

비선형 퍼지 슬라이딩면을 이용한 가변 구조 제어기의 설계

Design of a Variable Structure Controller Using Nonlinear Fuzzy Sliding Surfaces

이희진, 손홍엽, 김은태, 조영완, 박민용
연세대학교 전자공학과

Abstract In this paper, we suggest a variable structure controller using the time-varying nonlinear sliding surface instead of the fixed sliding surface, which has been the robustness against parameter variations and extraneous disturbance during the reaching phase. As applying TS fuzzy algorithm to the regulation of the nonlinear sliding surface, the reaching time of the system trajectory is faster than the fixed method. This proposed scheme has better performance than the conventional method in reaching time, parameter variation and extraneous disturbance. To demonstrate its performance, the proposed control algorithm is applied to a rotational inverted pendulum.

Keywords Sliding mode control, TS fuzzy algorithm, Reaching time.

I. 서론

가변 구조 제어기는 도달영역에서 파라미터의 변화와 외부 외란에 민감한 특성을 갖은 제어기로서 본 논문에서는 시스템 상태 궤적의 초기 위치에서부터 슬라이딩면을 도입하여 시스템이 동작하는 전 범위에서 파라미터 변화와 외부 외란에 강인하게 하며 최종 스위칭면까지의 도달시간뿐만 아니라 평형점까지의 도달시간을 줄이는 방안으로 비선형 슬라이딩면을 제시하며 이러한 비선형 슬라이딩면의 형성에 TS 퍼지 알고리즘을 적용함으로써 슬라이딩면의 선택에 편리함을 제공하게 된다.

본 논문은 현대 제어의 유효성과 새로운 제어이론의 증명을 위해 널리 사용되고 있는 전형적인 불안정 비선형 시스템인 역진자 시스템을 도입하여 제안된 알고리즘의 타당성을 입증하고자 한다. 2장에서는 슬라이딩 모드 제어기에 대하여 설명하며 3장에서는 제시한 비선형 퍼지 슬라이딩면에 대해 기술한 후 4장에서 시뮬레이션을 통해 기존의 가변 구조 제어기와 제안한 비선형 퍼지 슬라이딩

면을 동반한 가변 구조 제어기의 특성을 비교한다. 마지막으로 5장에서는 결론에 대해 기술한다.

II. 가변 구조 제어기

n 차의 비선형 시스템을 나타내면 다음과 같다.

플랜트:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(n)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)u(t) + \mathbf{d}(t) \quad (1)$$

$$\text{모델 : } \dot{\mathbf{x}}^{(n)}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)u(t) \quad (2)$$

여기서, \mathbf{x} 는 상태 벡터, $u(t)$ 는 제어 입력, $\mathbf{d}(t)$ 는 외란이며 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 와 $\mathbf{d}(t)$ 는 정확히 알지 못하나 $\|\Delta f\|$ 와 $\|\Delta d\|$ 범위 안에서 움직인다고 한다[1].

상태 변수 \mathbf{x} 를 임의의 특정한 상태 변수 \mathbf{x}_d 를 따라 움직이도록 하는 것이 필요하다. 여기서 트래킹 오차 $\tilde{\mathbf{x}}$ 는 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ 로 표현되며 이 때 트래킹 오차 벡터는 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\tilde{x} \ \tilde{\dot{x}} \ \dots \ \tilde{x}^{(n-1)}]^T \quad (3)$$

상태 공간 $R^{(n)}$ 상에서 슬라이딩면은

$s(\mathbf{x}, t) = 0$ 를 만족하며 이 때 $s(\mathbf{x}, t)$ 는 (4)와 같다.

$$s(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{(n-1)} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \lambda > 0 \quad (4)$$

슬라이딩면을 갖고 있는 가변 구조 시스템의 상태 궤적은 초기 위치에서 출발하여 (5)의 도달 조건에 의해 슬라이딩면에 도달하게 되며 이 후에는 슬라이딩면을 따라 평형점에 도달하게 된다.[1]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(\mathbf{x}, t) \leq -\eta |s|, \quad \eta > 0 \quad (5)$$

도달 조건(5)를 만족하는 제어기 $u(t)$ 는 다음과 같다.[1]

$$\hat{u}(t) = \hat{b}^{-1}(\mathbf{x}, t) [-\hat{f}(\mathbf{x}, t) - \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} \lambda^p \tilde{\mathbf{x}}^{(n-p)}(t) - \mathbf{x}_d^{(n)}(t) \right\}] \quad (6)$$

$$u(t) = \hat{u}(t) - \hat{b}^{-1}(\mathbf{x}, t) k(\mathbf{x}, t) \text{sgn}(s) \quad (7)$$

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & \text{for } s > 0 \\ -1 & \text{for } s < 0 \end{cases} \quad (8)$$

여기서, $0 < b_{\min} \leq b(\mathbf{x}, t) \leq b_{\max}$,

$$\hat{b}(\mathbf{x}, t) = (b_{\min} b_{\max})^{1/2},$$

$$\left[\binom{n-1}{p} \right] = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{for } n \leq p,$$

$$k(\mathbf{x}, t) = b^{-1}(\mathbf{x}, t) \hat{b}(\mathbf{x}, t) (F(\mathbf{x}, t)$$

$$+ d(t) + \eta) + |b^{-1}(\mathbf{x}, t) \hat{b}(\mathbf{x}, t)$$

$$- 1| |\hat{u}(t)| \quad (9)$$

III. 새로운 비선형 슬라이딩 제어

1. 새로운 비선형 슬라이딩면

비선형 시스템이 2차인 경우의 시스템 방정식은 (10), (11)과 같이 표현된다.

플랜트 :

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u(t) + d(t) \quad (10)$$

$$\text{모델 : } \ddot{\mathbf{x}}(t) = \hat{f}(\mathbf{x}, t) + \hat{b}(\mathbf{x}, t)u(t) \quad (11)$$

슬라이딩면이 가변하는 경우 (4)의 슬라이딩면은 (12)로 변경되며 입력 $\hat{u}(t)$ 는 (14)와 같게 된다.

$$s(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \lambda(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \lambda(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \dot{\lambda}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) - \ddot{\mathbf{x}}_d(t) + \lambda(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + \dot{\lambda}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ &= f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u(t) + d(t) \\ &\quad - \ddot{\mathbf{x}}_d(t) + \lambda(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \dot{\lambda}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{u}(t) = \hat{b}^{-1}(\mathbf{x}, t) [-\hat{f}(\mathbf{x}, t) + \ddot{\mathbf{x}}_d(t)$$

$$- \lambda(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) - \dot{\lambda}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)] \quad (14)$$

가변 구조 시스템이 도달 영역에 있는 동안에는 파라미터의 불확실성과 외란에 민감하며 비로소 슬라이딩면에 있을 때 이러한 요인으로부터 강인하게 된다. 본 논문은 시스템의 상태 궤적이 초기 위치에서부터 슬라이딩면에 있도록 하기 위해 슬라이딩면을 비선형적으로 변화시키며 이로서 파라미터의 불확실성과 외란에 강인한 제어를 구현할 수 있다. 따라서 시스템이 비선형 슬라이딩면을 갖기 위한 조건은 정리 1을 통해 구할 수 있다.

가정 1 연속 시변에 따르는 함수 $\lambda(t)$ 는 무한히 짧은 시간 간격의 양자화된 상수값, 즉, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 으로 표현될 수 있으며 이 때 $\lambda(t)$ 는 $\lambda(t) = \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$ 으로 나타내어질 수 있다. ($n = 1, 2 \dots$).

정리 1 가정 1에 충족하는 λ 가 다음 조건을 만족하면 시스템 상태 궤적은 비선형 슬라이딩면위에서 움직인다. (λ_f 는 λ 의 최종값)

$$(1) \lambda > 0 \ \& \ 1 + \lambda^2 \geq \lambda$$

$$(2) \lambda \leq \lambda_f \text{이면 } \lambda \geq 0$$

$$\lambda \geq \lambda_f \text{이면 } \lambda \leq 0$$

(증명) 지면 관계상 생략.

시스템 상태 궤적의 시작점이 그림 1의 a나 c 영역에 있으면 정리 1을 이용할 수 없게 되어 새로운 슬라이딩면의 도입이 필요하게 된다. 이 때 새로운 슬라이딩면을 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 에 수평인 비선형 함수 $\beta(t)$ 라고 정의하며 정리 2를 만족하는 비선형 슬라이딩면을 적용하여 새로운 가변 구조 제어를 구현한다.

정리 2 가정 1을 만족하는 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 에 수평인 새로운 비선형 함수 $\beta(t)$ 가 다음 조건을 충족하면 시스템 상태 궤적은 비선형 슬라이딩면위에서 움직인다. (β_f 는 β 의 최종값)

$$(1) \beta \geq 0 \ \& \ \dot{\beta} \leq 0$$

$$(2) \beta \leq 0 \ \& \ \dot{\beta} \geq 0$$

(증명) 지면 관계상 생략.

정리 2의 새로운 함수 $\beta(t)$ 를 적용한 슬라이딩면은 (12)로부터 (15)와 같이 나타내어지며 입력 $\hat{u}(t)$ 는 (17)로 표현된다.

$$s(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\beta}(t) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\beta}(t) \\ &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\beta}(t) \\ &= f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u(t) + d(t) \\ &\quad - \dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\beta}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \hat{b}^{-1}(\mathbf{x}, t)[- \hat{f}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}}_d(t) \\ &\quad + \dot{\beta}(t)] \end{aligned} \quad (17)$$

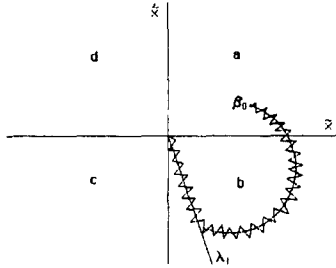


그림 1 비선형 슬라이딩면을 갖는 시스템 상태 궤적

본 논문은 시스템의 초기 위치에 따라 정리 1과 정리 2를 적용함으로써 최종 λ 즉, λ_f 에 이르기까지의 도달시간을 단축할 수 있으며 따라서 평형점까지의 시간도 줄일 수 있게 된다. 그림 1은 정리 1과 정리 2에 따르는 비선형 슬라이딩면을 갖는 가변 구조 시스템의 상태 궤적 변화를 보이고 있는 것으로 초기 위치에서부터 슬라이딩면을 따라 움직이면서 최종점인 평형점에 이르고 있다.

2. TS 퍼지 알고리즘

본 논문에서는 가변 슬라이딩면을 비선형적으로 설정하기 위하여 Takagi와 Sugeno의 TS 퍼지 모델을 사용하였으며 TS 퍼지 모델에 따르는 제어 규칙은 (18)과 같으며 전건부 소속 함수는 그림 2, 3으로 표현되며 후건부 식은 표 1로 나타내어진다.

$$\begin{aligned} L^1: & \text{If } x_1 \text{ is zr then } y^1 = a_0^1 \\ L^2: & \text{If } x_1 \text{ is ss then } y^2 = a_0^2 + a_1^2 x_1 \\ L^3: & \text{If } x_1 \text{ is mm then } y^3 = a_0^3 + a_1^3 x_1 \\ L^4: & \text{If } x_1 \text{ is mb then } y^4 = a_0^4 + a_1^4 x_1 \\ L^5: & \text{If } x_1 \text{ is bb then } y^5 = a_0^5 \end{aligned} \quad (18)$$

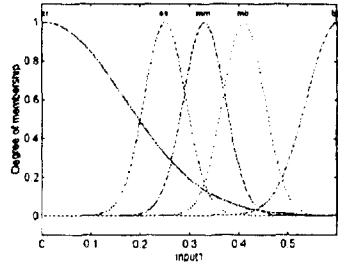


그림 2 $\beta(t)$ 에 대한 전건부 소속 함수

표 1 $\lambda(t)$ 와 $\beta(t)$ 에 대한 후건부 식

	$\lambda(t)$	$\beta(t)$
L^1	$y^1 = 0$	$y^1 = 0.3491$
L^2	$y^2 = -0.5 + x_1$	$y^2 = 0.33 - 0.005x_1$
L^3	$y^3 = -5 + 10x_1$	$y^3 = 0.225 - 0.05x_1$
L^4	$y^4 = -8.5 + x_1$	$y^4 = 0.026 - 0.001x_1$
L^5	$y^5 = 10$	$y^5 = 0$

$\lambda(t)$ 에 대한 최종 출력은 (18)을 이용하여 그림 3과 같이 구현된다.

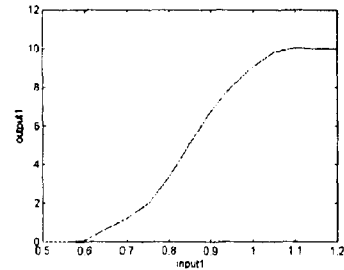


그림 3 $\lambda(t)$ 에 대한 최종 출력

IV. 시뮬레이션

회전 역진자의 방정식은 아래와 같다.[2]

$$\begin{aligned} (J_1 + M_e l_1^2 + M L_e^2 \sin^2 \theta_2) \ddot{\theta}_1 - l_1 M L_e \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ + (B_1 + M L_e^2 \sin 2\theta_2 \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 + l_1 M L_e \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ = \tau \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} l_1 M L_e \cos \theta_2 \ddot{\theta}_1 - (J_2 + M L_e^2) \ddot{\theta}_2 + M L_e g \sin \theta_2 \\ + M L_e^2 \sin 2\theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - B_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$(M_e = m_2 + m_r, M L_e = m_2 l_{c2} + m_r l_2,$$

$$M L_e^2 = m_2 l_{c2}^2 + m_r l_2^2,)$$

여기서 τ 는 모터의 토크이고, 각 θ_1 는 모터에 딸린 회전자이며 θ_2 는 자유 회전자이다.

(19)와 (20)으로부터 $\ddot{\theta}_1$ 는 (21)과 같으며 외부

외란이 고려되었을 때의 θ_2 는 (22)로 표현된다. 이것으로부터 모토 토크 τ 는 (23)과 같이 주어진다.

$$\dot{\theta}_1 = \frac{(J_2 + ML_2^2)\dot{\theta}_2 - ML_2 g \sin \theta_2 - ML_2^2 \sin 2\theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + B_2 \dot{\theta}_2}{l_1 ML_2 \cos \theta_2} \quad (21)$$

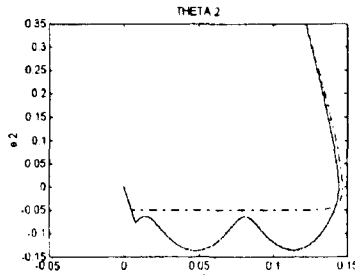
$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = & \frac{(J_1 + M_1 l_1^2 + ML_2^2 \sin^2 \theta_2)(B_2 \dot{\theta}_2 - ML_2 g \sin \theta_2 - ML_2^2 \sin 2\theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2)}{(l_1 ML_2 \cos \theta_2)^2 - (J_1 + M_1 l_1^2 + ML_2^2 \sin^2 \theta_2)(J_2 + ML_2^2)} \\ & + \frac{(l_1 ML_2 \cos \theta_2)(B_1 + ML_2^2 \sin 2\theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + l_1 ML_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2)}{(l_1 ML_2 \cos \theta_2)^2 - (J_1 + M_1 l_1^2 + ML_2^2 \sin^2 \theta_2)(J_2 + ML_2^2)} \\ & - \frac{(l_1 ML_2 \cos \theta_2)}{(l_1 ML_2 \cos \theta_2)^2 - (J_1 + M_1 l_1^2 + ML_2^2 \sin^2 \theta_2)(J_2 + ML_2^2)} \tau + d \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{(J_1 + M_1 l_1^2 + ML_2^2 \sin^2 \theta_2)(B_2 \dot{\theta}_2 - ML_2 g \sin \theta_2 - ML_2^2 \sin 2\theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2)}{l_1 ML_2 \cos \theta_2} \\ & + (B_1 + ML_2^2 \sin 2\theta_2 \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 + l_1 ML_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & - \frac{(l_1 ML_2 \cos \theta_2)^2 - (J_1 + M_1 l_1^2 + ML_2^2 \sin^2 \theta_2)(J_2 + ML_2^2)}{l_1 ML_2 \cos \theta_2} (-\lambda_2 \ddot{\theta}_2 \\ & - \lambda_2 \dot{\theta}_2 - K_2 \text{sgn}(s)) \end{aligned} \quad (23)$$

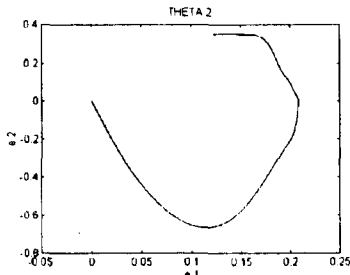
여기서 $\eta = 0.5$, $d = 0.5 \sin(3\pi t)$, $l_1 = 0.22\text{m}$, $l_2 = 0.12\text{m}$, $m_2 = 0.055\text{kg}$, $J_1 = 0.0175\text{kg} \cdot \text{m}^2$, $m_r = 0.01\text{kg}$, $J_2 = 1.98 \times 10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^2$, $B_1 = 0.118\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$, $B_2 = 8.3 \times 10^{-5}\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$, $l_{c2} = 0.06\text{m}$
 $\{\theta_1(0), \theta_2(0), \dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0)\}$

$= \{0, 0.1222, 0, 0.3491\}$, $\theta_{d2} = 0$ (rad)이다.

그림 4에서 제안한 방법이 외란에 강인하게 움직임을 알 수 있다. 또한 그림 5에서는 제안한 방법이 θ_2 의 도달 시간을 빠르게 하고 있음을 알 수 있다.

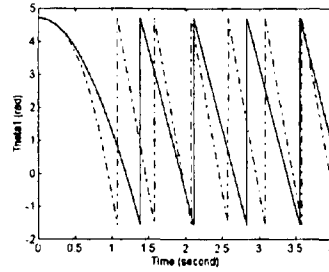


(a) 기존 방법

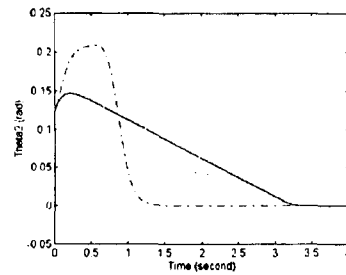


(b) 제안된 방법

그림 4 θ_2 의 시스템 상태 궤적(외란이 없는 경우:solid, 외란이 있는 경우:dash-dot)



(a) θ_1



(b) θ_2

그림 5 시간 대 θ 의 변화(기존 방법:solid, 제안된 방법:dash-dot)

V. 결론

본 논문은 고정된 슬라이딩면 대신에 시간에 따라 가변하는 비선형 퍼지 슬라이딩면을 도입함으로써 시스템 상태 궤적이 그림 4에서와 같이 고정 슬라이딩면을 갖는 기존의 방법에 비해 외부 외란에 강인하게 동작함을 알 수 있었다. 또한, 그림 5에서 알 수 있듯이 제안된 방법은 최종 슬라이딩면까지의 도달시간뿐 아니라 평형점까지의 도달시간도 줄이는 효과를 갖고 있음이 확인되었다.

참고문헌

- [1] J.J.Slotine, "The Robust Control of Robot Manipulators," The Inter. Journ. of Robotics Research, Vol.4, No.2, pp. 49 - 64, 1985
- [2] Y.K.Hai and A.Tomizuka, "Fuzzy Global and Local Motion Control of an Inverted Pendulum Using Mutiple Rule Bases," Proc. of Asian Control Conf., pp. 27 - 30, July, 1994
- [3] R.Palm, "Sliding Mode Fuzzy Control," IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, pp. 519 - 526, March, 1992