

이동하는 동적하중을 받는 탄성보의 진동해석

○윤 일 성*, 송 오 섭**

Vibration Analysis of Elastic Beams Subjected To Moving Load

○ Il- Soung Yoon* , Oh- Seop Song**

ABSTRACT

The linear dynamic response of a simply supported uniform beam under a moving load of constant magnitude is investigated. When the ratio of the moving weight and the structure weight is small, moving object is considered as a concentrated or distributed moving force, that is large external loading can be considered as a concentrated or distributed moving masses. Result from the numerical solutions of the differential equations of motion are shown graphically. Moreover, when considering the maximum deflection for the mid-span of the beam, the critical speeds of the moving load have been evaluated.

1. 서론

탄성 구조물의 정해진 위치에 하중이 정적 또는 동적(harmonic or non-harmonic)으로 작용하는 경우의 응답문제는 오랜동안 많은 연구자들의 연구 주제가 되어져 왔다. 그러나 하중이 탄성 구조물 위를 공간적으로 이동하면서 작용하는 경우의 동적응답 문제는 그 중요성에 비추어 연구가 상대적으로 미진한 분야이다.

이동하중을 받는 보 구조물의 동적응답에 관한 연구는 다음과 같은 실제응용 분야에서 필요성이 제기되어져왔다. 즉, 물체를 매달고 이동하는 trolley를 갖는 천정크레인의 동적설계, 차량, 열차, 또는 고속철도가 주행하는 교량이나 궤도의 진동문제와 회전하는 피가공물 위를 공구가 이동하면서 절삭가공을 행하는 경우 등이다. 위의 어느 경우에도 이동하중을 받는 탄성보 구조물의 동적처짐이나

* 충남대학교 기계공학과 대학원

** 충남대학교 기계공학과

응력은 정적하중에 의한 것보다 매우 큰 값을 가질 수 있으며 이에 따른 구조물의 피로 및 파괴 현상이 쉽게 나타날 수 있다.

본 연구를 통하여 고속으로 이동하는 수송수단에 의 한 각종 교량 및 궤도, 천정 크레인 구조물등에 작용하는 동적하중을 여러 가지 형태로 모델링하여 그에 따른 영향을 고려하여 실제의 경우에 적합한 형태의 동적응답을 구하고자 한다.

이동하는 물체의 자체질량에 의한 관성효과 및 이동하는 물체자체의 강성이 무시될 수 있는 경우는 집중 또는 분포 하중(force)이 이동하는 경우로 모델링할 수 있으며, 이동하는 물체의 자체질량에 의한 관성효과는 고려하나 자체강성은 무시할 수 있는 경우는 집중 또는 분포질량(mass)이 이동하는 경우로 이상화하였다. 또한, 이동물체의 자체강성 특성과 자체댐핑특성까지 고려한 모델에 관해서도 고찰하였다.

탄성보구조물의 경계조건은 양단단순지지의 경우로 하였으며 Euler보와 전단변형과 회전관성을 고려한 Timoshenko보로 각각 모델링하였으며 여러

이동하중의 형태에 의한 응답특성 변화에 대하여 연구하였다.

2. 운동방정식

2.1. 가정

- 1) 보의 단면은 균일하다.
- 2) 동적하중은 등속도로 이동하며, 보와 항상 접촉하고 있다.
- 3) 탄성보의 경계조건은 양단 단순지지된 경우를 고찰하였다.

2.2. 운동방정식

2.2.1. Euler-Bernoulli 보

$$EI \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} = f(z, t) \quad (1)$$

초기조건 :

$$v(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial v(z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

경계조건 :

$$z = 0, L \text{에서 } v(z, t) = 0 \quad (3 a)$$

$$EI \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (3 b)$$

2.2.2. Timoshenko 보

$$\rho A \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} - KAG \left[\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta_x(z, t)}{\partial z} \right] = f(z, t)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta_x(z, t)}{\partial z^2} + KAG \left[\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} - \theta_x \right] - \rho I \left[\frac{\partial^2 \theta_x(z, t)}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (4 a, b)$$

초기조건 :

$$v(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial v(z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (5 a)$$

$$\theta_x(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_x(z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (5 b)$$

경계조건 :

$$z = 0, L \text{에서 } v(z, t) = 0 \quad (6 a)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta_x(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (6 b)$$

2.3. 동적하중 model

1) 집중하중

$$f(z, t) = f \delta(z - Vt) \quad (7)$$

여기에서 δ 는 Dirac delta function 이며 V 는 하중의 이동속도이다.

2) 분포하중

$$f(z, t) = \frac{q}{\epsilon} [H(z - Vt) - H(z - Vt - \epsilon)] \quad (8)$$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

여기에서 H 는 Heavisde unit function 이며 ϵ 은 하중의 분포영역이다. q 는 단위길이당 분포하중의 크기이다.

3) 집중질량

$$f(z, t) = Mg \delta(z - Vt) \left[1 - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(z, t) \right] \quad (9)$$

4) 분포질량

$$f(z, t) = \frac{1}{\epsilon} Mg [H(z - Vt) - H(z - Vt - \epsilon)] \left[1 - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(z, t) \right] \quad (10)$$

3. 이동하중에 의한 동적응답

3.1. 직교성(Orthogonality) 유도

r번째와 s번째의 고유진동수 (ω_r, ω_s)와 모우드 형상 ($v_r, v_s, \theta_{xr}, \theta_{xs}$)은 자유진동에 관한 다음의 운동 방정식을 만족시킨다.

i) Euler보

$$\begin{cases} (EIv_r'')'' - m\omega_r^2 v_r = 0 \\ (EIv_s'')'' - m\omega_s^2 v_s = 0 \end{cases} \quad (11 \text{ a,b})$$

식(11 a)에 v_s 를 곱하고 식 (11 b)에 v_r 를 곱한 후 축방향의 길이 L에 대하여 적분을 한 후 적절히 합하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^L (mv_r v_s) dz = 0 \quad (r \neq s) \quad (12)$$

ii) Timoshenko보

$$\begin{cases} KAG(v_r'' - \theta_{xr}') + m\omega_r^2 v_r = 0 \\ KAG(v_s'' - \theta_{xs}') + m\omega_s^2 v_s = 0 \end{cases} \quad (13 \text{ a,b})$$

$$\begin{cases} EI\theta_{xr}'' + KAG(v_r' - \theta_{xr}) + J_o\omega_r^2 \theta_{xr} = 0 \\ EI\theta_{xs}'' + KAG(v_s' - \theta_{xs}) + J_o\omega_s^2 \theta_{sr} = 0 \end{cases} \quad (14 \text{ a,b})$$

식(13 a), (14 a)에 v_s, θ_{xs} 를 각각 곱하고 식 (13 b), (14 b)에 v_r, θ_{xr} 를 각각 곱한 후 축방향의 길이 L에 대하여 적분을 한 후 적절히 합하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^L (mv_r v_s + J_o \theta_{xr} \theta_{xs}) dz = 0 \quad (r \neq s) \quad (15)$$

위의 식(15)에서 $J_o = \rho I$ 이다.

3.2. 집중 또는 분포하중에 의한 응답

Non-harmonic 이동하중에 의한 동적응답은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(z, t) = \sum_{r=0}^N [v_r(z), \theta_{xr}(z)] q_r(t) \quad (16)$$

위 식에 $v_r(z)$ 및 $\theta_{xr}(z)$ 는 mode shapes으로 단순 지지보의 경계조건을 만족해야 하므로 다음과 같다.

i) Euler보

$$v_r(z) = \text{Sin}\left(\frac{r\pi z}{L}\right) \quad (17)$$

ii) Timoshenko보

$$v_r(z) = \text{Sin}\left(\frac{r\pi z}{L}\right) \quad (18 \text{ a})$$

$$\theta_{xr}(z) = \text{Cos}\left(\frac{r\pi z}{L}\right) \quad (18 \text{ b})$$

식(16)의 가정된 해와 식(15)에서 주어진 직교성 (orthogonality)을 이용하여 이동하중이 작용할 때의 modal coordinates를 다음식을 통하여 구한다.

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{\int_0^L v_r(z) f(z, t) dz}{\int_0^L [m v_r^2(z) + J_o \theta_{xr}^2(z)] dz} \quad (19)$$

식(19)에서 구한 $q_r(t)$ 를 식 (16)에 대입하면 동적 응답을 구할 수 있다.

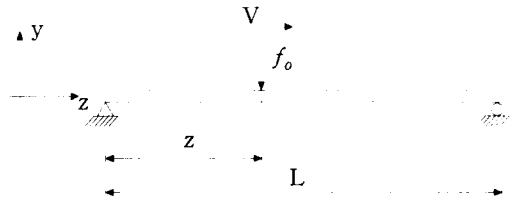


Fig.1

3.3. 집중 또는 분포질량에 의한 응답

이동 물체의 관성을 고려하여 이동질량으로 모델링하는 경우이다.

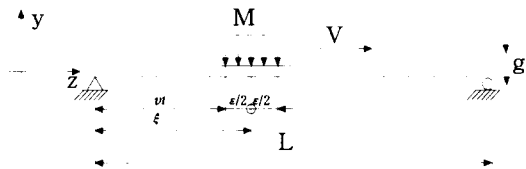


Fig.2

식(16)의 가정된 해와 식(15)에서 주어진 직교성 (orthogonality)을 이용하여 이동질량이 작용할 때의 modal coordinates를 다음식을 통하여 구한다.

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{N_r}{D} \quad (20)$$

여기에서 N_r , D 는 다음과 같다.

i) 집중질량

$$N_r = \left[\int_0^L v_r M g dz - \int_0^L M \sum_{k=0}^N (v_k \ddot{q}_k + 2V v_k' \dot{q}_k + V^2 v_k'' q_k) \right] \delta(z - Vt) dz \quad (21)$$

$$D = \int_0^L (m v_r^2 + I_o \theta_r^2) dz \quad (22)$$

ii) 분포질량

$$N_r = \left[\int_0^L v_r M g dz - \int_0^L M \sum_{k=0}^N (v_k \ddot{q}_k + 2V v_k' \dot{q}_k + V^2 v_k'' q_k) \right] [H(z - Vt) - H(z - Vt - \varepsilon)] dz \quad (23)$$

$$D = \varepsilon \int_0^L (m v_r^2 + I_o \theta_r^2) dz \quad (24)$$

식(20)을 정리하면 다음과 같다.

$$M \ddot{q}_r + C \dot{q}_r + K q_r = F, \quad (25)$$

State vector를 사용하여 식(25)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} q_r(t) \\ \dot{q}_r(t) \end{pmatrix} \quad (26 a)$$

$$\dot{\underline{X}}(t) = A(t) \underline{X}(t) + \underline{I}(t) \quad (26 b)$$

여기에서 행렬 $A(t)$ 의 요소들은 시간에 따라 변화한다. 식(26 b)를 Euler formula를 이용하여 풀면 $q_r(t)$ 를 구할 수 있다.

3.4. 이동하는 One-Foot System 에 의한 응답

운동방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} = f(z, t) \quad (27 a)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 (\dot{y}_1 - \dot{v}) + k_1 (y_1 - v) = 0 \quad (27 b)$$

$$f(z, t) = m_1 (g - \ddot{y}) \delta(z - Vt) \quad (27 c)$$

여기에서

c_1 : damping of one-foot moving system

k_1 : stiffness of one-foot moving system

식(27 c)를 식(27 a)에 대입한 식과 식(27 b)을 연립한 후 state vector와 state equation을 다음과 같이 정의한다.

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} q_r(t) \\ \dot{q}_r(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \quad (28 a)$$

$$\dot{\underline{X}}(t) = A(t) \underline{X}(t) + \underline{I}(t) \quad (28 b)$$

식(28 b)를 Euler formula를 이용하여 풀면 $q_r(t)$ 및 $y_1(t)$ 를 구할 수 있다.

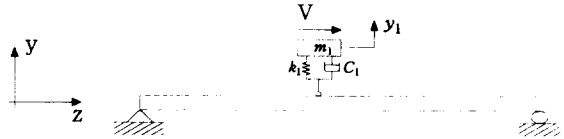


Fig.3

4. 예제 및 결과

본 예제에서 해석한 구조물의 물성치는 다음과 같다.

$$E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$G = 7.7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$I = 1.04 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$M = 70 \text{ Kg}$$

$$m = 7.04 \text{ kg/m}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

Fig.4, Fig.5, Fig7, Fig.9, Fig10에서 (A)는 식(21)과 (23)에서 밀출된 모든항을 고려한 경우를 나타내고, (B)는 식(21),(23)의 밀출된 부분의 첫번째항만을 고려한 경우를 나타낸다. Fig.4에서 Euler 보에서의 집중하중과 집중질량 (A),(B)의 경우의 mid-span에서의 시간에 따른 변위를 나타내고 있다. 관성효과를 고려한 집중질량으로 모델링했을 때 (B)경우의 mid-span의 최대변위가 집중하중으로 모델링한 경우보다 크다. Fig.5에서는 분포하중과 분포질량에 의한 변위를 비교하고 있다. 이 때

에도 (B)경우의 mid-span의 변위가 분포하중으로 모델링 한 경우보다 크다는 것을 알 수 있다.

Fig.6 과 Fig.7은 ϵ 의 변화에 따른 mid-span의 변위를 나타낸 것으로 ϵ 값이 작아지면 집중하중과 집중질량의 경우에 접근하며, ϵ 값이 커지면 시간에 대한 변위의 기울기가 커지게 된다.

Fig.8은 one-foot system에 의한 변위일때로 damping coefficient(c_1)값이 커지면 시간에 따른 변위의 기울기가 작아지게 된다.

Fig.9는 속도의 변화에 따른 mid-span의 변위를 나타내고 있다. (A)경우의 임계속도(V_{cr})는 약 84 km/h 이고, (B)의 경우는 약 120 km/h이며 이동속도가 큰 범위에서의 mid-span의 변위 예측에 커다란 차이를 보이고 있다.

Fig.10은 집중질량 과 집중하중으로 모델링한 경우의 속도의 변화에 따른 mid-span의 변위를 나타낸 것으로서, 집중질량의 경우 임계속도는 약 84 km/h 이고, 집중하중의 경우는 약 120/km이다.

집중하중으로 모델링한 경우 Euler보와 Timoshenko보의 변위를 비교하였으나 두경우의 차이는 거의 없었다. 그러나 전단강성이 작은 재료로 이루어진 구조물의 경우, 변위예측에 있어서의 차이가 예상된다.

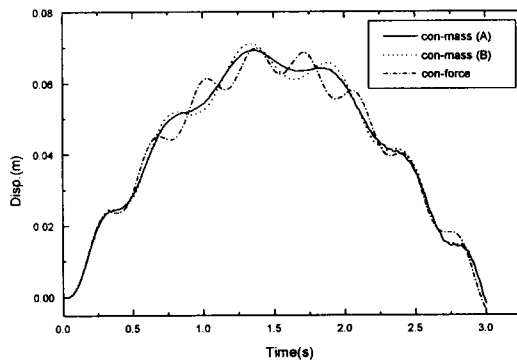


Fig.4. Variation of deflection at the middle of the beam vs. time for concentrated force and mass cases ($V=12$ km/h)

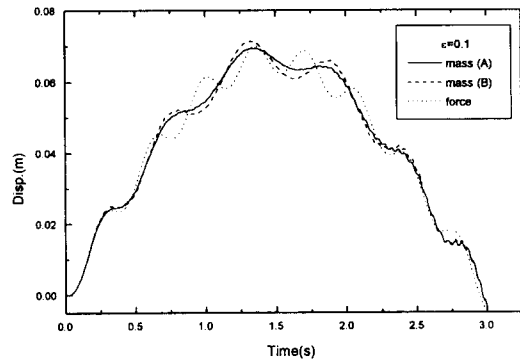


Fig.5. Variation of deflection at the middle of the beam vs. time for distributed force and mass cases ($V=12$ km/h)

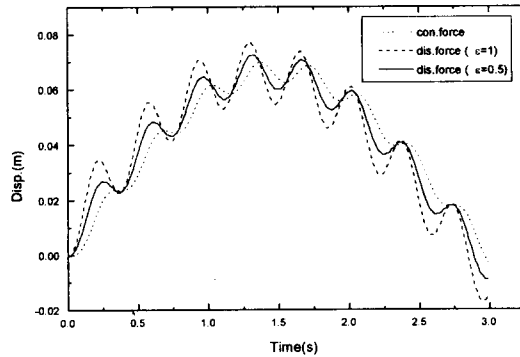


Fig.6. Variation of deflection at the middle of the beam vs. time for distributed force cases ($V=12$ km/h)

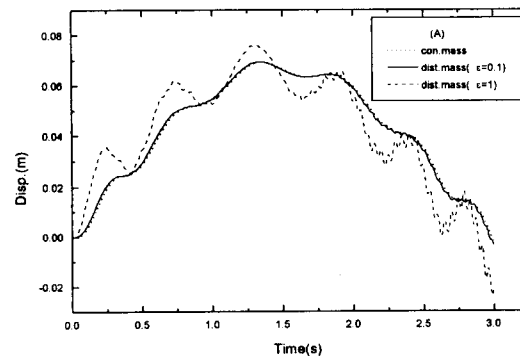


Fig.7. Variation of deflection at the middle of the beam vs. time for distributed mass cases ($V=12$ km/h)

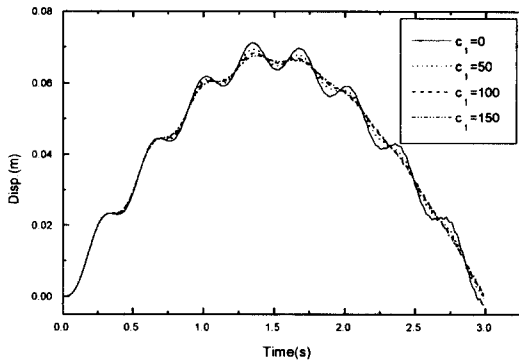


Fig.8. Variation of deflection at the middle of the beam vs. time for one-foot dynamic system. ($v=12$ km/h)

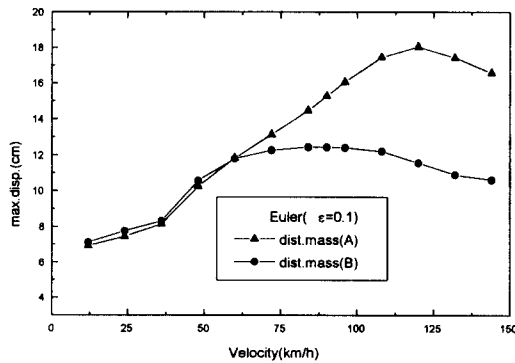


Fig.9. Maximum deflection at the middle of the beam vs. velocity for distributed mass cases

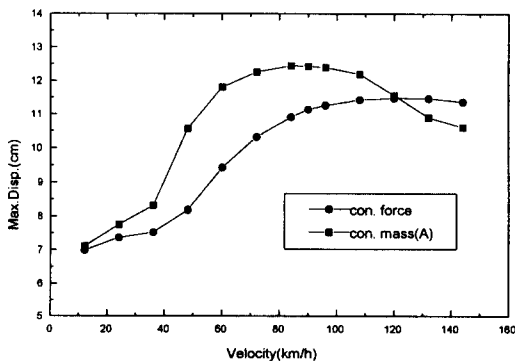


Fig.10. Maximum deflection at the middle of the beam vs. velocity for concentrated force and mass cases

5. 참고문헌

1. S. Timoshenko et al, *Vibration problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley, 1974.
2. E. Esmailzadeh and M. Ghorashi, *Vibration analysis of beams traversed by moving masses*, Proc. of Int. Conf. on Engr. Application of Mechanics, Iran, 1992.
3. E. Esmailzadeh and M. Ghorashi, *Vibration analysis of beams traversed by uniform partially distributed moving masses*, Journal of Sound and Vibration, 184(1), 9-17, 1995.
4. M. M. Stanicic and J. C. Hardin, *On the response of beams to an arbitrary number of moving masses*, J. of Franklin Inst., Vol. 287, 115-123, 1969.
5. Y. H. Lin and M. W. Trethewey, *Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads*, Journal of Sound and Vibration, 136(2), 323-342, 1990.
6. R. Katz et al, *The dynamic response of a rotating shaft subjected to a moving load*, Journal of Sound and Vibration, Vol 122(1), 131-148, 1988.
7. O. Song and L. Librescu, *Bending vibration of cantilevered structures modelled as thin-walled beams and subjected to time-dependent excitation*, Journal of the Acoustics Society of America, Vol 98, June, 1995.
8. Y. Cai, S. S. Chen, D. M. Rote and H. T. Coffey, *Vehicle/Guideway interaction for high speed vehicles on a flexible guideway*, Journal of Sound and Vibration, Vol 175(5), 625-646, 1994.