

궤도형상 데이터를 이용한 베어링 파라미터 규명

이경백*(전남대 대학원 기계공학과), 김영배(전남대 기계공학과)

Identification of Parameter for Bearing Using Orbit Shapes

K. B. Lee(Mech. Eng. Dept., CNU), Y. B. Kim(Mech. Eng. Dept., CNU)

ABSTRACT

This paper presents the identification of rotor dynamic parameters. The solution of the system equation can be obtained using least square method. The sensitivity analysis is performed to extract optimized solution, which is considered to be insensitive to inherent measurement errors. The cosine and sine term of orbit shapes can be obtained by experiment the orbit analysis at a different speed after doing orbit analysis at an arbitrary selected speed. This values measured time domain used to search the stiffness and damping coefficients of rotor bearing.

Key Words : rotor bearing system (회전체 베어링계), over-determined system (과잉해 시스템), least square method (최소자승법), sensitivity analysis (민감도 해석), orbit shape(궤도형상)

1. 서론

현대의 산업용 회전기계는 고속, 고정밀도를 필요로 하게 되고, 따라서 높은 강성과 정밀도를 갖는 베어링을 요구하게 된다. 그러나 대부분의 회전기계는 유체를 윤활제로 사용하는 유체 베어링이나 볼 혹은 로울러를 전동체로 사용하는 구름 베어링에 의해 지지되고 있다. 회전체 베어링계는 회전운동을 하는 회전체와 이를 지지하는 베어링으로 이루어진 구조물을 의미하며, 이러한 계는 회전체의 자이로 효과와 유체윤활 베어링의 회전속도 증속성 때문에 회전 속도가 변화함에 따라 그 동력학적 특성이 변화하는 경향을 갖는다.

회전체가 갖는 자이로 효과는 회전속도가 증가함에 따라 영향이 커지며, 이 영향을 수학적으로 수식화 하여 나타낼 수 있다. 베어링의 경우 구름 베어링은 회전속도의 특성에 따라 특성이 거의 변화하지 않으나, 유체윤활 베어링의 경우는 강성계수와 감쇠계수가 회전속도가 증가함에 따라 정적 및 동적 특성이 변화하는데 이러한 변화는 전체 시스템에 영향을 미친다. 따라서 전체 계의 특성이 회전속도 증속성을 갖게 된다.⁽¹⁾

베어링은 선형이며 회전속도 의존성을 갖는 8개의 계수, 즉 4개의 강성계수와 4개의 감쇠 계수로 표현한다고 가정하고, 자유진동에 의한 해석은 두 가지로 나눈다. 하나는 일정한 회전속도에서 고유진동수와 모드 형상에 대해 해석하는 경우이며, 다른 하나는 회전속도가 변화할 때 고유진동수의 변화를 계산하는 경우이다. 강제진동의 해석에는 비동기 가진응답 해석이 있고, 또 다른 특별한 경우로서 불균형 응답 해석도 수행한다. 여기서 임계속도에 대한 해석이 이 두 가지 해석에 앞서 선행된다.⁽²⁾

본 논문에서는 민감도에 의한 베어링 파라미터 규명⁽³⁾에 대한 실험을 통하여 임의로 선정한 두 개의 속도에서 얻어진 궤도형상(orbit) 데이터를 추출하여 회전체의 운동 방정식의 특이해의 계수를 구하여 회전체 베어링의 동적 파라미터를 구하는 것을 제안하였다.

2. 운동 방정식

본 논문에서는 Fig. 1과 같은 두 개의 베어링으로 지지하고 디스크가 있는 회전체 모델로 수행하였

으며 최종 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

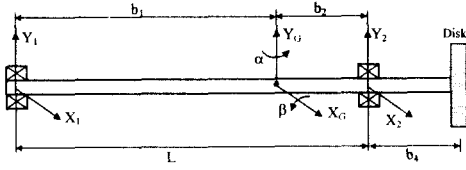


Fig. 1. Rigid rotor model

$$[\bar{L}]\{\dot{p}\} + [C_{oi}][C] - w[\bar{G}]\{\dot{p}\} + [C_{oi}][K]\{p\} = \{\bar{F}^u\} + \{\Delta \bar{F}^u\} \quad (1)$$

이를 조화운동으로 가정하여 일반 좌표계의 특이해는 다음과 같다.

$$\{p\} = \{p_c\} \cos(\omega t) + \{p_s\} \sin(\omega t) \quad (2)$$

여기에서 아래첨자 c와 s는 각각 $\cos(\omega t)$ 과 $\sin(\omega t)$ 성분을 나타낸다. 위의 값 P를 식(1)에 대입하고 $\cos(\omega t)$ 과 $\sin(\omega t)$ 항을 합하여 시간항을 제거하면 8개의 선형 독립의 행렬 방정식이 생성되고, 시스템 방정식의 형태는 다음과 같다.

$$[s] \begin{Bmatrix} p_c \\ p_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_c^u \\ \bar{F}_s^u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \bar{F}_c^u \\ \Delta \bar{F}_s^u \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서

$$[S] : \text{특성행렬 } [8 \times 8] = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

$$A = [C_{oi}]\{[K] + [\bar{K}]\} - w^2[\bar{L}]$$

$$B = w[C_{oi}]\{[C] + [\bar{C}]\} - w^2[\bar{G}]$$

$$\{\bar{F}_c^u\} = \{\bar{F}^u\} \text{의 } \cos(\omega t) \text{ 성분}$$

$$\{\bar{F}_s^u\} = \{\bar{F}^u\} \text{의 } \sin(\omega t) \text{ 성분}$$

$$\{\Delta \bar{F}_c^u\} = mRw^2 \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ (b_2 + b_4) \sin \theta \\ -(b_2 + b_4) \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta \bar{F}_s^u\} = mRw^2 \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ (b_2 + b_4) \cos \theta \\ (b_2 + b_4) \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{U}\} = [U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}]^T$$

위의 벡터 $\{U\}$ 는 각각 $U_1 \cos \psi_1, U_2 \cos \psi_2,$

$U_1 \sin \psi_1, U_2 \sin \psi_2$ 이다.

3. 임의의 두 속도에서 해석

베어링과 회전체에서 8개의 동시에 발생하는 선형방정식과 미지의 12개 파라미터 $K_{1xx}, K_{2xx}, K_{1yy}, K_{2yy}, C_{1xx}, C_{2xx}, C_{1yy}, C_{2yy}, U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}$ 가 나타난다. 식(6)를 전개하고, 시스템 방정식을 다시 쓰면 12개 파라미터에 대해 8개의 식 밖에 없으므로 $\{P_B\}$ 를 구하기 위해 독립된 식이 더 필요하다. 식을 추가하는 것은 같은 속도 w 에서 이미 알고있는 불평형 질량을 더함으로써 시스템을 과잉해인 것과 또 다른 선형 독립인 식을 만들 수 있으며 각기 다른 두 속도에서 만들어진 두 식을 구성하는 식은 다음과 같다.

$$[S_2]\{P_B\} = [A_3]\{\bar{v}\} \quad (4)$$

여기서

$$[S_2] = \begin{bmatrix} [p_c]_1 & w_1[p_s]_1 & -w_1^2[I] \\ [p_s]_1 & -w_1[p_c]_1 & -w_1^2[C_{oi}]^{-1} \cdot [C_{o2}] \\ [p_c]_2 & w_2[p_s]_2 & -w_2^2[I] \\ [p_s]_2 & -w_2[p_c]_2 & -w_2^2[C_{oi}]^{-1} \cdot [C_{o2}] \end{bmatrix} : [16 \times 16]$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} [A_2]_1[B_2] & 0 \\ 0 & [A_2]_2[B_2] \end{bmatrix} : [16 \times 16]$$

$$\{\bar{v}\} = \{\{v\}_1^T, \{v\}_2^T\}^T : [16 \times 1]$$

위의 $[\cdot]_i$ 와 $\{\cdot\}_i$ 은 속도 w_i ($i=1,2$)에서 행렬과 벡터를 나타내고, 각각의 변수들은 부록에 기술하였다.

식(4)에서 파라미터 벡터 $\{P_B\}$ 가 응답벡터 $\{v\}$ 에 종속됨을 알 수 있고 또한 동기응답 함수이므로 응답벡터 $\{v\}$ 나 $\{\bar{v}\}$ 에 관계된 파라미터 벡터 $\{P_B\}$ 를 구하는 것은 시스템 파라미터 민감도의 특성에 대한 양을 정의함으로써 측정오차까지 계산하게 된다. 식(11)은 $A \cdot X = B$ 과 같은 과잉해(over determined) 선형 시스템으로 표현할 수 있고 파라미터 규명에서 많이 쓰이는 최소 자승법을 이용하여 나타낼 수 있다.⁽³⁾

4. 궤도형상 데이터 해석

복소 표기법⁽⁶⁾를 이용하여 복소 신호 $p(t)$ 와 그 신호의 공액 신호 $\bar{p}(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(t) = y(t) + jx(t), \quad \bar{p}(t) = y(t) - jx(t) \quad (8)$$

복소 신호 $p(t)$ 는 실수축과 허수축이 이루는 평면에서 원점으로부터 움직이는 한점으로 연관시킬 수 있다. 주파수 w 를 가지는 복소 조화 신호는 오일러 공식을 사용하여 극좌표 형태로 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\begin{aligned} p(t) &= p^f(t) + p^b(t) \\ &= r^f e^{jw t} + r^b e^{-jw t} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(y_c + x_s) + \frac{j}{2}(x_c - y_s) \right\} e^{jw t} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2}(y_c - x_s) + \frac{j}{2}(x_c + y_s) \right\} e^{-jw t} \end{aligned} \quad (9)$$

식(8)을 이용하면,

$$\begin{aligned} y(t) &= y_c \cos(wt) + y_s \sin(wt) \\ x(t) &= x_c \cos(wt) + x_s \sin(wt) \end{aligned} \quad (10)$$

상점자 f 와 b 는 각각 전향과 후향의 성분을 나타내며 y_c, y_s, x_c, x_s 는 푸리에 계수들이다.

5. 실험고찰 및 해석

Fig. 2와 Fig. 3은 궤도형상(orbit)을 나타내고 있다. 거의 원형이나 타원에 가까운 형상은 복소표기법에 의한 푸리에 계수를 실험 데이터 중에서 추출하여 이론적으로 나타낸 것이고, 선의 형상이 불규칙적인 것은 FFT 해석기를 이용하여 실제 실험을 통한 궤도형상이다. 실험치와 이론치가 정확히 맞지 않는 이유는 당연 실험 장치의 측정시 여러 가지 주파수 성분이 포함되어 있기 때문이다. 이에 궤도형상이 복잡해 직접적으로 사용하는데 어려움이 있다.

위의 형상에서 실험치와 이론치의 형상이 거의 일치하는 회전속도는 3600rpm, 4200rpm, 5400rpm이다. 본 논문에서는 이들 중 원의 형상에 가까우면서 실험치와 거의 비슷한 궤도형상(orbit)이 나타나는 3600rpm과 5400rpm을 선정하여 동적 베어링 파라미터를 추정하였다. 그리고 입력값과 추정값을

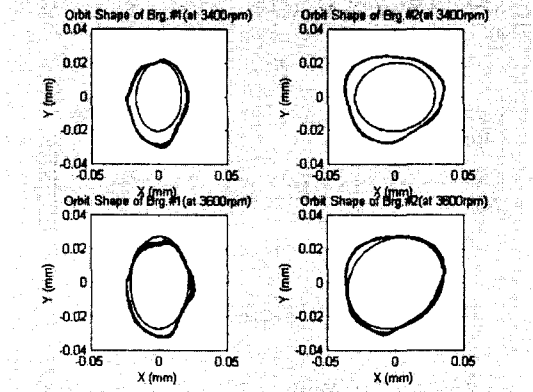


Fig.2 Orbit comparison between experiment and theory (3400rpm &3600rpm)

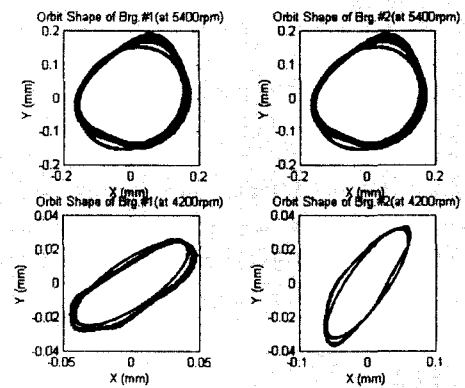


Fig.3 Orbit comparison between experiment and theory (5400rpm & 4200rpm)

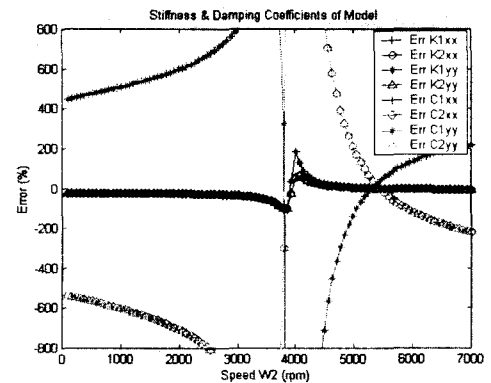


Fig.4 Identification error of estimated stiffness and damping coefficient at 5396rpm

비교하여 그들의 오차를 Table 1에 나타내었다. 민

감도는 5396rpm에서 가장 둔감하고 그에 따른 베어링의 강성과 감쇠변화는 Fig.4와 같다. 높은 rpm을 선정한 이유로 하여 베어링 감쇠계수값의 오차가 강성값에 비해 크다는 것을 알 수 있다.

Table 1. Input and estimated parameters

Parameter	Input	Estimated	% Error	
K_{1xx}	N/m	228000	207858.77	-8.83
K_{2xx}			207902.52	-8.81
K_{1yy}			207838.36	-8.84
K_{2yy}			207799.80	-8.86
C_{1xx}	N·sec/mm	10	11.55	15.50
C_{2xx}			5.36	-46.40
C_{1yy}			10.97	9.70
C_{2yy}			3.94	-60.60

6. 결론

본 논문에서는 임의의 두 개의 다른 회전속도를 선정하여 그에 따른 궤도형상(orbit)의 데이터를 추출하여 민감도 해석을 이용한 알지 못하는 미지의 회전체 베어링에 대한 동적 파라미터를 규명하였다.

안정된 실험치의 획득이 힘든 유체 베어링에 대한 파라미터 규명이나 비교적 간단한 데이터에 의한 회전체의 특성을 취득할 수 있어 응용범위가 다양할 것이다.

참고문헌

1. R. Tiwari and N.S. Vyas, "Non-Linear Bearing Stiffness Parameter Extraction from Random Response in Flexible Rotor-Bearing Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol.203, pp.389-408, 1997.
2. A.Muszynska, "Forward and backward Precession of A Vertical Anisotropically Supported Rotor", Journal of Sound and Vibration, pp.207-222, 1996.
3. S. Seibold, "Identification of Physical Parameters using an Instrumental Variables Technique" Mechanical Systems and Signal Processing, pp.425-439, 1997.
4. William J. Palm III, "Matlab for Engineering Applications", McGraw-Hill, 1998.
5. K.B.Lee, Y.B. Kim, "Identification of Parameter for Bearing Using Sensitivity Analysis Method". Korean Precision Engineering '01

Spring Conference, Chonnam Univ., 2001.

6. C.W.Lee, "Vibration Analysis of Rotors", Kluwer Academics publishers, 1993.

부록

- A. 질량관성 행렬, 자이로 행렬, 변환행렬 및 계수

$$[L] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p \\ 0 & 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{L}] = [L] \cdot [T], \quad [\bar{G}] = [G] \cdot [T]$$

$$[C_{ol}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_{o2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\{P_B\} = \{K_{1xx}, K_{2xx}, K_{1yy}, K_{2yy},$$

$$C_{1xx}, C_{2xx}, C_{1yy}, C_{2yy}, U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}\}^T$$

$$[A_2] = w^2 \begin{bmatrix} [C_{ol}]^{-1} & 0 \\ 0 & [C_{o2}]^{-1} \end{bmatrix} : [8 \times 8]$$

$$[B_2] = w^2 \begin{bmatrix} [\bar{L}] & [\bar{G}] \\ -[\bar{G}] & [\bar{L}] \end{bmatrix} : [8 \times 8]$$

$$\{v\} = \{ \{p_c\}^T, \{p_s\}^T \}^T : [8 \times 1]$$

$$[A_4] = \begin{bmatrix} [A_2][B_2] & 0 \\ 0 & [A_2][B_2] \end{bmatrix} : [16 \times 16]$$

$$\{\hat{F}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [C_{ol}]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [C_{o2}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta F_c^u \\ \Delta F_s^u \end{Bmatrix}$$