논리함수의 Module-2 방식에 의한 신경회로망의 구성

손병성
가톨릭상지 전문대학 전산정보처리과
진상화
경북실업전문대학 전자계산과
정환묵
대구효성가톨릭대학교 전자.정보공학부

요 약

본논문은 논리함수의 Modulo-2 방식에 따라 신경회로망을 구성하고, 구성된 신경회로망에 의해서 논리함수 XOR을 예를 들어 표현하였다.

논리함수에서 사용되는 Modulo-2방식은 2치 자료을 처리하는 것으로, 논리함수의 대표적인 것이 부울함수(Boole function)이다.

신경회로망의 입력층에서는 논리함수의 값을 입력하고, 중간층에서는 논리함수의 직교전개를 이용하고, 출력층에서도 직교전개등을 통하여 최종적인 결과값를 얻는 것이다. 이를 위해서 내적(inner product) 및 norm등을 정의하고, 직교(orthogonal)에 대한 정의을 하였다.

또한, 부울함수(Boole Function)의 미분에 대한 정의 및 부울함수의 Maclaurin 전개에 대해서도 정의하였다.

본논문에서 논리함수의 최종적인 출력값은 부울함수의 Maclaurin 전개에 의해서도 실제적인 값이 출력될 수 있다는 것을 나타내었다.

1. 서 론

인간의 사고 방법과 그 원리를 연구하는 논리학에서 이진 논리(binary logic)는 참 아니면 거짓, 둘 중 하나만을 요구하는 명제 (proposition)를 다룬다. 인간의 지식을 표현하기에 적당한 방법으로 신경망(Neural Network)이 있다. 신경망은 학습 기능과 비선형성의 특징으로 임의의 입.출력 데이터를 지식으로 취급할 수 있지만, 그 입.출력들 사이의 관계에 관한 지식은 신경망내의 결합 하중에 분산하여 기억되기 때문에 입.출력 데이터의 처리를 파악하는 것은 어렵다. 최근 인공지능 분야에서 고전논리의 유효성의 한계가 지적되고 다양한 비고전 논리가 제안되어 활발하게 연구되고 있다. 본논문에서는 유클리드 공간의 직교와 부울함수의 아톰(atom)이 비슷한 것에 착안하고, 부울함수의 아톰에 해당하는 함수가 정규 직교가 된다는 것을 이용하여, 논리함수의 출력값을 얻고자 하는 것이다. 이를 위하여 논리함수 XOR을 신경회로망으로 처리하는 것을 예로 들어서 나타내었고, 부울함수의 Maclaurin 전개을 통하여 논리함수의 출력값이 나타나는 것을 보여준다.

2. 논리벡터

2.1 논리벡터의 정의

명제 논리를 부울함수의 Karnaugh Map을 이용함으로써, 명제를 논리 벡터로 표현할 수 있다. 논리 벡터에 대한 간단한 예는 다음과 같다. 명제 X, Y에 대한 각각의 논리 변수를

x, y라 할 때 명제에 대한 논리 함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

x + y을 Karnaugh map으로 나타내면 [그림 1]과 같다.

x \ y	y	$\overline{y}$
x	1	1
$\overline{x}$	1	0

<그림 1> 2 변수 카르노 맵

<그림 1>에 나타난 것을 2변수 논리공간 $\{ xy, xy', x'y, x'y' \}$의 성질을 이용하면

$$1 \cdot xy + 1 \cdot xy' + 1 \cdot x'y + 0 \cdot x'y'$$

로 표현할 수 있다. 명제 $x \vee y$은 논리 벡터이며, 이것의 단위 벡터는 (1, 1, 1, 0)이다.

여기서 2변수 논리 공간의 단위 벡터는 다음과 같다.

xy = (1, 0, 0, 0)

xy' = (0, 1, 0, 0)

$x'y$ = (0, 0, 1, 0)

$x'y'$ = (0, 0, 0, 1) 이다.

논리 벡터의 각 요소값은 { 0, 1 }이다. 각 격자점이 각 명제에 대응되는 것이다.

2.2 논리벡터의 연산

논리 연산은 2개의 논리 벡터 $f=(f_i)$, $g=(g_i)$라할 때 어느 쪽이 독립 사상일 경우, 논리 벡터의 논리곱, 논리합, 부정은 각각 다음과 같다.

$f \cdot g = (f_i \cdot g_i)$ (논리곱)

$f + g - fg = (f_i + g_i - f_i \cdot g_i)$ (논리합)

$1 - f = (1 - f_i)$ (부정)

규칙의 논리 벡터에서는, 규칙이 복수개 존재하지만 그것들은 A → B라는 논리 명제로 표현될 수 있다. 이것은 연언(conjunction), 선언(disjunction), 부정(negation)으로 표현되고 $\overline{A} \vee B$와 같다. 그러므로 논리 공간상에서 직교 함수를 전개하면 규칙의 논리 벡터가 된다. 또한 사례와 추론 조건의 논리 벡터는, 명제의 기하적 모델에서 각각 논리 벡터의 아톰(atom)이 된다. 즉, 각 속성이 속성 값의 곱에 대응된다.

2.3 벡터의 내적(inner product)

벡터 $A=(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$, $B=(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$에 대하여

$$A.B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

을 벡터의 내적이라 하고, <A , B>로 표현한다.

벡터의 내적은 다음과 같은 성질을 가진다.

1) $\langle A, B \rangle = \overline{\langle B, A \rangle}$

2) $\langle A, B+C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$

3) $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = A \cdot (kB)$

내적이 0에 가까울수록 정보는 모순에 가깝다고 말할 수 있다.

2.4 놈(norm)의 정의

벡터 A , B 사이의 크기를 놈이라 하고, $\| A-B \|$ 로 표현한다.

$$\| A-B \| = \sqrt{\langle A-B, A-B \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle A-A \rangle - 2\langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle}$$

2.5 직교의 정의

K상의 내적 공간 V의 벡타 x , y에 대하여 $\langle x , y \rangle = 0$일 때, x와 y는 서로 직교한다고 한다.

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2 - y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1$$

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3 - y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 - \frac{\langle x_2 - y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = x_n - \frac{\langle x_n - y_{n-1} \rangle}{\langle y_{n-1}, y_{n-1} \rangle} y_{n-1} - \ldots - \frac{\langle x_n - y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1$$

이라고 두면 $\langle y_i , y_j \rangle = 0 \ (i \neq j)$ 을 직교라고 한다.

3. 부울함수

3.1 부울함수의 기본 성질

(1) $A + A' = 1$

(2) $A \cdot A' = 0$

(3) $A + A = A$

(4) $A \cdot A = A$

(5) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

(6) $A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$

(7) $(A + B)' = A' \cdot B'$

(8) $(A \cdot B)' = A' + B'$

(9) $(A')' = A$ (De Morgan's 법칙)

3.2 부울함수의 직교

부울함수의 아톰(atom)을 확장한 직교는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_i = \prod_{j=1}^{n} e(X_j) \qquad (i= 1 \sim 2^n , j = 1 \sim n)$$

여기서, $e(X_j)$는 $1 - X_j \ (= \overline{X_j}\ )$와 X_j 가 된다.

즉, $A = \overset{11}{X_1}\ \overset{11}{X_2}$, $B = \overset{11}{X_1}\ \overset{00}{X_2}$,

$C = \overset{00}{X_1}\ \overset{11}{X_2}$, $D = \overset{00}{X_1}\ \overset{00}{X_2}$ 일 때

$$A \cdot B = B \cdot C = C \cdot D = A \cdot D = 0$$

를 만족하는 경우, 이때를 부울함수의 직교라 정의한다.

부울함수는 변수의 개수에 따라 표현되는 값은 각각 다음과 같이 표현된다.

1 변수인 경우는 $\overset{00}{X_1}$, $\overset{11}{X_1}$

2 변수인 경우는 $\overset{11}{X_1}\ \overset{11}{X_2}$, $\overset{11}{X_1}\ \overset{00}{X_2}$,

$\overset{00}{X_1}\ \overset{11}{X_2}$, $\overset{00}{X_1}\ \overset{00}{X_2}$

3변수인 경우는

$\overset{11}{X_1}\ \overset{11}{X_2}\ \overset{11}{X_3}$, $\overset{11}{X_1}\ \overset{11}{X_2}\ \overset{00}{X_3}$,

$\overset{11}{X_1}\ \overset{00}{X_2}\ \overset{11}{X_3}$, $\overset{11}{X_1}\ \overset{00}{X_2}\ \overset{00}{X_3}$,

$\overset{00}{X_1}\ \overset{11}{X_2}\ \overset{11}{X_3}$, $\overset{00}{X_1}\ \overset{11}{X_2}\ \overset{00}{X_3}$,

$\overset{00}{X_1}\ \overset{00}{X_2}\ \overset{11}{X_3}$, $\overset{00}{X_1}\ \overset{00}{X_2}\ \overset{00}{X_3}$

3.3 부울함수의 근사

신경회로망에서 학습된 선형함수가

$p_1x_1+p_2x_2+\cdot\cdot\cdot+p_nx_n$ 일때,

직교전개는 다음과 같이 정의한다.

$$a_1x_1\cdots x_n+\cdots+a_{2^n}(1-x_1)\cdots(1-x_n)$$

가 되고,

$$p_1x_1+\cdots\ +p_nx_n=a_1x_1\cdots x_n+\cdot\ \cdot\ +$$
$$+a_{2^n}(1-x_1)\cdots(1-x_n)$$

이다.

여기서 a_i는 다음과 같이 정의된다.

$$a_1=p_1+\cdots+p_n$$
$$a_2=p_1+\cdots+p_{n-1}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{2^{n-1}}=p_1$$
$$a_{2^{n-1}+1}=p_2+p_3+\cdots+p_{n-1}+p_n$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{2^n-1}=p_n$$
$$a_{2^n}=0$$

신경회로망에서 학습된 선형함수가 a이고, 여기에 가장 근사한 부울함수을 b라고 하자.

a을 직교전개하여 구한 벡터 a_i와 b에 대응하는 벡터를 b_i라고 하면 다음과 같다.

$a_i\ \geq\ 0.5$ 일 때 , $b_i\ =\ 1$

$a_i\ <\ 0.5$ 일 때 , $b_i\ =\ 0$이 된다.

3.4 부울함수의 미분 및 편미분

부울함수는 Modulo-2 방식이 되는데, 2치 값을 가진다. 이와 반면에 Modulo-M은 다치 논리을 말한다. 부울함수의 미분은 논리회로의 설계나 고장 진단의 경우에 활용된다.

[기본정의] 본 논문에서는 먼저 다음과 같은 기본 사항을 정의한다.

(1) $A\ \oplus\ B\ =\ \overline{A}\ \oplus\ \overline{B}$

(2) $A\ \ominus\ B\ =\ \overline{A}\ \oplus\ (-1)\overline{B}$

(3) $A\ +\ B\ =\ \max(A,B)$

(4) $A\cdot B\ =\ \min(A,B)$

여기서 $\oplus$와 $\ominus$는 Modulo-2 연산을 뜻한다.

[정의 1] 부울함수의 미분은 다음과 같다

$$\frac{df(x)}{dx}=f(x)\ \oplus\ f(\overline{x}\ )$$

이 때 x의 변화는 x에서 $\overline{x}$가 된다. 이것은 $dx=\Delta x=x\ \oplus\ \overline{x}=1$을 의미한다.

즉, $df(x)=\Delta f(x)=f(x)\ \oplus\ f(\overline{x}\ )$이다.

[정의 2] 함수 $f(x_i,\cdots,x_n)$이 n개의 변수 $x_1,\cdots,x_n$의 부울함수일 때 $x_i(1\leq i\leq n)$에 대한 f 의 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f(x_1,\cdots,\ x_i,\cdots,\ x_n)\oplus f(x_1,\cdots,\ \overline{x_i},\cdots,\ x_n)$$
$$=f(x_1,\cdots,1,\cdots,x_n)\ \oplus\ f(x_1,\cdots,0,\cdots,x_n)$$

[정의 3] 함수 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$의 다중 편미분은 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\cdots\right)\right)$$

3.5 부울함수의 Maclaurin전개

부울함수 $f(X_1, X_2)$의 편미분은 흔히 사용하는 편미분과 유사하게 정의되어 있다. 따라서 부울함수의 미분을 사용하여 Maclaurin 전개를 할 수 있다. 부울함수는 불연속 함수이며, 미분의 값은 0과 1이다.

[정리 4] 부울함수 $f(X_1, X_2)$는 다음과 같이 Maclaurin 전개를 한다.

$$f(X_1, X_2) = \frac{\partial f}{\partial X_1^0}\Big|_{x_1=0} X_1^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1}\Big|_{x_1=0} X_1^1$$

$$\oplus \cdots \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^{2^m-1}}\Big|_{x_1=0} X_1^{2^m-1}$$

$$= \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e}\right)_{x_1=0} X_1^e$$

여기서 $0 \le e \le 2^m - 1$, $\frac{\partial f}{\partial X_1^0} \triangleq f$

$2^m - 1 \triangleq (1, 1, \cdots, 1)$ 이고,

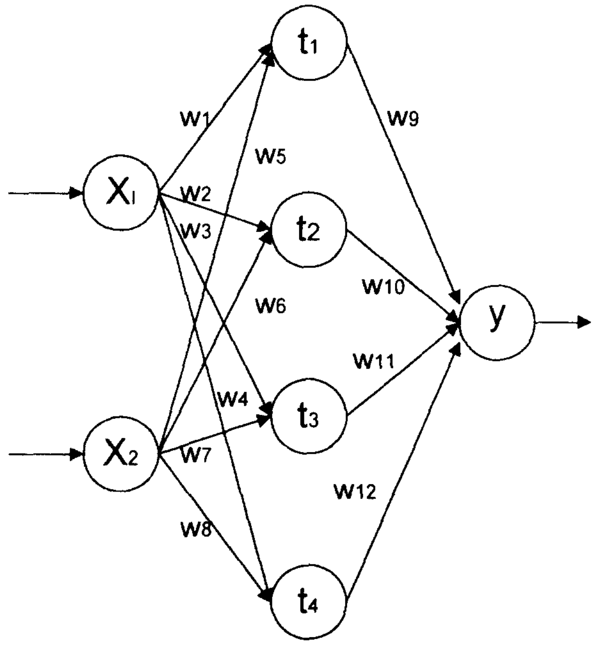
$\overset{00}{X_1} = 1$, $\overset{11}{X_1} = X_1$, $\overset{00}{X_2} = 1$, $\overset{11}{X_2} = X_2$

이다.

4. 신경 회로망을 이용한 XOR 처리

<그림 2>는 배타적 논리합(XOR)을 처리하는 신경회로망을 그림으로 나타낸 것이다.

여기서, X_1 , X_2는 입력층, t_1 ~ t_4는 중간층, y는 출력층을 뜻한다.



<그림 2> XOR을 위한 신경회로망

4.1 XOR처리의 입력층

시그모이드 함수(sigmoid function)가 S(x)라고 하면, $S(x) = 1 / (1 + e^{-x})$가 되고, (0 , S(0)) , (1, S(1))일 때, $S(x) = 0.23x + 0.5$가 된다.

<표 1>은 변수가 2개인 배타적 논리합을 나타낸 것으로, X_1과 X_2의 값이 입력되고, 출력 값은 y가 되는 것을 나타낸 것이다.

<표 1> 2입력 XOR의 진리치표

X_1	X_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$y = X_1 X_2' + X_1' X_2 = X_1 \oplus X_2$$

4.2 XOR처리의 중간층

$t_i = \sum w_i \overset{ii}{X_1} + \sum w_i \overset{ii}{X_2} + \sum h_i$가 된다.

여기서 $\sum h_i$는 중간층 각각의 유니트(unit) 들의 바이어스(bias)을 나타낸 것이다.

이것은 다시 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$t_1 = S(X_1, X_2)(w_1 \overset{00}{X_1} + w_5 \overset{00}{X_2} + w_1 \overset{11}{X_1} + w_5 \overset{11}{X_2} + h_1)$$

$$t_2 = S(X_1, X_2)(w_2 \overset{00}{X_1} + w_6 \overset{00}{X_2} + w_2 \overset{11}{X_1} + w_6 \overset{11}{X_2} + h_2)$$

$$t_3 = S(X_1, X_2)(w_3 \overset{00}{X_1} + w_7 \overset{00}{X_2} + w_3 \overset{11}{X_1} + w_7 \overset{11}{X_2} + h_3)$$

$$t_4 = S(X_1, X_2)(w_4 \overset{00}{X_1} + w_8 \overset{00}{X_2} + w_4 \overset{11}{X_1} + w_8 \overset{11}{X_2} + h_4)$$

이것을 직교 전개하는 식은 다음과 같다.

$$t_i = a \overset{11}{X_1} \overset{11}{X_2} + b \overset{11}{X_1} \overset{00}{X_2} + c \overset{00}{X_1} \overset{11}{X_2} + d \overset{00}{X_1} \overset{00}{X_2}$$

여기서, a, b, c, a의 값은 0.5보다 큰값을 취한다.

4.3 XOR처리의 출력층

$$y = S(X_1, X_2)(w_9 t_1 + w_{10} t_2 + w_{11} t_3 + w_{12} t_4)$$

이것을 직교 전개하는 식은 다음과 같다.

$$y = a \overset{11}{X_1} \overset{11}{X_2} + b \overset{11}{X_1} \overset{00}{X_2} + c \overset{00}{X_1} \overset{11}{X_2} + d \overset{00}{X_1} \overset{00}{X_2}$$

여기서, a ,b ,c ,a의 값은 0.5보다 큰값만 취한다.

$$y = X_1 X_2' + X_1' X_2 = X_1 \oplus X_2$$ 가 된다.

4.4 출력값의 Maclaurin 전개

$$f(X_1, X_2) = \frac{\partial f}{\partial X_1^0}\Big|_{X_1=0} X_1^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1}\Big|_{X_1=0} X_1^1$$

$$\oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^0}\Big|_{X_1=0} X_1^2 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1}\Big|_{X_1=0} X_1^3$$

이것을 각각 미분하여 처리하면 다음과 같이 처리된다.

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^0}\Big|_{X_1=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overset{00}{X_1} \partial \overset{00}{X_1}}\Big|_{X_1=0} = f|_{X_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^1}\Big|_{X_1=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overset{00}{X_1} \partial \overset{11}{X_1}}\Big|_{X_1=0} = \frac{\partial f}{\partial \overset{11}{X_2}}\Big|_{X_1=0} = (X_1' \oplus X_1)|_{X_1=0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^2}\Big|_{X_1=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overset{11}{X_1} \partial \overset{00}{X_1}}\Big|_{X_1=0} = \frac{\partial f}{\partial \overset{11}{X_1}}\Big|_{X_1=0} = (X_2' \oplus X_2)|_{X_1=0} = 1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial X_1^3}\Big|_{X_1=0} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \overset{11}{X_1}\, \partial \overset{11}{X_1}}\Big|_{X_1=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \overset{11}{X_1}} \left(\frac{\partial f}{\partial \overset{11}{X_2}} \right)\Big|_{X_1=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \overset{11}{X_1}} (X_1' \oplus X_1)\Big|_{X_1=0} \\
&= (1 \oplus 1)\Big|_{X_1=0} = 0
\end{aligned}
$$

$$f\ (X_1, X_2) = 0\ X_1^0 \oplus 1\ X_1^1 \oplus 1\ X_1^2 \oplus 0\ X_1^3$$

$$= 0\ \overset{00}{X_1}\ \overset{00}{X_2} \oplus 1\ \overset{00}{X_1}\ \overset{11}{X_2} \oplus 1\ \overset{11}{X_1}\ \overset{00}{X_2} \oplus 0\ \overset{11}{X_1}\ \overset{11}{X_2}$$

$$= 0.1.1 \oplus 1.X_2 \oplus 1.X_1 \oplus 0.X_1X_2$$

$$= X_2 \oplus X_1 = X_1X_2' + X_1'X_2$$

7. 결 론

Modulo-2방식을 이용하여 신경망을 구성하였고, 또한 출력값을 Maclaurin전개을 하여 같은 결과가 나오는 것을 보았다. 이렇게 함으로써 신경망으로 XOR을 처리시 학습 속도가 감소될 수 있고, 중간층의 내부 표현이 명확해 질 수 가 있다.

앞으로의 연구과제는 Modulo-2 방식이 아닌, Modulo-M의 방식으로 처리하여, 다치 처리를 하는 것이다.

참고 문헌

[1] 정환묵, 다치논리 함수의 구조적 해석과 전개, 정보과학회 Vol.13, No.3, pp.155-166, 1986.

[2] 정환묵, 다치논리 함수의 구성이론과 전개에 관한 연구, 대구효성가톨릭대학교논문집,Vol.35, pp.437463, 1987.

[3] **月本 洋, 命題論理の幾何的**モデル,**情報處理學會論文誌**, Vol.31, No.6, pp.783 -191, 1990.

[4] **新 田**, エキスパートシステムにおける**知識表現**と**推論,情報處理學會論文誌**, Vol.28, No.2, pp.158-166, 1987.

[5] **月本 洋, 記號主義**とコネクショニズムの**統合** ハラダイム,**電子情報通信學會**,Technical report of IEICE,pp.79-86,1993.

[6] Andrew R. Golding and Paul S. Rosenbloom. Improving Rule-based Systems through Case-based Resoning. Proceeding of the Nineth National Conference of Artifitial Intelligence, pp.22-27,1991.

[7] Edwina L. Rissland and David B. Skalak. Combining Case-based Reasoning: A Heuristic Approach. Proceeding of the 12th International Joint Conference on Artifitial Intelligence, pp.524-530, 1989.

[8] Ralph Barletta and williem Mark 'Explanation-Based indexing of cases' In proceedings of the CBR Workshop, Clearwater Beach, 1988.