

시간의존 환경사방정식에서 다방향 불규칙파의 내부조파

○이창훈*, 서경덕**

1. 서론

항만, 해변, 기타 해안지역을 보존하고 이용하는 해안공학자들에게 심해로부터 해안지역으로 전파되어 오는 파랑의 특성을 예측하는 것은 아주 중요하다. 심해에서 주로 바람에 의하여 생성된 파랑이 천해로 전파해 오면서 여러 요인에 의하여 그 특성이 변한다. 이러한 파랑의 변형을 예측하는 쌍곡선형의 시간의존 환경사방정식 가운데 Smith 등(1975)의 식, Radder 등(1985)의 식, Kubo 등(1992)의 식은 규칙파 뿐만 아니라 주파수폭이 좁은 불규칙파도 $O(\Delta k)$ ($\Delta k = k - \bar{k}$ 이고, k 는 각 성분파의 파수이고 \bar{k} 는 대표 파수임)의 정확도를 유지하면서 해석 가능한 모형이라는 사실이 밝혀졌다(Lee 등, 1994). 또한 최근 Lee(1994)는 Smith 등의 식과 Kubo 등의 식 각각에 보정항을 가미하여 불규칙파의 해석가능한 영역을 $O((\Delta k)^2)$ 까지 확장한 식을 개발하였다.

시간의존식을 이용하는 모형의 개방경계에서 수치적으로 입사파를 발생시키는 방법으로서 매 시간 계산된 수면변위에 임의의 값을 더해주는 방법이 있다. 이 방법을 사용할 경우 조파선으로 전파해 오는 파는 조파선을 그대로 통과하고 조파선에서 생성된 파는 양쪽으로 퍼져 나가기 때문에 수치적인 문제점을 야기시키지 않는다. 소위 내부조파(internal generation of waves)라 불리는 이 방법은 Larsen 등(1983)이 Boussinesq 식에 적용하였고 또한 Madsen 등(1987)이 Copeland(1985)의 식에 적용하였다. 그들은 질량전송의 관점에서 입사파에 의한 교란파의 전파 속도로서 위상속도를 사용하였다. 최근 이창훈(1997)은 Radder 등의 식에 내부조파의 근본 원리로서 질량전송의 관점을 사용할 경우 문제점을 발견하고 입사파에 의한 교란파의 전파속도는 에너지전송속도라는 사실을 밝히고 이를 수치적으로 증명하였다.

본 연구에서는 불규칙파의 해석이 가능한 Radder 등의 식에 다방향 불규칙파를 내부조파하는 것에 관하여 알아보았다. 우선 이창훈(1997)이 제안한 에너지전송의 관점에서 내부조파기법의 적용성에 관하여 살펴보았고 또한 기하광학의 기법을 사용하여 에너지전송속도를 구하는 것에 대하여 살펴보았다. 다음으로 다방향 불규칙파의 내부조파기법을 수치적으로 적용하였다. 마지막으로 요약과 함께 글을 맺었다.

* 한국해양연구소 연안공학부 선임연구원

** 서울대학교 토목공학과 부교수

2. 에너지전송의 관점에 의한 내부조파기법

Radder 등의 시간의존 원경사방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{\overline{C C_g}}{g} \nabla \tilde{\phi} \right) + \frac{\overline{\omega^2 - k^2 C C_g}}{g} \tilde{\phi} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta \quad (2)$$

여기서 η 는 수면변위이고, $\tilde{\phi}$ 는 평균수면 상에서의 속도포텐셜이고, \overline{C} 와 $\overline{C_g}$ 는 각각 파의 위상속도와 군속도이고, g 는 중력가속도이고, ∇ 은 수평미분연산자이다. 위 식의 변수들 위에 bar를 붙인 것은 그 변수들이 대표 각주파수($\overline{\omega}$)에 대응된다는 것을 의미한다. 식(1), (2)로부터 η 를 소거하고 $\tilde{\phi} = -ig\eta/\omega$ 의 관계를 이용하면 다음과 같은 Smith 등의 식이 나온다.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\overline{C C_g} \nabla \eta) + (\overline{\omega^2 - k^2 C C_g}) \eta = 0 \quad (3)$$

이창훈(1997)의 내부조파원리를 설명하면 다음과 같다. 시간의존식에서 내부조파기법을 사용할 때 입사파의 수면변위는 매 시간간격마다 계산된 수면변위에 더해지고 이때 파의 위상 뿐만 아니라 에너지의 변화가 일어난다. 이 에너지의 변화는 에너지전송식으로 예측이 가능하다. 즉, 입사파에 의한 교란파의 진행속도는 에너지전송속도 C_e 와 같고 조파선을 따라 매 시간간격마다 계산된 수면변위 η 에 부가될 수면변위 η^* 는 다음과 같게 된다.

$$\eta^* = \begin{cases} 2\eta^I \frac{C_e \Delta t}{\Delta x} \cos \theta, & \text{조파선이 } y \text{ 축과 평행} \\ 2\eta^I \frac{C_e \Delta t}{\Delta y} \sin |\theta|, & \text{조파선이 } x \text{ 축과 평행} \end{cases} \quad (4)$$

여기서 η^I 는 입사파의 수면변위이고 θ 는 입사파향이 x 축과 이루는 각이고, Δx , Δy , Δt 는 각각 x , y 축 방향의 격자간격과 시간간격이다. 수심이 일정한 바닥 위를 파가 전파할 때 기하 광학의 기법을 Smith 등의 식에 적용하면 다음과 같은 eikonal 식이 나오고

$$\frac{k}{k} = \sqrt{1 + \frac{\overline{C}}{C_g} \left[\left(\frac{\omega}{\omega} \right)^2 - 1 \right]} \quad (5)$$

또한, 다음과 같은 에너지전송식이 나온다.

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \overline{C_g} \frac{\overline{C}}{C} \cdot \nabla A^2 = 0 \quad (6)$$

여기서 에너지전송속도는 다음과 같다.

$$C_e = \overline{C_g} \frac{\overline{C}}{C} = \overline{C_g} \frac{\overline{\omega}}{\omega} \sqrt{1 + \frac{\overline{C}}{C_g} \left[\left(\frac{\omega}{\omega} \right)^2 - 1 \right]} \quad (7)$$

3. 다방향 불규칙파의 내부조파

계산영역의 경계에 파의 반사를 막기 위해 스폰지층을 두었다. 즉, 식(2)를 다음과 같이 바꾸었다.

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \omega_{\max} D_s \tilde{\phi} \quad (8)$$

식(8)에서 ω_{\max} 는 입사파의 최대 각주파수이고, 에너지감쇠계수 D_s 는 스폰지층의 시작점에서 0이고 스폰지층의 끝점인 영역의 경계에서 1로 기하급수적으로 증가한다.

Radder 등의 식(1), (8)을 시간적으로 차분하는 방법으로 4차의 Adams-Moulton Predictor-Corrector 법을 사용하였고 공간적으로 차분하는 방법으로 3점대칭법을 사용하였다. 계산영역의 경계에는 완전반사조건을 사용하였다.

다방향 불규칙파를 내부조파할 때 각 성분파를 한꺼번에 내부조파하면서 계산영역 내의 파랑장을 수치해석하는 방법을 사용하였다. 수평 2차원의 경우 조파선은 y 축 방향으로 한 개(조파선1) 두고 x 축 방향으로 아래 위에 두 개(각각 조파선2, 조파선3) 두어 3개의 조파선이 z 차 형태를 이루게 하였다. 조파선1에서 매 시간간격마다 부가되는 수면변위는 다음과 같다.

$$\eta^* = \sum_i \sum_j 2A_{i,j} \cos(k_i x \cos \theta_j + k_i y \sin \theta_j - \omega_i t + \varepsilon_{i,j}) \frac{C_{ei} \Delta t}{\Delta x} \cos \theta_j \quad (9)$$

한편 조파선2 또는 조파선3에서 매 시간간격마다 부가되는 수면변위는 다음과 같다.

$$\eta^* = \sum_i \sum_j 2A_{i,j} \cos(k_i x \cos \theta_j + k_i y \sin \theta_j - \omega_i t + \varepsilon_{i,j}) \frac{C_{ei} \Delta t}{\Delta y} \sin |\theta_j| \quad (10)$$

식(9), (10)에서 아랫첨자 i, j 는 각각 성분파의 주파수 및 방향을 나타내고, 각 성분파의 진폭은 $A_{i,j} = \sqrt{2S(f_i) D(\theta_{i,j}; f_i) \Delta f \Delta \theta}$ 이고, $\varepsilon_{i,j}$ 는 주파수 f_i 와 방향 θ_j 에 따라 무작위로 달라지는 위상각이다. 입사파의 주파수 스펙트럼 $S(f)$ 는 천해역에서도 적용될 수 있는 TMA 스펙트럼을 사용하였다. 방향분산함수 $D(\theta; f)$ 는 wrapped 정규함수의 Fourier 급수를 이용하여 나타내었다.

수치실험의 보기로서 다방향 불규칙파가 전파하는 경우를 살펴보았다. 입사파의 조건은 $T_p = 10$ s, $h = 35$ m, $H_s = 4.60$ m, $\alpha = 0.003523$, $\gamma = 20$ 이다. 파의 주 방향(θ_m)은 0° 와 30° 두가지 경우에 대해서 살펴보았고, 각각의 경우에 방향분산변수(σ_m)는 10° 와 30° 의 두가지 경우에 대해서 살펴보았다(표1 참조). 조파시 방향성분은 주 방향 1개와 주 방향의 좌·우로 각각 2개로 모두 5개를 사용하였다. 방향분산함수의 전체 면적을 5개의 똑같은 면적으로 분할하고 각각의 면적에서 대표파향은 분산함수값의 가중평균치로 결정하였다. 따라서, 파의 진폭은 $A_{i,j} = \sqrt{2S(f_i) \Delta f} / \sqrt{5}$ 가 되고 식(9), (10)에서 대표 파향각 θ_j 는 표1에 나타난 값이 된다. 수치계산영역은 $3L_p \times 3L_p$ 의 공간을 두고 좌·우·상·하 경계에 $S = 2.5L_{\max}$ 두께의 스폰지층을 두었고, $\Delta x = \Delta y = 10.18$ m, $\Delta t = 0.105$ s로 두었다.

Table 1: Test conditions of random waves

Case ID	Type	T_p (s)	h (m)	α	γ	θ_m (deg)	σ_m (deg)	θ_j (deg)
M1	Multi-directional	10	35	0.003523	20	0	10	-14, -5, 0, 5, 14
M2	Multi-directional	10	35	0.003523	20	0	30	-42, -16, 0, 16, 42
M3	Multi-directional	10	35	0.003523	20	30	10	16, 25, 30, 35, 44
M4	Multi-directional	10	35	0.003523	20	30	30	-12, 14, 30, 46, 72

시간 및 공간상의 해석가능성 (resolution) 과 수치적인 안정성을 얻기 위하여 입사파의 주파수 영역을 제한하여야 한다. 주파수 스펙트럼의 에너지 밀도가 첨두주파수 에너지 밀도의 5% 이하인 부분을 제외시켜서 입사파의 주파수 영역은 0.086 Hz부터 0.123 Hz 사이가 되었고 이 영역의 에너지는 전체 에너지의 85%를 차지하여 유의파고가 $H_s = 4.24$ m가 되었다. 수치계산 시 사용되는 대표 주파수는 가중평균하여 $\bar{f} = 0.102$ Hz를 취하였다. 불규칙파의 수면변위는 시간간격 $\Delta t = T_p/95 = 0.105$ s로 32,768개의 총 시간 $344.93 T_p$ 의 시계열을 만들었다. 이 시간이 경과한 뒤에는 처음의 시계열을 반복하게 하였다.

조파 시작후 $10 T_p$ 가 경과한 시각에 수치적으로 재현된 수면변위와 이에 대응되는 엄밀해를 그림1에 나타내었다. 모든 경우에 재현된 파의 위상이 엄밀해와 대체로 일치함을 알 수 있다. 단지, 약간의 위상의 차이가 있는데 이는 스폰지층에서의 불완전한 에너지흡수 현상과 조파선상에서 에너지의 불연속점에서의 회절 현상에 기인한다고 판단된다. 이러한 요인들은 계산영역에 파의 에너지를 증가시키는 현상도 야기시켰다.

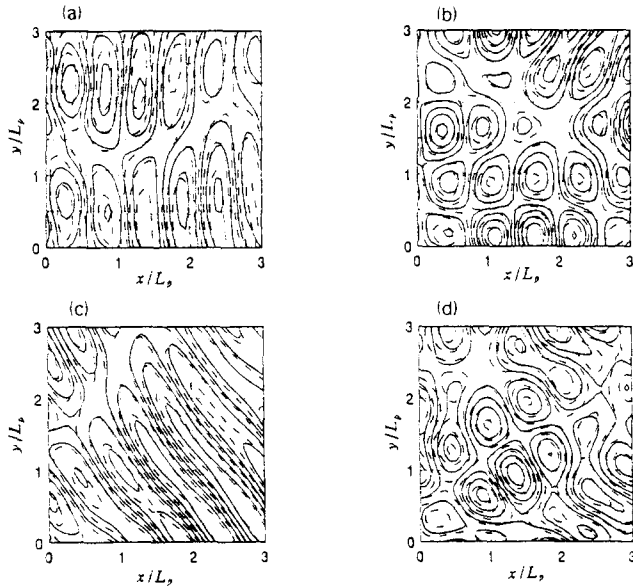


Fig.1 Contour of water surface elevations of multi-directional random waves at $t = 10T_p$; solid line = model solution, dashed line = exact solution. (a) case M1, (b) case M2, (c) case M3, (d) case M4

$(x, y) = (L_p, 1.5L_p)$ 지점에서 파향스펙트럼을 계산하기 위하여 수면변위 η 와 x, y 축 방향의 수면구배 $\partial\eta/\partial x, \partial\eta/\partial y$ 의 시계열을 측정하였다. 조파 시작후 $10 T_p$ 가 경과한 시각부

터 $347.81 T_p$ 까지 $\Delta t = T_p/24.25$ 의 시간간격으로 모두 8,192개 측정하였다. 수면구배는 3점 대칭법으로 차분하여 구했다. 파향 스펙트럼을 분석하는 방법으로 최대 Entropy 방법(Kobune 등, 1986)을 사용하였다. 해석시 비선형식이 생기는데 이를 푸는 방법으로서 Newton-Raphson 방법을 사용하였고 해의 초기추정치로서 Kim 등(1994)이 Taylor 급수전개로 구한 근사해를 썼다. 해가 수렴하지 않는 경우 인접한 주파수에서의 해로 선형보간하였다. 그림2에 측정치의 파향 스펙트럼과 목표 파향 스펙트럼을 비교하였다. 모든 경우에 파의 주 방향은 제대로 재현되었다. 측정된 스펙트럼의 침두값은 $\sigma_m = 10^\circ$ 일 때 목표치와 비슷하나 $\theta_m = 30^\circ$ 일 때 목표치에 비하여 크게 나왔다. 이는 스폰지층에서의 불완전한 에너지흡수로 인하여 방향분산의 정도가 클수록 주 방향을 중심으로 파의 반사현상이 두드러지기 때문에 발생한 것으로 판단된다.

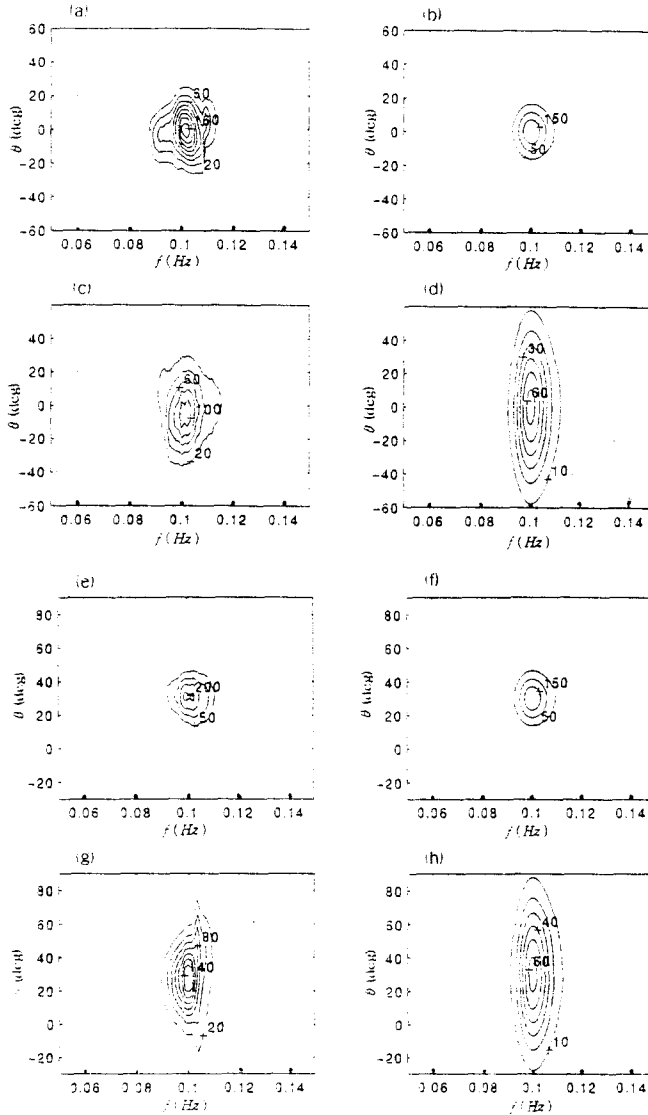


Fig.2 Contour of directional spectra of multi-directional random waves. (a) case M1, simulated data, (b) case M1, target, (c) case M2, simulated data, (d) case M2, target, (e) case M3, simulated data, (f) case M3, target, (g) case M4, simulated data, (h) case M4, target

4. 결론

본 연구에서 Radder 등의 시간의존 원경사방정식 모형의 개방경계에서 다방향 불규칙파를 수치적으로 조파시키는 기법에 관하여 고찰하였다. 수치적인 내부조파기법을 사용할 때 입사파는 기존의 파랑과 교란을 일으키고 이 교란파는 에너지전송속도로 전파된다는 에너지전송의 관점을 사용하였다. 기하광학의 기법을 사용하여 모형식의 에너지전송속도를 구하였다.

다방향 불규칙파의 내부조파기법을 적용하였다. 그 결과 입사파의 에너지와 위상을 대체적으로 잘 재현하였으나 스폰지층에서 입사파의 에너지를 완전히 흡수하지 못하고 약간의 반사가 발생하여 계산영역에서 요구되는 에너지보다 약간 크게 나타났고 파의 위상도 약간 왜곡되게 나타났다. 또한, 조파선 사이의 경계점과 스폰지층에 있는 조파선상의 지점과 같이 에너지의 불연속이 발생하는 지점에서 파의 회절이 발생하고 이것이 계산영역 전체에 정확도를 떨어뜨렸다. 방향 분산의 정도가 클수록 재현된 파의 파향 스펙트럼이 목표 스펙트럼과 차이가 커짐을 알 수 있었다. 이는 스폰지층에서의 불완전한 에너지흡수에 기인된다고 판단된다.

5. 참고문헌

1. 이창훈. (1997). "시간의존 원경사방정식에서의 내부조파기법." 대한토목학회 논문집 (투고).
2. Copeland, G.J.M. (1985). "A practical alternative to the mild-slope wave equation." *Coast. Eng.*, 9, pp.125-149.
3. Kim, T., Lin, L. and Wang, H. (1994). "Comparisons of directional wave analysis methods." *Proc. 24th Int. Conf. Coast. Eng.*, ASCE, pp.340-355.
4. Kobune, K. and Hashimoto, N. (1986). "Estimation of directional spectra from the maximum entropy principle." *Proc. 5th Int. Offshore Mech. and Arctic Eng. Symp.*, ASME, Vol.1, pp.80-85.
5. Kubo, Y., Kotake, Y., Isobe, M., and Watanabe, A. (1992). "Time-dependent mild slope equation for random waves." *Proc. 23rd Int. Conf. Coast. Eng.*, ASCE, pp.419-431.
6. Larsen, J. and Dancy, H. (1983). "Open boundaries in short wave simulations - a new approach." *Coast. Eng.*, 7, pp.285-297.
7. Lee, C. (1994). "A study of time-dependent mild-slope equations." PhD Dissertation, Univ. of Delaware.
8. Lee, C.H. and Kirby, J.T. (1994). "Analytical comparison of time-dependent mild-slope equations." *J. Korean Soc. Coast. Ocean Engrs.*, 6, pp.389-396.
9. Madsen, P.A. and Larsen, J. (1987). "An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation." *Coast. Eng.*, 7, pp.329-351.
10. Radder, A.C. and Dingemans, M.W. (1985). "Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves." *Wave Motion*, 7, pp.473-485.
11. Smith, R. and Sprinks, T. (1975). "Scattering of surface waves by a conical island." *J. Fluid Mech.*, 72, pp.373-384.