

연직 2차원 포화-비포화 흐름의 수치해법 연구

A Numerical Study of Vertical 2-D Saturated-Unsaturated Flow

○김상준*, 윤성용**, 박재현***, 선우중호****

1. 序論

다공성 매체에서 유체를 움직이는 주된 힘은 그 포화도에 따른 중력과 모세관 흡입력의 작용으로 볼 수 있으며 이러한 포화-비포화 흐름은 Darcy 식과 연속방정식의 결합으로 이루어진 Richards 식으로 나타내어진다. Richards 식에 포함된 비포화 투수계수는 흙의 함수량 혹은 모세관 압력수두의 함수이며 흙이 포화가 되면 포화투수계수의 값을 갖고, 따라서 Richards 식은 포화-비포화 영역을 모두 한꺼번에 표현할 수 있는 지하흐름 방정식이라 할 수 있다.

포화-비포화 흐름의 거동을 규명하기 위해서는 Richards 식의 해를 구하는 것이 선결과제이다. 그러나 비포화 투수계수가 종속변수인 함수량, 혹은 모세관 압력수두 자체의 함수가 되므로 일반적인 해석해(Warrick et al., 1990)가 거의 존재하지 않으며 주로 수치해석적인 방법에 의하여 그 해를 구하게 된다. 본연구에서는 연직 2차원 영역에서, 일정수두 혹은 일정흐름을 경계조건이 주어지는 Richards 식의 해를 구할 수 있는 수치해석방법을 연구하여 지하 흐름을 형태를 구현할 수 있는 모형을 개발하고자 한다.

2. 支配方程式 및 有限差分解法

흙 속의 포화-비포화 영역에서, 연속방정식을 Darcy 식과 결합하면 다음과 같은 Richards 식을 얻는다(Freeze, 1978 ; Govindaraju & Kavvas, 1991).

$$K(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \{ K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \} + W = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

* 경원대학교 토목공학과 부교수

** 안산공업전문대학 토목과 전임강사

*** 서울대학교 토목공학과 박사과정 수료

**** 서울대학교 총장

여기서,

- t : time
- x, z : horizontal and vertical coordinates
- h : pressure head (\pm)
- K : hydraulic conductivity
- C : soil capacity (= $d\theta/d\psi$, θ =moisture content)
- W : source-sink

윗 식에서 압력수두 h는, 지하수면 아래의 포화 흐름의 경우는 양의 값을 갖고 지하수면 위의 비포화 흐름에서는 모세관 흡입현상에 의한 음의 값을 갖는다. 그리고 K는, 포화 흐름에 있어서는 常數이나 비포화 흐름의 경우에는 압력수두 h의 함수가 된다.

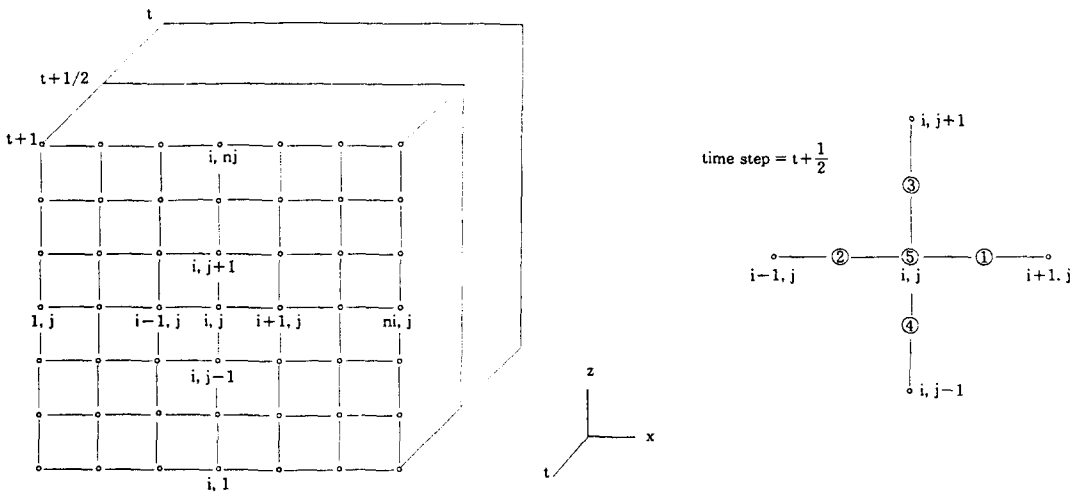


Fig.1 Grid Points for the Solution of Richards Equation.

Fig.1의 格子를 고려하고 Crank-Nicolson 방법을 적용하면 (1)의 差分式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\{ K(h_1) \cdot (h_{i+1,j}^{t+1} + h_{i+1,j}^t - h_{i,j}^{t+1} - h_{i,j}^t) - K(h_2) \cdot (h_{i,j}^{t+1} + h_{i,j}^t - h_{i-1,j}^{t+1} - h_{i-1,j}^t) \}}{2\Delta x^2} \\
 & + \frac{\{ K(h_3) \cdot (h_{i,j+1}^{t+1} + h_{i,j+1}^t - h_{i,j}^{t+1} - h_{i,j}^t) - K(h_4) \cdot (h_{i,j}^{t+1} + h_{i,j}^t - h_{i,j-1}^{t+1} - h_{i,j-1}^t) \}}{2\Delta z^2} \\
 & + \frac{\{ K(h_3) - K(h_4) \}}{\Delta z} + W \\
 & = C(h_5) \cdot \frac{(h_{i,j}^{t+1} + h_{i,j}^t)}{\Delta t} \quad (2)
 \end{aligned}$$

식(2)를 t+1 단계의 格子點에 적용하여 나타나는 선형 연립 방정식을 行列의 형태로 표시하면 係數行列은 sparse 行列이 된다. 그리고 이러한 방정식의 解를 구하는 방법으로는 보통 直接解法보다 프로그래밍이 쉽고 계산 속도가 빠른 反復解法을 사용하게 된다. 反復解法은 點反復解法과 線反復解法으로 나누어 질 수 있는데, 종속 변수가 어느 한 방향으로 빠르게 변화하는 경우에는 그 방향으로 line Gauss-Siedal iteration method를 사용하는 것이 효과적이다(Hoffmann,1989). 本 논문에서는 鉛直 방향으로 line Gauss-Siedal iteration method를 사용하였으며, 이 경우 t+1 단계에서 연직 방향 未知數에 대해 다음과 같은 三線對角行列을 係數行列로 갖는 연립 방정식의 解를 반복적으로 구한다.

$$A_j h_{i,j-1}^{t+1,k+1} + B_j h_{i,j}^{t+1,k+1} + C_j h_{i,j+1}^{t+1,k+1} = D_j \quad (3)$$

여기서,

$$A_j = \frac{1}{2\Delta z^2} K(h_4)$$

$$B_j = \frac{1}{2\Delta x^2} \{ -K(h_1) - K(h_2) \} + \frac{1}{2\Delta z^2} \{ -K(h_3) - K(h_4) \} - \frac{C(h_5)}{\Delta t}$$

$$C_j = \frac{1}{2\Delta z^2} K(h_3)$$

$$D_j = - \frac{1}{2\Delta x^2} \{ K(h_1)(h_{i+1,j}^{t+1,k} + h_{i+1,j}^t - h_{i,j}^t) - K(h_2)(h_{i,j}^t - h_{i-1,j}^{t+1,k+1} - h_{i-1,j}^t) \} \\ - \frac{1}{2\Delta z^2} \{ K(h_3)(h_{i,j+1}^t - h_{i,j}^t) - K(h_4)(h_{i,j}^t - h_{i,j-1}^t) \} \\ - \frac{1}{\Delta z} \{ K(h_3) - K(h_4) \} - \frac{C(h_5)h_{i,j}^t}{\Delta t} - W$$

초기조건으로는 임의의 含水量 分布가 가능하다. 그러나 模擬를 위해 사용되는 초기 조건은 보통, 일정함수량 조건인 乾燥條件이나 飽和條件, 靜水頭條件, 혹은 定常流條件 등을 생각할 수 있다. 境界조건은 一定水頭, 一定흐름率, 및 水頭依存-흐름率 등으로 구분할 수 있는 바, 一定흐름率 조건은 境界면의 垂直 방향으로의 유속 q_n 이 常數로 고정되어 境界면에서 式 $q_n = -K_n \cdot \partial\phi/\partial n$ (K_n : 境界면과 垂直 방향으로의 투수계수)이 만족되어야 하는 조건이며(不透水條件은 이 조건의 특수한 경우이다), 水頭依存-흐름率 조건에서는 q_n 이 함수로 주어진다.

3. 模型의 모의결과

Fig.2는 鉛直직사각형 영역에서, 초기조건을 건조한 상태로 하고, 흙 표면 일부분에 一定흐름率 境界조건, 나머지 모든 境界면은 不透水 조건으로 하여 상당한 시간이 흐른 뒤에 含水量 및 總水頭의 분포를 나타내고 있다. 그리고 Fig.3은 모든 境界面을 불투수 境界로 하고 영역內的 한점에 流源(source)을 주었을 경우이다. 여기서, 사용된 흙은 모두 Yolo light clay(이 흙의 특성함수는 Warrick(1990)을 참조)이며, $\Delta x = 5$ cm, $\Delta y = 5$ cm, $\Delta t = 500$ sec

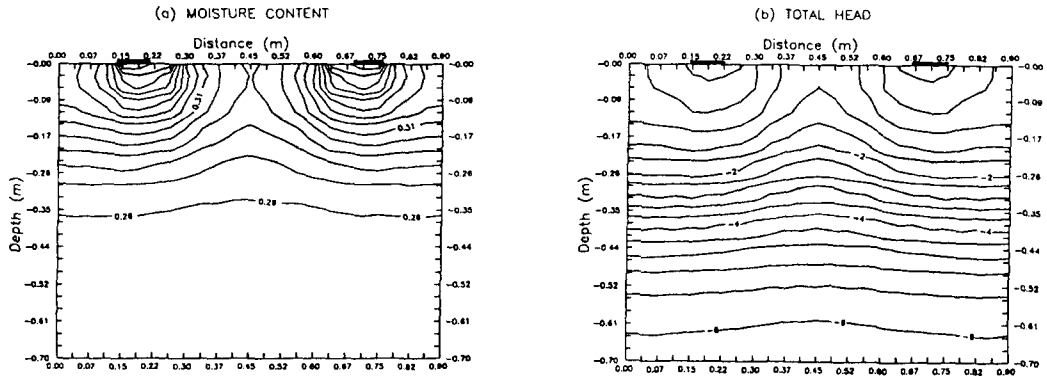


Fig. 2 Model Simulation (Specified Flux = 0.21 mm/hr, $t = 1 \times 10^6$ sec).
 (a) Moisture Content; (b) Total Head in Meters.

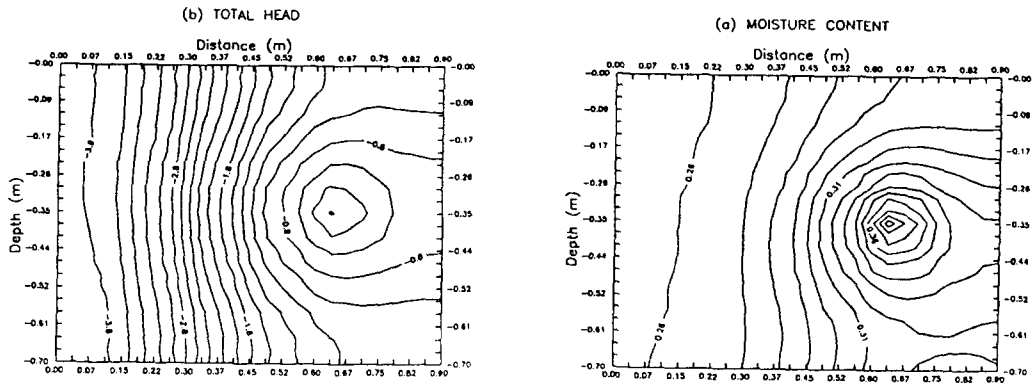


Fig. 3 Model Simulation (Source = $5 \times 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$, $t = 2 \times 10^6$ sec).
 (a) Moisture Content; (b) Total Head in Meters.

이다. 그림에서 젖음 상태가 확산되는 현상 볼 수 있으며, 수량의 구배가 급격히 나타나는 濕潤前線이 나타나 있다.

각 그림에서, 경계 조건을 一定흐름率 및 不透水로 하고 流源의 量도 주어진 것이므로 정확한 質量保存確認(Istok,1989)이 가능하다. 一定흐름率 경계조건인 Fig.2의 경우, 유입량에 대한 수량 증가분의 비는 0.994이며, source가 주어진 Fig.3의 경우는 1.01로서 전체적으로 1 % 以內의 誤差를 보이고 있다.

4. 결론 및 요약

연직 2차원 영역을 갖는 다공질매체에서 Richards식의 해를 구하기 위한 수치모형이 개발되었다.

本연구의 모형은 Crank-Nicolson 方法에 의한 유한 차분식의 구성과 Line Gauss-Siedal 反復解法, 그리고 媒介變數 $K(\psi)$, $C(\psi)$ 의 線形化를 그 특징으로 할 수 있으며, 質量保存確認에 의한 검증 결과는 약 1 %內의 오차를 보였다.

모형의 타당성을 더욱 확실하게 하기 위해서는 FEM에 의한 해석결과와의 비교나 실험 자료와의 비교 등 추가적인 검증이 필요할 것으로 생각된다.

5. 參考文獻

Calver, A. and P. Binning, "On Modelling hillslope water flow paths and travel times", Journal of Hydrology, 121, pp335-344, 1990.

Freeze, R.A., "Mathematical models of hillslope hydrology", Chapter 6 in Hillslope hydrology, M.J. Kirkdy (ed.), Wiley, 1978.

Govindaraju, R.S. and M. Levent Kavvas, "Dynamics of moving boundary overland flows over infiltrating surfaces at hillslopes", WRR 27(8), pp.1885-1898, 1991.

Hillman, G.R. and J.P. Verschuren, "Simulation of the Effects of Forest Cover, and its Removal on Subsurface Water," Water Resources Research, Vol.24, No.2, pp.305-314, 1988.

Hoffmann, K. A., Computational Fluid Dynamics for Engineers, Engr. education system, 1989.

Istok, J.D., Groundwater Modeling by the Finite Element Method, American Geophysical Union, 1989.

Nieber, J. L. and M. F. Walter, "Two-Dimensional Soil Moisture Flow in a Sloping Rectangular Region : Experimental and Numerical Studies," Water Resources Research, Vol.17, No.6, pp.1722-1730, 1981.

Reeder, J.W., D.L. Freyberg, J.B. Franzini, and I. Remson, "Infiltration under rapidly varying surface water depths", Water Resources Research, Vol.16, No.1, pp.97-104, 1980.

Skaggs, R.W. and R. Khaleel, "Infiltration," Chapter 4 in Hydrologic Modeling of Small Watersheds, edited by C.T. Haan, H.P. Johnson, and D.L. Brakensiek, ASAE, 1982.

Warrick, P., Lomen, D.O., and A. Islas, "An Analytical Solution to Richards' Equation for a Draining Soil Profile," Water Resources Research, Vol.26, No.2, pp.253-258, 1990.