

지반의 Creep Compliance Equation을 이용한 점탄성계수에 관한 연구 A Study on Coefficient of viscoelasticity of Creep Compliance Equation of Soil

최 성 욱¹⁾, Choi Sung-Wook, 민 덕 기²⁾, Min Tuk-ki

¹⁾ 울산대학교 토목환경공학부 석사과정, Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Ul-San University

²⁾ 울산대학교 토목환경공학부 교수, Professor, Dept. of Civil Engineering, Ul-San University

SYNOPSIS : In this paper, we tried to decide the coefficients of viscoelasticity of creep compliance equation of soil. The two methods, the successive residual method and polynomial regression were applied to estimate the parameters of the generalized viscoelastic model. In the case of the Ulsan clay, the parameters calculated from both methods agreed very well with the results of consolidation tests. The successive residual method had little higher accuracy than the other.

KEYWORDS : Creep compliance equation, Successive residual method, Polynomial regression, 점탄성계수

1. 서론

지반공학에 있어서 지반의 구성방정식을 구하는 것과 정확한 지반계수를 산정하는 것이 중요하다. 비록 역해석방법과 최적화기법등으로 점탄성계수를 얻을 수 있지만 그런 방법들이 유일하다고는 생각되지는 않는다. 본 논문에서는 압밀실험결과를 이용하여 generalized model의 점탄성계수를 구하는 여러 방법 중 successive residual법과 polynomial regression equation을 이용하여 generalized model의 점탄성계수를 구하였다. 또한, 두 방법으로 구한 점탄성계수들을 비교·검토하였다.

2. 실내실험결과

본 논문에 사용된 시료는 그림2.1에서 보는 바와 같이 울산의 연약지반이 폭넓게 분포되어 있는 삼산동의 3지점을 선정하여 비교란 시료를 채취하였다.



그림2.1 시료채취 위치 평면도

본 논문에 사용된 시료의 물성은 다음과 같다. 액성한계가 64.8~56.0%, 소성지수가 44.0~20.7, 통일 분류법에 의해 흙의 종류는 OH로 나타났다. 자연함수비는 49~76%, 흙의 습윤단위중량은 1.58~1.74t/m³, 비중은 2.40~2.63, 유기질 함량은 8.1~11.54%로 나타났다. 압밀 실험 결과 $C_v = 0.0066 \sim$

0.0134cm²/sec, Cc=0.5~0.65로 나타났고, 채취한 시료 중 C지점의 e-log p 곡선을 그림2.2에 나타내었다.

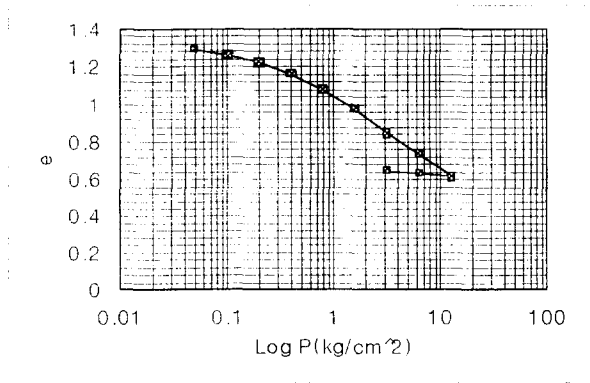


그림2.2 e-log p 곡선(C지점)

3. Successive Residual법

점탄성계수들을 특성화하는 방법으로 시간함수인 creep compliance, D(t)는 다음 식과 같다.

$$D(t) = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (3.1)$$

여기서, creep compliance, D(t)는 Young계수의 역수이다.

일반화된 모델에 대한 creep compliance는

$$D(t) = \frac{1}{E_0} \left(1 + \frac{t}{T_0}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/T_i}) \quad (3.2)$$

로 나타낼 수 있고, 일반화된 모델은 그림3.1에 나타내고 있는 바와 같이 1개의 Maxwell model과 n개의 Kelvin model의 결합으로 이루어진다.

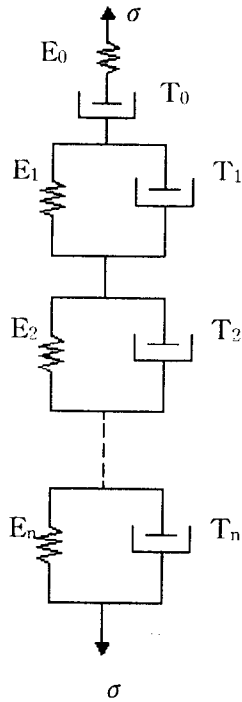


그림3.1 Generalized Model

여기서, E 는 탄성계수이고, λ 는 점성계수이다. 그리고, $T_0 = \frac{\lambda_0}{E_0}$ 는 relaxation time이고, $T_i = \frac{\lambda_i}{E_i}$ 는 retardation time이다.

Creep compliance curve가 주어질 경우 일반화된 모델의 점탄성계수들은 successive residual method에 의해 구할 수 있다.

먼저 retarded strain에 대한 creep compliance, D 는 그림3.2에 보여주는 바와 같이 전 변형에서 탄성 변형과 점성변형을 감해줌으로서 구할 수 있다.

$$D = \frac{1}{E_1}(1 - e^{-t/T_1}) + \frac{1}{E_2}(1 - e^{-t/T_2}) + \frac{1}{E_3}(1 - e^{-t/T_3}) + \dots \quad (3.3)$$

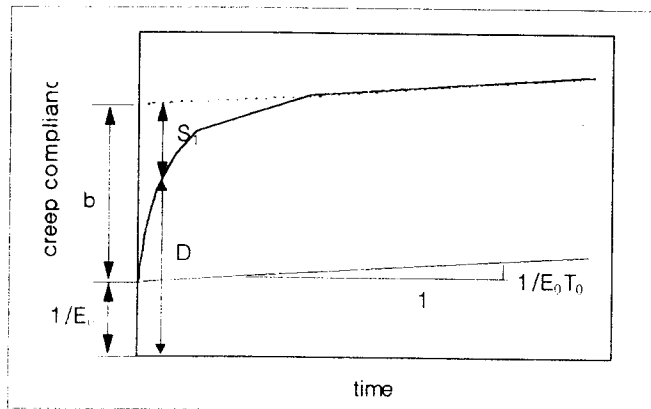


그림3.2 creep compliance 분리

그림3.2에서

$$b = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} + \dots \quad (3.4)$$

이 되어 식3.4로부터 residual, S_1 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S_1 = b - D = \frac{1}{E_1} e^{-t/T_1} + \frac{1}{E_2} e^{-t/T_2} + \dots \quad (3.5)$$

T_1 이 T_2 나 T_3 보다 훨씬 클 경우 충분한 시간이 경과한 후에는 식3.5의 우측 마지막항들을 무시할 수 있다. 즉 식3.5는 다음식으로 간단히 나타낼 수 있다.

$$S_1 = \frac{1}{E_1} e^{-t/T_1} \quad (3.6)$$

식3.6은 $\log S_1 - t$ 관계가 그림3.3에서 직선으로 나타난다.

$$\log S_1 = \log \left(\frac{1}{E_1} \right) - \frac{0.434t}{T_1} \quad (3.7)$$

직선의 기울기로부터 T_1 을 구할 수 있고, $t=0$ 에서의 절편으로부터 E_1 을 구할 수가 있다. 여기서 S_2 는 곡선과 직선 사이의 수직방향의 차를 나타낸다. T_2 가 T_3 보다 훨씬 크다면 $\log S_2 - t$ 관계를 도시하면 또 다시 직선이 되어 마찬가지로 방법으로 T_2 및 E_2 를 구할 수 있다. 곡선과 직선의 차가 무시할 정도로 작아질 때까지 상기 과정을 반복하면 일반화된 모델의 점탄성계수를 구할 수 있다.

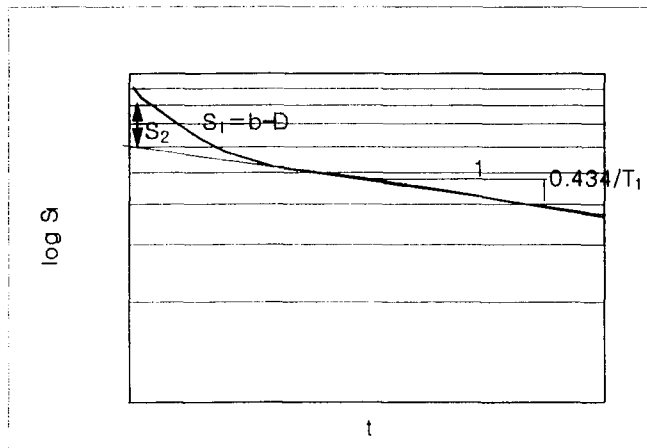


그림3.3 successive residual method

본 시료의 실험결과에 successive residual법을 이용하여 점탄성계수들을 구했고, 표3.1에 나타내었다. 점성계수, λ 는 Kelvin model 수가 증가함에 따라 감소하였다. 실험결과와 Kelvin model개수에 따른 상관관계를 구하여 표3.2에 나타내었다. Maxwell model 1개, Kelvin model 2개이상이면 실험결과와 거의 일치하게 됨을 알수 있었다. Kelvin model개수가 증가함으로써 실험결과와 더욱 일치하게 된다.

표3.1 C지점의 successive residual법에 의한 점탄성계수

응력(σ) (kg/cm^2)	E_0 (kg/cm^2)	E_1	E_2	E_3	λ_0 ($\text{kg/cm}^2 \cdot \text{min}$)	λ_1	λ_2	λ_3
0.05	0.1	0.036	0.17	0.37	268.24	3.23	4.10	0.39
0.1	1.42	0.12	0.36	1.61	442.42	14.51	6.15	3.15
0.2	2.15	0.15	0.48	2.63	762.43	15.46	9.95	2.45
0.4	1.46	0.26	0.56	2.44	1144.43	26.36	9.38	2.46
0.8	4.61	0.5	0.67	6.67	2012.07	79.46	7.90	17.81

표3.2 C지점의 Kelvin model 갯수에 따른 상관계수

응력 (t/m ²)	Kelvin Model 3	Kelvin Model 2	Kelvin Model 1
0.05	0.995866	0.981556	0.907586
0.1	0.990881	0.969131	0.773495
0.2	0.996072	0.966537	0.581113
0.4	0.999807	0.984864	0.731566
0.8	0.991314	0.978599	0.3311

4. Polynomial Regression

실험결과치 $\{(x_i, y_i) : (i=1,2,\dots,m)\}$ 가 $Y=f(x)$ 를 만족한다고 가정하고, x 의 범위가 $-a < x < a$ (a 는 양의 실수)이라면, Machlaurin formula를 적용할 수 있다.

$$Y = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad (4.1)$$

여기에서,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1) \quad (4.2)$$

다른 한편, 실험결과치 $\{(x_i, y_i) : (i=1,2,\dots,m)\}$ 을 polynomial regression에 적용할 수 있다. polynomial regression equation을 나타내면 다음과 같다.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N \quad (4.3)$$

여기에서, 양의 정수 N 은 polynomial 수이고, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ 은 polynomial 계수이다.

실험결과치는 식4.1과, 식4.3을 만족하므로, Y 와 y 는 거의 같다고 볼 수 있다.

$$Y \approx y \quad (4.4)$$

식3.2에 사용된 점탄성계수들을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{E_0} \\ F &= \frac{1}{T_0} \\ G &= \frac{1}{E_1} \\ H &= \frac{1}{T_1} \\ I &= \frac{1}{E_2} \\ J &= \frac{1}{T_2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.5)$$

따라서, 식4.6을 식3.2에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D(t) = E(1 + Ft) + G(1 - \text{EXP}(-Ht)) + I(1 - \text{EXP}(-Jt)) + \dots \quad (4.6)$$

실험결과를 만족하는 polynomial regression equation은 식4.3이므로, 식4.6과 식4.3을 같다고 볼 수 있다. 식 4.6은 식4.1을 만족하므로,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= E \\
 a_1 &= a_0 F + GH + IJ + KL + \dots \\
 \frac{a_2}{2!} &= GH^2 + IJ^2 + KL^2 + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

로 나타낼 수 있으나 식4.7은 변수의 수가 많고, 일정하게 순환하므로 수학적 방법으로 구하기 어려우므로, 본 논문에서는 trial & error방법을 이용하여 계수들을 구했다.

Polynomial regression equation의 계수들과, 실험결과와의 상관관계를 표4.1에 나타내었다. 표에서 볼 수 있는 바와 같이 polynomial regression equation이 실험결과와 거의 일치함을 알 수 있었다. Trial & error방법으로 점탄성계수들을 구해서 표4.2에 나타내었다.

표4.1 C지점의 polynomial regression equation 계수

계수 응력 (kg/cm ²)	a ₀	a ₁	a ₂ (10 ⁻²)	a ₃ (10 ⁻⁴)	a ₄ (10 ⁻⁶)	a ₅ (10 ⁻⁸)	a ₆ (10 ⁻¹¹)	a ₇ (10 ⁻¹⁵)	상관계수
0.05	10	1.127	-3.234	5.134	-4.033	1.486	-2.203	9.368	0.9960
0.1	0.7026	0.4411	-1.396	2.312	-1.857	0.6925	-1.032	4.401	0.9908
0.2	0.465	0.338	-1.035	1.671	-1.323	0.4899	-0.7279	3.098	0.9947
0.4	0.686	0.2235	-0.6517	1.014	-0.7804	0.2833	-0.4164	1.764	0.9966
0.8	0.2169	0.158	-0.4963	0.8076	-64.3	0.2389	-0.3557	1.515	0.9921

표4.2 C지점의 polynomial regression equation에 의한 점탄성계수

응력(σ) (kg/cm ²)	E ₀ (kg/cm ²)	E ₁	E ₂	E ₃	λ ₀ (kg/cm ² · min)	λ ₁	λ ₂	λ ₃
0.05	0.1	0.037	0.13	0.91	268.097	3.36	3.10	1.28
0.1	1.42	0.12	0.32	1.67	430.30	15.19	5.72	3.27
0.2	2.15	0.15	0.77	5	762.41	15.63	9.63	5.26
0.4	1.46	0.27	0.57	5	1140.63	28.13	9.66	7.35
0.8	4.61	0.60	0.77	6.67	2013.10	97.72	8.85	17.88

또한, trial & error방법으로 구한 점탄성계수들을 이용하여 creep compliance equation, D(t)를 구하여 실험결과와 상관계수를 표4.3에 나타내었다.

표4.3 상관계수

응력 (kg/cm ²)	0.05	0.1	0.2	0.4	0.8
상관계수	0.993241	0.975733	0.885049	0.990461	0.991314

5. 비교 · 분석

Successive residual method에 의해 구한 점탄성계수들과 polynomial regression equation으로 구한 점탄성계수들을 표5.1, 표5.2에 나타내었다. 두방법으로 구한 점탄성계수들은 거의 일치하고 있음을 보여준다.

3.5.1 탄성계수 비교 (E 단위 : (kg/cm²))

(S.R.M : Successive Residual Method , P.R.E : Polynomial Regression Equation)

응력 (kg/cm ²)	S.R.M E ₀	P.R.E E ₀	S.R.M E ₁	P.R.E E ₁	S.R.M E ₂	P.R.E E ₂	S.R.M E ₃	P.R.E E ₃
0.05	0.1	0.1	0.036	0.037	0.17	0.13	0.37	0.91
0.1	1.42	1.42	0.12	0.12	0.36	0.32	1.61	1.67
0.2	2.15	2.15	0.15	0.15	0.48	0.77	2.63	5
0.4	1.46	1.46	0.26	0.27	0.56	0.57	2.44	5
0.8	4.61	4.61	0.5	0.6	0.67	0.77	6.67	6.67

3.5.2 점성계수 비교 (λ 단위 : (kg/cm²) · min)

응력 (kg/cm ²)	S.R.M λ ₀	P.R.E λ ₀	S.R.M λ ₁	P.R.E λ ₁	S.R.M λ ₂	P.R.E λ ₂	S.R.M λ ₃	P.R.E λ ₃
0.05	268.24	268.10	3.23	3.36	4.10	3.10	0.39	1.28
0.1	442.42	430.30	14.51	15.19	6.15	5.72	3.15	3.27
0.2	762.43	762.41	15.46	15.63	9.95	9.63	2.45	5.26
0.4	1144.43	1140.63	26.36	28.13	9.38	9.66	2.46	7.35
0.8	2012.07	2013.10	79.46	97.72	7.90	8.85	17.81	17.88

하중단계별로 두방법에 의해 구해진 creep compliance curve와 실험결과를 그림5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 successive residual method에 의해 구한 creep compliance curve가 실험결과에 더 근접하였다.

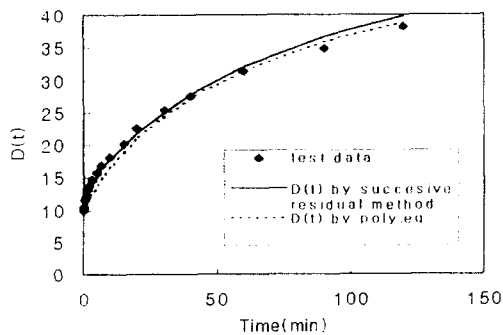


그림5.1 0.05kg/cm²

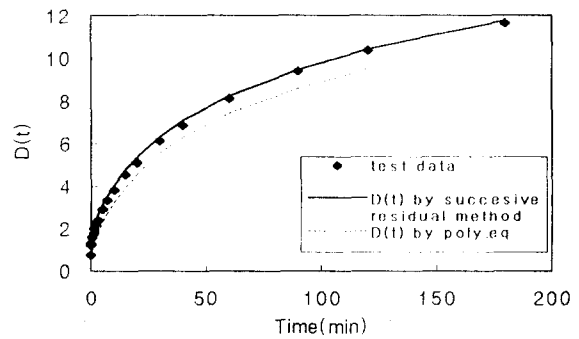


그림5.2 0.1kg/cm²

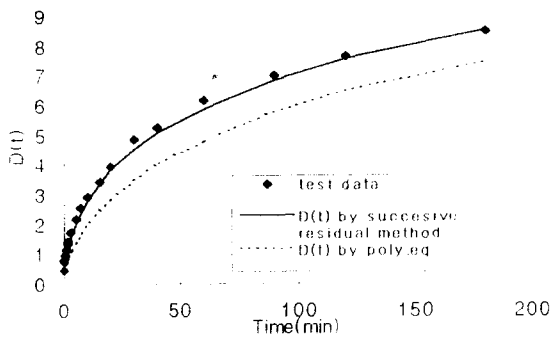


그림5.3 0.2kg/cm²

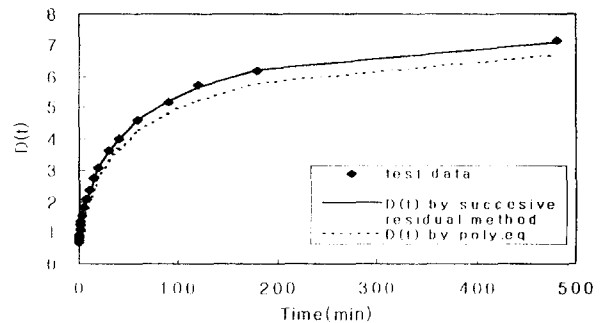


그림5.4 0.4kg/cm²

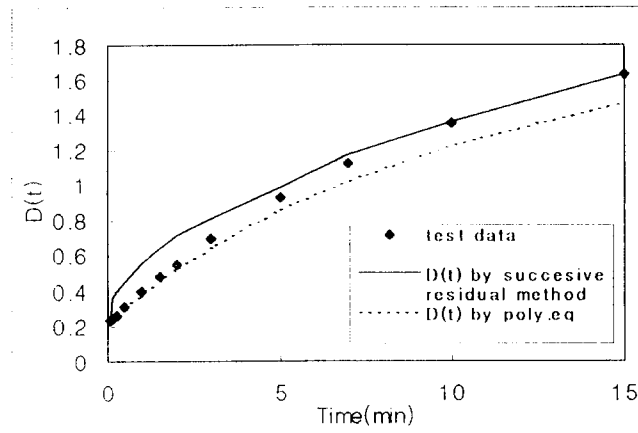


그림 5.5 0.8kg/cm²

6. 결론

Successive residual method와 polynomial regression equation로 구한 점탄성계수들을 비교한 결과 아래와 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 본 논문에 사용된 방법들은 압밀실험결과와 거의 일치하는 creep compliance equation을 구할 수 있었다.
2. 두 방법에 의해 구해진 점탄성계수들은 거의 일치하였다.
3. Polynomial regression equation을 이용하여 구한 creep compliance curve보다 Successive residual method로 구한 creep compliance curve가 실험결과에 더 가까이 접근하였다.

참고문헌

1. 박성재 (1987) 토질역학, 회성출판사, 서울
2. Akaishi, M., Tonnoaky, A., Pande, G.N. (1986), "A constitutive Model for Secondary Consolidation." 2nd International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Ghent.
3. Barden, L (1965), Consolidation of clay with non-linear viscosity, Geotechnique, Vol.15, no.4, pp 345-362.
4. Barden, L (1969), Time dependent deformation of normally consolidated clays and peats, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 95, no.SM1, pp 1-31.
5. Bjerrum, L.(1967), Engineering geology of Norwegian normally consolidated marine clays as related to settlements of building, 7th Rankine lecture, Geotechnique, Vol. 17, no. 2, pp 81-118
6. Mesri, G.(1973), Coefficient of secondary compression, Journal of the soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol.99