LMI를 이용한 GBSB 신경망 설계

Design of GBSB Neural Networks Using LMI

조 혁[1], 박 주 영[2], 박 대 희[3]

Hyuk Cho[1], Jooyoung Park[2], and Daihee Park[3]

[1]고려대 대학원 전산학과, [2]고려대 제어계측공학과, [3]고려대 전산학과

ABSTRACT

In this paper, we propose a novel synthesis method of GBSB(Generalized BSB)-based neural autoassociative memories in which we analyze qualitative properties of GBSB model, recast a design problem of an associative memory to LMIP(Linear Matrix Inequality Problem), and optimize the LMIP using LMI techniques. The obtained memory satisfies many of the required properties of associative memories and has some peculiar properties. Comparing experimental results with those of others, we show its correctness and effectiveness.

I. 서론

연상 기억장치 구현을 위한 여러가지 신경망 모델 및 연결강도 결정방법들이 제시되어 왔다. 특히, 1977년 Anderson 등[3]에 의해 발표된 BSB(brain-state-in-a-box) 신경망은 상호궤환 및 상호결합을 이용하는 주요한 신경망으로써 주목받아 왔으며, 일반화된 BSB 모델인 GBSB (Generalized BSB) 모델은 성능 향상을 위해 다양한 측면에서 연구가 진행되고 있다[1,6].

연상 기억장치가 갖추어야 할 기본 요건들은 다음과 같은 것들이 있다[1,6]: ① 원형패턴의 점근적 안정성(asymptotical stability), ② 의사 원형패턴(spurious pattern) 개수의 최소화, ③ DOA(domain of attraction) 크기의 최대화 및 조절 가능성, ④ 학습(learning) 및 망각(forgetting) 능력, ⑤ 저장 용량(storage capacity)의 최대화 및 검색 효율성(retrieval efficiency), ⑥ 전역적 안정성(global stability).

일반적으로, 연상 기억장치 구현을 위한 대부분의 연구는 위의 기준들 중 일부에만 초점을 맞추고 있다. 본 연구에서는 위의 기본요건들을 최대한 만족시키는 연상 기억장치 구현을 위해 다음과 같은 새로운 설계방법을 제안한다: 먼저, GBSB 신경망의 정성적 특성들을 분석하여 수학적으로 모델화하고, 분석된 결과를 이용하여 연상 기억장치 설계문제를 LMIP(LMI Problem)로 재해석하고, 최종적으로, LMI 기법(MATLAB의 LMI Toolbox 이용)을 이용하여 최적화를 수행한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다: Ⅱ장에서는 GBSB 모델의 정성적 특성들을 정리하고, Ⅲ장에서는 연상 기억장치 설계 문제를 LMIP로 변환하는 과정을 보이고, Ⅳ장에서는 실험을 통해 기존 방법론과 성능을 비교하고, 끝으로 Ⅴ장에서는 결론과 앞으로의 연구방향을 언급한다.

II. GBSB 신경망의 정성적 특성 분석

2.1. GBSB 신경망

n개의 뉴런을 갖는 이산시간 동특성이 있는 GBSB 신경망의 상태방정식은 (1)과 같다[1,6]:

$$v(k+1)=g[v(k)+\alpha Wv(k)+\alpha b]=g[(I_n+\alpha W)v(k)+\alpha b], \qquad (1)$$

여기서 $v(k)$는 k 스텝에서의 상태벡터, $\alpha(\in R)>0$는 궤환인자, 그리고 b는 바이어스 벡터이다. 특히, 선형포화함수 $g(\cdot)$에 의해 상태궤적이 초입방체 $H^n=[-1,1]^n$ 내에서 움직이게 된다:

$$g_i(\theta)=\begin{cases}+1 & \text{if } \theta\geq+1\\ \theta & \text{if } -1<\theta<+1\\ -1 & \text{if } \theta\leq-1\end{cases} \qquad (2)$$

2.2. GBSB 신경망의 정성적 특성

이 절에서는 BSB 모델에 대한 [5]의 정성적 분석에 기초하여 유도해 낸 GBSB 모델의 중요한 정성적 특성들을 정리한다. 여기서, $B=\{-1,+1\}$, $B^n=\{v\in R^n: v_i\in B, i=1,\cdots,n\}$을 의미한다.

- **정리 1:**

$i=1,\cdots,n$에 대해, $w_{ii}\geq0$라고 하자. 그러면, B^n들만이 안정인 평형점이 된다.

- **정리 2:**

$v\in B^n$이라고 하자. 만약 v가

$$\sum_{j=1}^{n}w_{ij}v_iv_j+b_iv_i>0 \quad i=1,\cdots,n \qquad (3)$$

이면, v는 점근적 안정인 평형점이다.

- **따름 정리 1:**

$i=1,\cdots,n$에 대해, $w_{ii}=0$이라 하자. $v\in B^n$이 점근적 안정인 평형점이면, $HD(v,v^*)=1$인 어떠한 정점 $v^*\in B^n$들도 평형점이 아니다.

- **따름 정리 2:**

만약

$$\sum_{j=1}^{n}w_{ij}v_iv_j+b_iv_i\geq 2k\max_j|w_{ij}| \quad i=1,\cdots,n \qquad (4)$$

라면, $HD(v,v^*)\leq k$인 어떠한 정점 v^*들도 평형점이 아니다.

따름정리 2로부터, "부등식을 만족하면서 좌변의 크기를 크게하면, 저장된 패턴의 DOA 크기가 증가하고 의사 원형패턴의 개수가 감소한다."는 본 논문의 핵심적인 아이디어를 얻을 수 있다.

III. LMIP(LMI Problem)로의 변환

위의 정리들로부터, GBSB-기반 자기연상 기억장치 설계 문제를 다음과 같이 해석할 수 있다:

Find W such that δ is maximum,

subject to

$$\sum_{j=1}^{n}w_{ij}v_i^{(k)}v_j^{(k)}+v_ib_i\geq\delta>0 \quad i=1,\cdots,n,\quad k=1,\cdots,m \qquad (5)$$

$$\|W\|<s \qquad (6)$$

$$w_{ii}=0 \quad i=1,\cdots,n \qquad (7)$$

$$w_{ij}=w_{ji} \quad i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n \qquad (8)$$

and

$$\lambda_{\min}(I+\alpha W)>-1 \qquad (9)$$

(5)는 (3)-(4)에 최저한도(margin) δ를 도입하여 정리한 것이고, (6)은 좌변의 크기를 제한하기 위해서 필요한 조건이고, (7)은 따름정리 1을 표현한 것이고, (8)-(9)는 전역적 안정성을 위해서 필요한 조건이다. (6)을 제곱하고 Schur complement[2]에 의해 정리하면 (10)으로 변환된다. (9)는 Spectral theorem에 의해 정리하면 (11)로 유도된다. 최종적으로 다음과 같은 LMIP로 변환된다:

Find W such that δ is maximum,

subject to $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} v_i^{(k)} v_j^{(k)} + v_i b_i \geq \delta > 0 \quad i=1,\cdots,n, \; k=1,\cdots,m$

$$\begin{bmatrix} sI & W^T \\ W & sI \end{bmatrix} > 0 \qquad (10)$$

$$w_{ii}=0 \quad i=1,\cdots,n$$

$$w_{ij}=w_{ji} \quad i \neq j, \; i,j=1,\cdots,n$$

and $$2I+\alpha W > 0 \qquad (11)$$

Ⅳ. 실험 및 결과 고찰

제안된 설계 방법론의 정확성과 유용성 검증을 위해 $m=5$, $n=10$인 원형패턴을 저장하는 자기연상 메모리 설계 문제를 고려하였다($\alpha=0.3$):

$$v^{(1)}=[-1\ +1\ +1\ +1\ +1\ +1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T$$
$$v^{(2)}=[+1\ +1\ -1\ -1\ -1\ +1\ -1\ -1\ +1\ -1]^T$$
$$v^{(3)}=[-1\ +1\ +1\ +1\ -1\ -1\ +1\ -1\ -1\ -1]^T$$
$$v^{(4)}=[-1\ +1\ -1\ -1\ -1\ -1\ +1\ -1\ +1\ +1]^T$$
$$v^{(5)}=[+1\ -1\ -1\ +1\ +1\ -1\ +1\ +1\ +1\ -1]^T$$

s=0.70일 때, 제안된 방법에 의해 다음과 같이 W와 b가 구해졌다:

$$W = \begin{matrix}
0.000 & -0.072 & -0.242 & -0.286 & -0.349 & 0.027 & 0.045 & -0.045 & -0.072 & 0.170 \\
-0.072 & 0.000 & 0.035 & 0.133 & -0.072 & -0.252 & -0.039 & 0.039 & 0.203 & 0.272 \\
-0.242 & 0.035 & 0.000 & 0.134 & -0.242 & -0.171 & 0.067 & -0.067 & 0.035 & -0.249 \\
-0.286 & 0.133 & 0.134 & 0.000 & -0.286 & 0.103 & -0.195 & 0.195 & 0.133 & -0.199 \\
-0.349 & -0.072 & -0.242 & -0.286 & 0.000 & 0.027 & 0.045 & -0.045 & -0.072 & 0.170 \\
0.027 & -0.252 & -0.171 & 0.103 & 0.027 & 0.000 & -0.274 & 0.274 & -0.252 & -0.082 \\
0.045 & -0.039 & 0.067 & -0.195 & 0.045 & -0.274 & 0.000 & -0.202 & -0.039 & -0.184 \\
-0.045 & 0.039 & -0.067 & 0.195 & -0.045 & 0.274 & -0.202 & 0.000 & 0.039 & 0.184 \\
-0.072 & 0.203 & 0.035 & 0.133 & -0.072 & -0.252 & -0.039 & 0.039 & 0.000 & 0.272 \\
0.170 & 0.272 & -0.249 & -0.199 & 0.170 & -0.082 & -0.184 & 0.184 & 0.272 & 0.000
\end{matrix}$$

$$b = \{\, 0.081 \quad 0.606 \quad -0.701 \quad 0.391 \quad 0.081 \quad 0.475 \quad 0.370 \quad -0.370 \quad 0.606 \quad -0.270 \,\}$$

원형패턴들의 각 평형점에 대한 DOA를 해밍거리(Hamming distance)에 따라 분류하여 표 1-2에 나타냈다. 그러므로 각 항들의 값이 클수록 우수한 연상 기억장치임을 의미한다. 두 가지 방법 모두 원형패턴($HD=0$)을 점근적 안정인 평형점으로 저장시키고 있음을 알 수 있다.

표 1. Chan 등[1]에 의한 신경망의 DOA

벡터 \ HD	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v^{(1)}$	1	9	30	58	51	24	9	1	0	0	0
$v^{(2)}$	1	10	38	82	86	40	5	4	0	0	0
$v^{(3)}$	1	10	43	67	43	6	0	0	0	0	0
$v^{(4)}$	1	8	32	67	60	23	6	0	0	0	0
$v^{(5)}$	1	10	41	55	37	0	0	0	0	0	0

표 2. 본 논문에 의한 신경망의 DOA

벡터 \ HD	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v^{(1)}$	1	9	34	68	49	26	4	0	0	0	0
$v^{(2)}$	1	10	45	94	77	21	0	0	0	0	0
$v^{(3)}$	1	10	44	82	87	34	8	0	0	0	0
$v^{(4)}$	1	9	34	68	60	15	1	0	0	0	0
$v^{(5)}$	1	10	39	49	28	4	0	0	0	0	0

구현된 연상 기억장치의 성능을 좀더 구체적으로 살펴보기 위해 정점들을 의사 원형패턴의 개수와 4가지 (best, good, bad, oscillating) 상태로 세분화 하여 표 3에 나타냈다. 따라서, best와 good 상태의 개수가 많을수록, bad와 oscillating의 개수가 적을수록 우수한 연상 기억장치라고 할 수 있다. 구현된 연상 기억장치는 의사 원형패턴이 존재하지 않고, 가능한 모든 패턴들(=1024)을 안정점으로 기억시키고, unstable 상태가 존재하지 않는 안정된 기억장치임을 알 수 있다.

표 3. 세분화된 분류(의사 원형패턴, 상태)

모델	의사 원형패턴	상태			
		best	good	bad	oscillating
Chan 등[1]	0	820	140	0	64
본 논문	0	921	103	0	0

V. 결론 및 향후 연구방향

본 논문에서는 정성적 특성 분석을 통해 GBSB-기반 연상 기억장치 설계 문제를 LMIP로 변환하고, LMI 기법으로 최적화 하는 단계적 방법을 통해 연상 기억장치를 설계하였다. 설계된 연상 기억장치는 구체적으로 [5]가 갖는 특성을 모두 갖는다: ① 전역적으로 안정함, ② 원형패턴들을 점근적 안정인 평형점으로 저장함, ③ 비이진수인 평형점들이 존재하지 않음, ④ 저장된 패턴과 $HD=1$인 위치에 다른 이진수 평형점들이 존재하지 않음. 특히, DOA의 크기와 상관관계가 있는 정성적 특성은 새로운 설계 기법의 개발 및 대규모 연상 기억장치 설계에의 적용 가능성을 제시해 주고 있다. 향후에는 실제적 문제에의 적용 및 LMI를 이용한 일반적인 연상 기억장치 설계 방법론의 구현에 관한 연구가 계속될 것이다.

VI. 참고 문헌

[1] H. Y. Chan and S. H. Żak, "On neural networks that design neural associative memories," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 8, no. 2, pp. 360-372, Mar. 1997.

[2] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed. Baltimore, MD: John Hopkins Press. 1996.

[3] J. A. Anderson, J. W. Silverstein, S. A. Ritz, and R. S. Jones, "Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model," in *Neurocomputing: Foundations of Research*, J. A. Anderson and E. Rosenfeld, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.

[4] P. Fahinet, A. Nemirivskii, A. J. Laub, and Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Mathworks Inc. Natick, MA, 1994.

[5] R. Perfetti, "A synthesis procedure for brain-state-in-a-box neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 6, no. 5, pp. 1071-1080, Sept. 1995.

[6] S. H. Żak, W. E. Lillo, and S. Hui, "Learning and forgetting in generalized brain-state-in-a-box (BSB) neural associative memories," *Neural Networks*, vol. 9, no. 5, pp. 845-854, July 1996.