나타낸다.(Gelman과 Rubin(1992))

예제 1 아래의 자료는 가솔린 정류중 열 전달기기에 대한 9개의 고장시간이다.(Martz and Waller(1982))

0.41	0.58	0.75	0.83	1.00	1.08	1.17	1.25	1.35

이 자료는 와이블분포를 한다고 알려진 자료이다. 이 자료를 이용하여 깁스표본법을 이용하여 λ와 β의 사후 주변밀도함수와 베이지안 추정량을 구해보자. 각 모수에 대한 베이즈 추정량은 $\tilde{\lambda}$=0.98과 $\tilde{\beta}$=2.68로 추정 되었다. 참고로 이 자료를 이용한 고전적인 추정량의 하나인, 최우추정량(maximun likelihood estimate)들은 $\hat{\lambda}$=1.04 $\hat{\beta}$=3.68이었다. 그림 2는 식(3.5)를 이용하여 λ에 대한 사후주변밀도함수를 깁스표본법을 이용하여 추정한 분포이다. 그림 3은 β 에 대한 사후 주변밀도함수를 깁스 표본법을 이용하여 추정한 분포이다.

예제 2 다음은 λ=2와 β =2인 와이블분포로부터 아래의 10개의 난수를 얻었다.

0.507	0.439	0.588	1.071	1.047	0.785	0.372	0.459	0.693	0.506

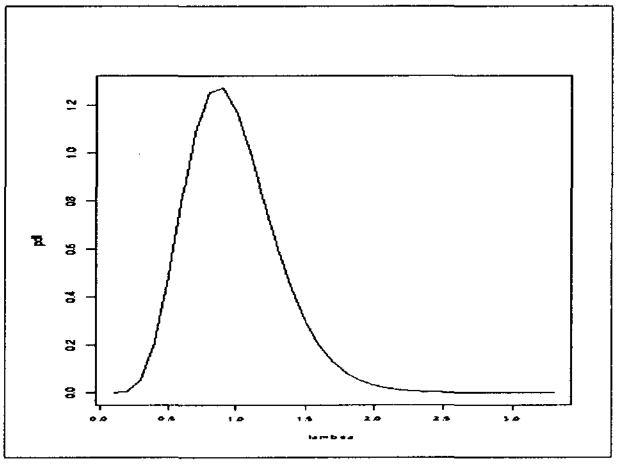


그림 2 추정된 λ의 사후분포

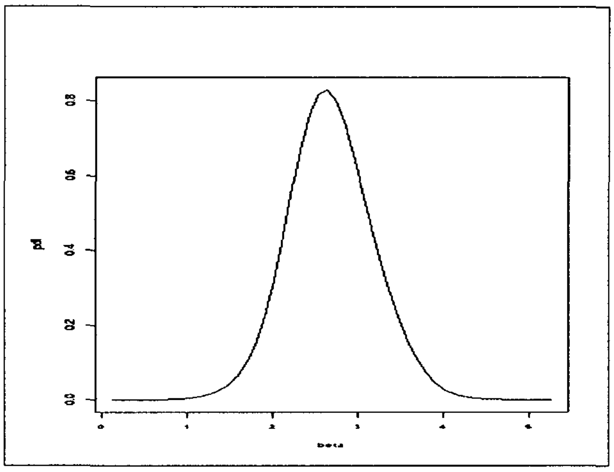


그림 3 추정된 β의 사후분포

위의 인위적인 자료를 이용하여 베이즈추정량과 각 모수에 대한 사후 주변밀도함수를 구해보자. 먼저, λ에 대한 추정량 $\tilde{\lambda}$=2.24, β에 대한 추정량 $\tilde{\beta}$ =2.22로 추정되었으며 최우추정량은 $\hat{\lambda}$=0.727, $\hat{\beta}$ =2.93으로 추정되었다. 위의 자료를 분석한 결과는 베이즈 추정량이 최우추정량보다 바람직함을 알 수 있다. 그림4는 식(3.5)를 이용한 λ에 대한 사후 주변밀도함수이며, 그림 5는 β 에 대한 사후 주변밀도함수이다.

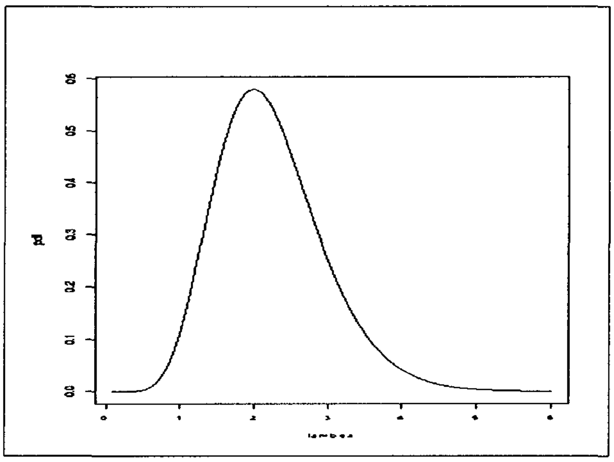


그림 4 추정된 λ의 사후분포

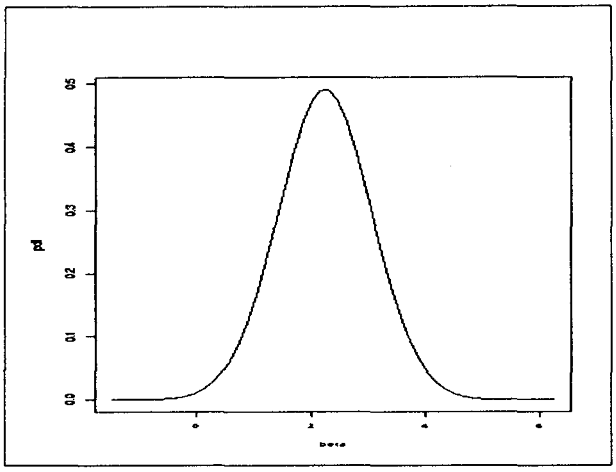


그림 5 추정된 β의 사후분포

참 고 문 헌

[1] Cohen, A. C., Whitten,B.J. and Ding,Y. (1984) Modified Moment Estimator for the Three Parameter Weibull Distribution, Journal of Quality Technology, 10, 159-167.

[2] Gelfand, A. E. and Smith, A. F. M.(1990) Sampling Based Approaches to Calculating Marginal Densities, Journal of American Statistical Association, 85, 398-409.

[3] Gelfand, A. E. and Smith, A. F. M.(1991) Gibbs Sampling for Marginal Posterior Expectations, Communications in Statistics-Theory and Method, 20, 1747-1766.

[4] Gelman, A. E. and Rubin,D.(1992) Inference from Iterative Simulation(with discussion), Statistical Science, 7, 457-511.

[5] Geman, S. and Geman, D.(1984) Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images, IEEE Transactions on Pattern Analysis

and Machine Intelligence, 6, 721-741.

[6] Gilks, W. R. and Wild, P.(1992) Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling, Applied Statistics, 41, 337-348.

[7] Lawless, J.F. (1982) Statistical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley & Sons, Inc.

[8] Martz, H. F. and Waller, R. A.(1982) Bayesian Reliability Analysis, John Wiley & Sons, Inc.

[9] Soland, R. M.(1968) Bayesian Analysis of Weibull Process with Unknown Scale Parameter and its Application to Acceptence Sampling, IEEE Transactions on Reliability, R-17, 84-90.

[10] Soland, R. M.(1969) Bayesian Analysis of Weibull Process with Unknown Scale and Shape Parameters, IEEE Transactions on Reliability, R-18, 181-184.