

퍼지 모델 기반 제어를 이용한 비선형 동적 시스템의 제어에 관한 연구

A Study on the Control of Nonlinear Dynamical System Using the Fuzzy Model Based Controller

장 옥*, 권오국*, 주 영훈**, 박 진배*

Wook Chang*, Oh Kook Kwon*, Young Hoon Joo**, Jin Bae Park*

* 연세대학교 공과대학 전기공학과 ** 군산대학교 공과대학 제어계측공학과
* Dept. of Electrical Eng., Yonsei Univ. ** Dept. of Control & Instrumentation Eng., Kunsan Univ.

Abstracts This paper propose the systematic procedure of the fuzzy model based controller for the continuous nonlinear system. Fuzzy controller have been successfully applied to many uncertain and complex industrial plants. The design of the fuzzy controller mainly depends on the knowledge from the expert who are familiar with the plant by trial and error. Therefore we need more systematic approach to the design of the fuzzy controller. In this paper, we design fuzzy model based controller applied to the nonlinear system. Unlike the design procedures reported in [8] and [9], we use the nonlinear process directly in designing the controller. This controller has been successfully applied to an inverted pendulum.

Keywords Fuzzy control, Neural control, Adaptive control

1. 서론

퍼지 제어기는 전문가의 경험을 퍼지 논리를 이용하여 언어 규칙으로 표현하고, 이와 같이 이루어진 규칙들로서 제어기를 구성하기 때문에 제어 대상 플랜트의 정확한 수학적인 모델을 알지 못한다 하더라도 좋은 결과를 얻을 수 있고 강인한 성질을 지니고 있으며 그 구현도 간단하다. 그러나 이러한 퍼지 제어기 구현의 단순성에 비해 퍼지 제어기의 설계는 통상 설계자의 주관적인 경험에 의해 시행 착오적으로 이루어지며 이러한 경험적인 방법은 시스템이 복잡해지거나 돌발적인 상황에 처했을 경우 제어 성능이 떨어지기 쉽다. 또한, 이렇게 전문가의 경험에 의해 설계된 여러가지 퍼지 제어기의 구성 요소들이 가장 최적의 값이라는 보장이 없다. 이 문제를 해결하기 위해서 퍼지 제어기의 체계적인 설계 절차와 학습 방법에 관한 연구가 행해지고 있다. [9]는 TSK 퍼지 모델에 기반한 안정도 접근 방법을 통해 제어기를 설계하였고 [8]은 선형 시스템 이론에 기반하여 공통 Lyapunov 행렬을 구하지 않고서 안정한 퍼지 제어기를 설계하였다. 그러나 위에서 언급한 방법들은 비선형 시스템 자체가 아니라 퍼지 모델에 기반한 제어기 설계 기법으로 실제 비선형 시스템과 연관된 설계 기법이 아니다. [7]은 실제 비선형 시스템에 기반한 안정한 퍼지 제어기를 설계하였다. 본 논문에서는 비선형 시스템과 그 TSK 퍼지 모델을 사용한 안정한 퍼지 제어기를 설계하고 이를 도입 진자의 제어에 적용하여 그 우수성을 보이고자 한다.

2. 퍼지 추론 시스템

본 논문에서 사용하는 퍼지 추론 시스템은 식 (1)과 같은 TSK 퍼지 모델이다.

$$\text{Rule } i: \text{ IF } x_1(k) \text{ is } A_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } x_n(k) \text{ is } A_{in} \quad (1) \\ \text{ THEN } x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k)$$

여기서 Rule i 는 i 번째 규칙 ($1 \leq i \leq n$), $x = [x_1, \dots, x_m]^T$ 는 위상 변수 표준형 (phase variable canonical form)으로 표현된 상태 방정식의 상태 변수이고 u 는 입력이다. 또한, (A_i, B_i) 는 퍼지 추론 시스템의 i 번째 지역 모델로 그 자세한 수식은 식 (2)에 보인다. 퍼지 추론은 식 (3)과 같은 간략화 퍼지 추론 방법을 사용한다.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_i \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (A_i x + B_i u)}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (3)$$

여기서 n 은 퍼지 규칙의 수, $w_i = \prod_{j=1}^m A_{ij}(x_1) \times \dots \times A_{im}(x_m)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)은 전건부 진리치이다. 위의 퍼지 추론 시스템은 충분한 퍼지 규칙이 존재하면 임의의 실수치 연속 함수를 원하는 정도의 정확도로 근사화하는 것이 가능하다고 알려져 있다[2].

3. 퍼지 제어기 설계

다음과 같은 n 차 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\dots \\
\dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{4}$$

이는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u, y = x \tag{5}$$

여기서 f 와 g 는 미지의 연속 함수이고 $u \in R$ 과 $y \in R$ 은 각각 시스템의 입출력이며 $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ 는 관측치로부터 획득 가능하다고 가정된 상태 변수들이다.

또한, 식 (1)의 퍼지 규칙과 식 (3)의 추론 방법을 사용하는 퍼지 추론 시스템을 다시 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i (A_i x + B_i u)}{\sum_{i=1}^n w_i} \\
&= \sum_{i=1}^n v_i (A_i x + B_i u) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n v_i A_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n v_i B_i \right) u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sum_{i=1}^n v_i a_{i1} & \sum_{i=1}^n v_i a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n v_i a_{im} \end{bmatrix} x \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n v_i b_i \end{bmatrix} u
\end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $v_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ 이고 $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ 이며 이는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}^{(n)} = \hat{f}(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + \hat{g}(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u, y = x \tag{7}$$

여기서 $\hat{f} = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n v_i a_{ij})x_j$ 이고 $\hat{g} = \sum_{i=1}^n v_i b_i$ 이다. 즉, TSK 퍼지 모델을 사용하여 우리는 식 (4)의 비선형 시스템의 미지 함수 f 와 g 를 근사화할 수 있다. TSK 퍼지 모델이 비선형 시스템을 충분히 근사화하였다고 가정했을 때, 제어 규칙을 식 (8)과 같이 설정하자 [7].

$$u = u_f + u_s \tag{8}$$

u_f 와 u_s 는 각각 식 (9)와 (10)에 나타내었다.

$$u_f = \frac{1}{\hat{g}}[-\hat{f} + y_m^{(n)} + k^T e] \tag{9}$$

여기서 y_m 은 플랜트의 바람직한 출력이고 $e = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T$ 이며 $k = [k_n, \dots, k_1]^T \in R^n$ 는 다항

식 $h(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$ 의 근이 열린 LHP (left half plane)에 존재하도록 하는 계수들의 벡터이다.

$$u_s = I_1^* \text{sgn}(e^T P b_c) \frac{1}{g_L(x)} (|\hat{f}| + f^U + |\hat{g}u_f| + |g^U u_f|) \tag{10}$$

여기서 f^U , g^U , g_L 은 각각 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 상한 및 하한값이며 V_e 와 $\text{sgn}(x)$ 는 다음과 같이 정해진다.

$$\begin{aligned}
I_1^* &= 1(V_e > \bar{V}) \\
I_1^* &= 0(V_e \leq \bar{V})
\end{aligned}$$

여기서 \bar{V} 는 설계시 지정하는 값이다.

$$\begin{aligned}
\text{sgn}(x) &= 1(x \geq 0) \\
\text{sgn}(x) &= -1(x < 0)
\end{aligned}$$

식 (8)의 제어 입력에 의한 오차 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{e} = \Lambda_c e + b_c [(\hat{f} - f(x)) + (\hat{g}(x) - g(x))u_f - g(x)u_s] \tag{11}$$

여기서 Λ_c 와 b_c 는 다음과 같다.

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \dots & -k_1 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Λ_c 는 안정한 행렬이므로 다음의 Lyapunov 방정식을 만족하는 유일한 양한정 대칭 $n \times n$ 행렬 P 가 존재한다 [10].

$$\Lambda_c^T P + P \Lambda_c = -Q \tag{13}$$

여기서 Q 는 임의의 $n \times n$ 양한정 행렬이다. Lyapunov 함수를 $V_e = \frac{1}{2} e^T P e$ 로 두고 이의 시간에 대한 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_e &= -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c [(\hat{f} - f(x)) + (\hat{g} - g(x))u_f - g(x)u_s] \\
&\leq -\frac{1}{2} e^T Q e + |e^T P b_c| (|\hat{f}| + |f(x)| + |\hat{g}u_f| + |g(x)u_f|) \\
&\quad - e^T P b_c g(x)u_s \\
&\leq -\frac{1}{2} e^T Q e + |e^T P b_c| (|\hat{f}| + |f| + |\hat{g}u_f| + |g u_f|) \\
&\quad - \frac{g}{g_L} (|\hat{f}| + f^U + |\hat{g}u_f| + |g^U u_f|) \\
&\leq -\frac{1}{2} e^T Q e \leq 0
\end{aligned} \tag{14}$$

따라서 Lyapunov 정리에 따라 전체 시스템은 안정하게 원하는 궤적을 따라간다. 본 논문에서 사용되는 제어 방법은 [9]와 [8]이 TSK 퍼지 모델에만 의존하여 설계 및 분석을 한 데 반해 원래의 비선형 시스템을 고려하여 제어 입력을 설정하였으므로 더욱 강인하다. 이는 [7]의 것과 유사하나 [7]의 방법은 비선형 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 따로 모델링하는 반면에 본 논문에서는 TSK 퍼

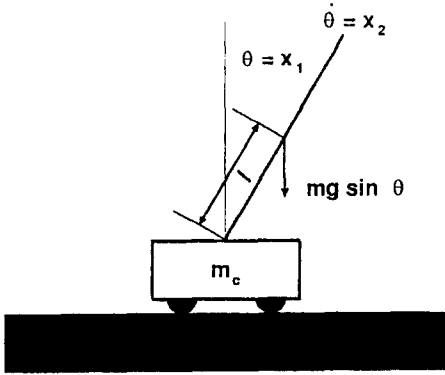


그림 1: 도립 진자 시스템
Fig. 1 The inverted pendulum system

지 모델을 사용함으로써 이 분야에서 개발된 많은 모델링 기법을 사용하여 더욱 손쉽게 비선형 함수의 근사 함수 \hat{f} 와 \hat{g} 를 구할 수 있는 장점이 있다. 그러나 제안된 제어 입력의 구성 요소인 u_0 는 시스템의 안정도를 보장하기 위한 보상 입력이다. 이는 일종의 고이득 제어 방법으로써 시스템에 바람직하지 않은 영향을 미칠 수 있다. 그러므로 기본적인 제어 u_f 가 시스템을 안정하게 하는 경우에는 사용하지 않는 것이 바람직하다 [11].

4. 모의실험

모의 실험은 [7]에서 사용된 도립 진자를 사용하며 그림 4.에 이를 도시하였다. $x_1 = \theta$ 이고 $x_2 = \dot{\theta}$ 일 때 도립 진자 시스템의 동력학 방정식은 다음과 같다 [8].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u}{4l/3 - a m \cos^2(x_1)} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 x_1 은 수직축으로부터 측정된 진자의 각도, x_2 는 각속도, $g = 9.8m/s^2$ 는 중력 가속도, $m = 2.0kg$ 은 진자의 질량, $a = \frac{1}{m+M}$, $M = 8.0kg$ 은 차량의 질량, $2l = 1.0m$ 은 진자의 길이이고 u 는 차량에 가해지는 힘이다. 시스템이 추종하고자 하는 궤적은 $y_m = 0$ 이다. 이 시스템의 퍼지 모델은 다음과 같다 [8].

$$\text{Rule 1: IF } x_1 \text{ is about } 0 \text{ THEN } \dot{x} = A_1 x + B_1 u \quad (16)$$

$$\text{Rule 2: IF } x_1 \text{ is about } \pm\pi/2 \text{ THEN } \dot{x} = A_2 x + B_2 u \quad (17)$$

여기서 $\beta = \cos(88)$ 이고 퍼지 규칙 전건부의 소속 함수는 그림 2와 같으며 퍼지 규칙 후건부의 각 행렬은 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

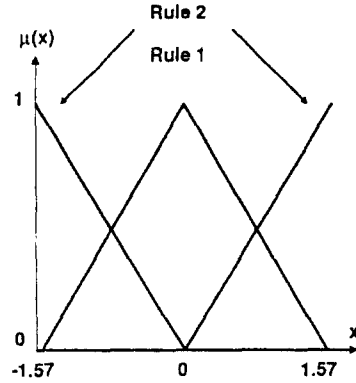


그림 2: 소속 함수
Fig. 2 The membership functions

본 논문에서 제안된 퍼지 제어기의 설계를 위한 매개 변수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2)| &= \left| \frac{g \sin x_1 - a m l x_2^2 \sin(2x_1)/2}{4l/3 - a m l \cos^2 x_1} \right| \quad (18) \\ &\leq 17.2931 + 0.0882 x_2^2 = f^U(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |g(x_1, x_2)| &= \left| \frac{a \cos x_1}{4l/3 - a m l \cos^2 x_1} \right| \quad (19) \\ &\leq 0.1765 = g_U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |g(x_1, x_2)| &\geq \left| \frac{\frac{1}{10} \cos \frac{\pi}{6}}{\frac{4 \times 0.5}{3} + \frac{1}{10} (2)(0.5) \cos^2 \pi/6} \right| \quad (20) \\ &= 0.1168 = g_L \end{aligned}$$

또한 $\bar{V} = 0.267$ 로 두었으며 P 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

이 때 시스템의 폐루프 응답을 그림 3에 보인다. 그림 3에서 사용된 제어 입력은 u_f 만을 사용하여 제어한 것이다. 그림에서 보듯이 시스템은 안정하게 작동하고 있으므로 추가적인 보상 입력 u_0 를 사용하지는 않았으나 만족스럽게 원하는 궤적을 따라갈 수 있다.

5. 결론

퍼지 제어기는 전문가의 경험을 퍼지 논리를 이용하여 언어 규칙으로 표현하고, 이와 같이 이루어진 규칙들로서 제어기를 구성하기 때문에 제어 대상 플랜트의 정확한 수학적 모델을 알지 못한다 하더라도 좋은 결과를 얻을 수 있고 강한 성질을 지니고 있으며 그 구현도 간단하다. 그러나 이러한 퍼지 제어기 구현의 단순성에 비해 퍼지 제어기의 설계는 통상 설계자의 주관적인 경험에 의해 시행 확률적으로 이루어지며 이러한 경험적인 방법은 시스템이 복잡해지거나 돌발적인 상황에 처했을 경우 제어 성능이 떨어지기 쉽다. 또한, 이렇게 전문가의 경험에 의해 설계된 여러가지 퍼지 제어기의 구성 요소들이 가장 최적의 값

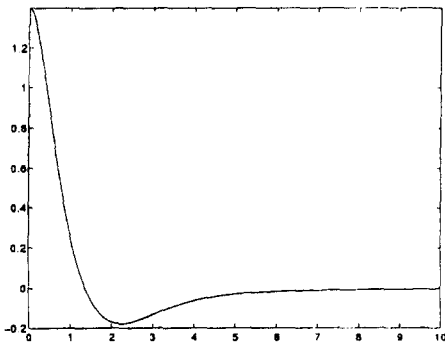


그림 3: 시스템의 폐루프 응답
The closed loop output response

이라는 보장도 없다. [9]는 TSK 퍼지 모델에 기반한 안정도 접근 방법을 통해 제어를 설계하였고 [8]은 선형 시스템 이론에 기반하여 공통 Lyapunov 행렬을 구하지 않고서 안정한 퍼지 제어를 설계하였다. 그러나 위에서 언급한 방법들은 비선형 시스템 자체가 아니라 퍼지 모델에 기반한 제어기 설계 기법으로 실제 비선형 시스템과 연관된 설계 기법이 아니다. 본 논문에서는 비선형 시스템과 그 TSK 퍼지 모델을 사용한 안정한 퍼지 제어를 설계하고 [9]와 [8]이 TSK 퍼지 모델에만 의존하여 설계 및 분석을 한 데 반해 원래의 비선형 시스템을 고려하여 제어 입력을 설정하였으므로 더욱 장인하다. 제안된 제어 방법은 [7]의 것과 유사하나 [7]의 방법은 비선형 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 따로 모델링하는 반면에 본 논문에서는 TSK 퍼지 모델을 사용함으로써 이 분야에서 개발된 많은 모델링 기법을 사용하여 더욱 손쉽게 비선형 함수의 근사 함수 \hat{f} 와 \hat{g} 를 구할 수 있는 장점이 있다. 제안된 방법을 도립 진자의 제어에 적용하여 그 효용성을 보였다.

참고문헌

- [1] Yie-Chien Chen, Ching-Cheng Teng, "A Model Reference Control Structure Using a Fuzzy Neural Network", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 73, Issue 3, pp. 291-312, 8 August 1995.
- [2] J. J. Buckley and Y. Hayashi, "Can Fuzzy Neural Nets Approximate Continuous Fuzzy Functions?", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 61, pp. 43-51, 1994.
- [3] J. Godjevac, A learning procedure for a fuzzy system: application to obstacle avoidance International Symposium on Fuzzy Logic, Zurich, 1995
- [4] J. S. Roger Jang, C. T. Sun, "Neuro-Fuzzy Modeling and Control", *Proc. IEEE*, March 1995.
- [5] Kumpati S. Narendra and Kannan Parthasarathy, "Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks", *IEEE Trans. Neural Network*, Vol. 1, No. 1, pp. 4-27, 1990.
- [6] Ronald R. Yager and Dimitar P. Filev, *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, John Wiley & Sons, Inc., 1994, pp. 231-250.

- [7] Li-Xin Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*, Prentice-Hall International, 1994.
- [8] F. H. F. Leung, L. K. Wong and P. K. S. Tam, "Fuzzy Model Based Controller for an Inverted Pendulum", *Electronics Letters*, Vol. 32, No. 18, pp. 1683-1685, 29th August 1996.
- [9] Kazuo Tanaka and Michi Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 45, pp. 135-156, 1992.
- [10] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1991.
- [11] G. Feng, S. G. Cao, N. W. Rees, and C. K. Chak, "Design of Fuzzy Control Systems with Guaranteed Stability", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 85, Issue 1, pp. 1-10, 1 January 1997.