

종동력을 받는 원통형 셸의 동적 안정성에 관한 연구

⁰김 현 순* , 김 지 환**

Dynamic Stability of Cylindrical Shells Subjected to Follower Forces

Hyun-Soon Kim* and Ji-Hwan Kim**

ABSTRACT

Dynamic stability of cylindrical shells subjected to follower forces is analyzed in this paper. Motion of shells is formulated in curvilinear coordinates that is consistent with assumptions made in the Timoshenko beam and the Mindlin plate. Using the finite element method, the induced equations are reduced to an equation with finite degrees of freedom. The 9-node Lagrangian element is used, and reduced integration is used to avoid shear and membrane locking. The effects of thickness ratio on the dynamic stability of cylindrical shells are studied.

1. 서론

구조물에 일정한 크기의 하중이 작용할 때 발생할 수 있는 불안정성에는 두 가지 종류가 있다. 먼저 구조물에 보존력이 작용하는 경우 어느 한 고유치가 0이 되면서 발생하는 정적 불안정성이 있고, 비보존력이 작용하는 경우 두 고유치가 일치하게 되어 발생하는 동적 불안정성이 있다. 동적 불안정성을 생기게 하는 비보존력으로는 구조물의

변형에 따라 작용방향이 변하는 종동력이 있다. 주로 로켓이나 우주구조물의 추력으로 사용되는 힘이다.

종동력이 작용하는 보나 판의 동적 안정성에 관한 연구를 살펴보면 다음과 같다. T. R. Beal¹은 Galerkin 방법을 사용하여 미사일에 제어가 가능한 일정한 크기의 종동력 또는 시간에 따라 크기가 변하는 종동력이 작용하는 경우의 동적 안정성에 대하여 살펴보았다. 여기서 임계 하중 값은 보의 굽힘 모드의 가장 작은 두 고유치가 만나는 곳에서 결정됨을 보이고 있다. Y. P. Park²는 미사일을 양단 자유경계 조건을 갖는 Euler-Bernoulli 보 이론에 따라 모델링하여 유한요소법으로 동적 안

* 서울대학교 대학원 항공우주공학과

** 정회원, 서울대학교 항공우주공학과

정성을 수행하였다. 여기서 집중질량의 크기와 위치에 따라 미사일의 안정성이 증가될 수 있다는 결론을 얻었다. K. Higuchi^{3,4}는 우주 구조물을 회전관성과 전단변형을 고려하지 않은 사각자유경계판으로 모델링하여 종동력이 작용할 때의 동적 안정성에 대하여 연구하였다. Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 모달 분석을 통해 임계하중을 계산하였으며, 구조적 감쇠와 Poisson 비의 영향도 고려하여 분석하였다.

지금까지 보와 판에 관한 동적 안정성의 연구는 여러 저자에 의해 수행되었으나 셸에 대한 연구가 없었던 것으로 사료되어 본 연구에서 한쪽 단이 고정된 원통형셸의 동적 안정성에 관한 연구를 수행하고자 한다.

셸에 관련된 연구들을 살펴보면 다음과 같다.

G. W. Warburton⁵은 한쪽 단이 고정된 원통형 셸의 자유 진동문제를 다루었다. Flugge의 셸이론을 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 고유진동수를 구하였다. C. L. Dym⁶은 Sanders의 1차 셸이론을 사용하여 여러 가지 경계조건의 원통형 셸의 고유진동수를 구하여, 낮은 모드의 진동수는 두께비에 대해 상당히 민감하게 변함을 보였다. H. Chung⁷은 원통형 셸의 고유진동수를 구하는 일반적인 계산 방법을 제시하였고, 특히 경계조건에 대한 고유진동수의 변화에 대해 자세히 연구하였다. W. Soedel⁸은 Euler-Bernoulli 보 이론과 유사한 가정을 사용하는 Love이론을 확장하여 전단변형과 회전관성을 고려한 셸의 운동방정식을 제안하였다. H. Stolarski⁹는 곡선 요소에서의 면내 과잉강성현상(membrane locking)을 확인하고 해석하였다. 이 현상은 면내방향 변위장이 충분히 높은 차수가 아닌 경우에는 순수 굽힘 변형이라도 항상 면내방향 인장을 발생시켜 요소강성을 크게 하는 현상임을 밝히고, 감소적분(reduced integration)을 사용함으로써 제거할 수 있음을 보였다.

본 연구에서는 Soedel이 제안한 Timoshenko-Mindlin type의 전단변형과 회전 관성을 고려한 셸이론을 사용하여 한쪽 단이 고정된 원통형셸의 동적 안정성을 해석하고자 한다. 유한요소법을 이용하여 두께비에 따른 동적안정특성 변화를 살펴 보았다.

2. 이론

Fig. 1은 끝단에 크기가 일정한 종동력을 받는 원통형 셸을 보여주고 있다. 여기서 R과 L는 각각 셸의 반경과 길이를 나타내며 h는 셸의 두께이다.

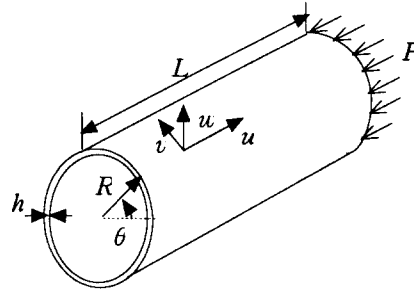


Figure 1. Cylindrical Shell with Follower Force

2.1 종동력을 받는 셸의 에너지식

본 연구에서는 Soedel⁸이 제안한 Timoshenko-Mindlin type의 전단변형과 회전 관성을 고려한 셸이론을 사용하였다. 전단 변형을 허용하는 경우에는 변형 전에 중립면에 수직인 직선이 변형 후에는 더 이상 중립면에 수직이 아니어도 되며, 각 방향의 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z\beta_x(x, \theta) \\ v(x, \theta, z) &= (1 + \frac{z}{R})v_0(x, \theta) + z\beta_\theta(x, \theta) \\ w(x, \theta, z) &= w(x, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

u_0, v_0 는 중립면에서의 면내방향(축방향, 원주 방향)변위를 의미하며, β_x, β_θ 는 중립면과 수직인 선요소의 $x-z$ 평면과 $y-z$ 평면상에서의 회전을 나타낸다.

변위-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + z \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \\ \epsilon_{zz} &= 0 \\ \epsilon_{x\theta} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z \left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} \right) \\ \epsilon_{xz} &= \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \epsilon_{\theta z} &= \beta_\theta - \frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}\end{aligned}$$

이러한 변위장에 따라 회전관성을 고려한 운동 에너지와 전단 변형을 고려한 변형에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \rho h (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}^2) + \frac{\rho h^3}{12} (\dot{\beta}_x^2 + (\dot{\beta}_\theta + \frac{\dot{v}_0}{R})^2) \right\} dx dy \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{vol} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (4)$$

중동력의 축방향 성분에 의한 일은 다음과 같이 표현된다.

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 R d\theta dx \quad (5)$$

끝단에 작용하는 중동력에서 축에 수직인 성분에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} P \frac{\partial w}{\partial x} \bar{\delta}(x-a) \delta w R d\theta dx \quad (6)$$

여기서 $\bar{\delta}(x-a)$ 는 Dirac-Delta 함수이다.

2.2 유한요소 정식화

앞절에서 구한 에너지식에 대한 Hamilton 원리는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_c) dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0\end{aligned} \quad (7)$$

동적안정성해석을 위해 9절점 Lagrange요소를 사용하였으며, 각 절점에서의 자유도는 $[U] = [u_0 \ v_0 \ w \ \beta_x \ \beta_\theta]^T$ 으로 다섯 개가 된다. Hamilton 원리에 의해 구한 운동방정식에 대입하면

$$[M][\dot{U}] + [K_e - PK_g][U] = 0 \quad (8)$$

여기서 $[U]$ 는 $n \times 1$ 행렬로 전체 쉘의 자유도 벡터이고, $[M]$ 은 질량행렬, $[K_e]$ 는 변형 에너지에 의한 강성행렬, $[K_g]$ 는 중동력에 의한 강성행렬이며 모두 $n \times n$ 행렬이다. $[M], [K_e]$ 는 대칭행렬인데 반해 $[K_g]$ 는 비보존력에 의한 비대칭행렬이다.

강성행렬 $[K_e]$ 를 계산하는데 있어서 1차 전단 변형이론을 사용하는 경우, 곡률이 있는 요소를 사용할 경우, 두 종류의 과잉강성현상- shear locking, membrane locking -이 나타나게 되는데, 감소 적분 (reduced integration)을 사용하여 과잉강성효과를 제거하였다. 즉 면내방향 변형과 횡방향 전단변형에 관련된 항들은 2×2 가우스 적분 (Gauss integration)으로 굽힘 변형과 관련된 항은 3×3 적분을 사용하여 계산하였다.

3. 결과 및 검토

3.1 코드의 타당성 및 수렴성 검토

본 연구에 사용한 코드의 타당성 검토를 위해 여러 경계조건의 원통형 쉘의 고유진동수를 구해 참고문헌^{5,7}과 비교하였다. 참고문헌에서는 전단변형과 회전관성을 고려하지 않는 모델을 사용했으므로 두께가 얇은 원통형쉘을 모델로 하여 비교하였다.

경계조건을 표시할 때, C는 고정단 F는 자유단을 의미하며, n은 원주방향의 모드수이고 m은 축방향의 모드수이다.

Table 1. Natural Frequencies of Cylindrical Shells with Various Boundary Conditions

B.C	n	m	L/R	R/h		(Axial)×(Circumferential)			Flügge [Ref.5]	Sanders [ref.7]	Donnell [ref.7]
						4×4	6×8	8×12			
C-F	2	1	1.14	20	0.3	0.3143	0.3129	0.3084	0.3082	0.3081	-
F-F	1	1	5.00	20	0.3	0.3603	0.3590	0.3588	-	0.3585	0.3590
C-C	2	1	10.00	20	0.3	0.0724	0.0559	0.0580	-	0.05784	0.06757

결과를 보면 8×12의 요소분할로 참고문헌의 결과와 1%이내의 오차를 나타내어 충분한 수렴성을 얻었다고 판단되며 사용한 코드의 타당성을 입증할 수 있었다.

3.2 보형태의 원통형 쉘의 해석

세장비(L/R)가 큰 원통형 쉘을 해석하여, 같은 크기의 원형단면 보를 Timoshenko 보이론을 써서 해석한 결과와 비교해 보고자 한다.

보의 경우는 중동력을 끝단에 집중하중형태로 가하고, 원통형 쉘의 경우는 끝단에 분포하중 형태로 나누어 가하여, 결과적으로 같은 크기의 하중이 가해지도록 하였다. 그리고 결과를 비교하기 좋도록 무차원화된 진동수 (ω/ω_0)를 사용하였다.

Figure 2. Figure 3. 은 각각 세장비가 20이고 Poisson비가 0.3인 원형단면 보와 두께비(h/R)가 1/3 인 보형태의 원통형 쉘의 고유치 곡선을 보여주고 있다.

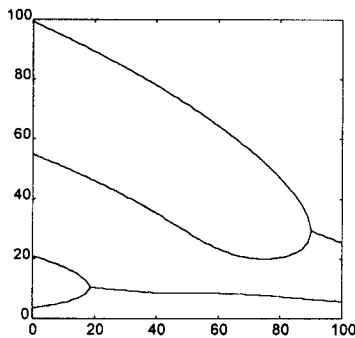


Figure 2. Frequency Curves of Circular Beam

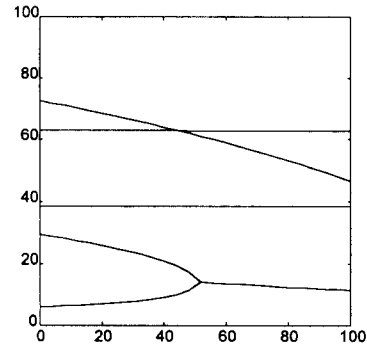


Figure 3. Frequency Curves of Cylindrical Shell

먼저 하중이 작용하고 있지 않는 경우의 고유진동수를 비교해보면 다음과 같다.

Table 2. Natural Frequency of Beam and Shell

	Bending Mode Number		
	1	2	3
Circular Beam	3.49	20.88	54.82
Cylindrical Shell	6.06	29.39	72.76

원통형 쉘이 원형단면 보에 비해 강성이 큰 부재임을 알 수 있다. 이런 경향은 높은 모드로 갈수록 더 큰 차이를 보이고 있다.

위의 고유치 곡선을 살펴보면, 보의 경우 첫 번째, 두 번째 모드가 서로 만나서 첫 번째 동적불안정성을 나타내고 있고, 그리고 세 번째, 네 번째 모드가 만나서 두 번째 동적불안정성을 보이고 있다. 임계하중은 각각 $P_{cr1} = 18.4$, $P_{cr2} = 90.0$ 이

고 모두 강한 동적불안정성을 보이고 있다. 반면 쉘의 경우 첫 번째, 두 번째 모드가 만나서 동적불안정성이 나타나는 임계하중이 $P_{cr1} = 51.1$ 로써 상당히 큰 하중까지 견딜 수 있음을 알 수 있다.

Table 3. 은 요소 수에 따른 쉘의 임계하중의 수렴성을 보여주고 있다.

Table 3. Critical Loads vs. Number of Element
($L/R = 20$, $h/R = 1/3$)

		CIRCUMFERENTIAL		
		4	8	12
A X I A L	4	50.8	51.9	52.0
	6	50.1	51.1	51.2
	8	49.8	50.9	51.1
	12	49.7	50.9	51.1

8×12 의 요소분할로 충분한 수렴성을 얻었다고 볼 수 있다.

3.3 두께비의 영향

참고문헌⁶에 의하면 원통형 쉘의 낮은 모드의 진동수는 두께비에 상당히 민감하게 변한다고 알려져 있고, 가장 중요한 동적 불안정성은 낮은 모드에서 발생하므로 두께비에 따른 임계하중값을 구해보았다.

Figure 4.는 두께비에 따른 1차 2차 3차 굽힘모드의 고유진동수를 보이고 있고, Figure 5.는 임계하중을 나타낸 것으로, 두께비(h/R)가 1/20, 1/10, 1/7, 1/5, 1/4, 1/3 인 경우에 대하여 구한 것이다.

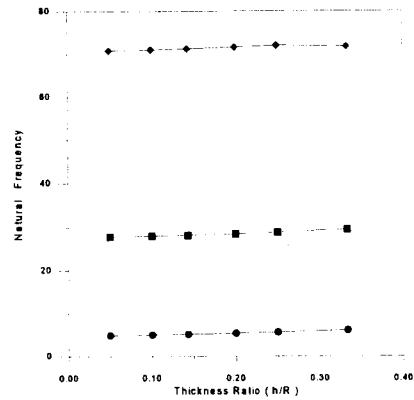


Figure 4. Natural Frequency vs. Thickness Ratio

두께가 두꺼울수록 고유진동수가 증가하는 경향을 보이고 있다. 두께비가 1/3 일때의 고유진동수가 1/20 일때에 비해 1차모드는 25%, 2차모드는 6%, 3차모드는 3% 증가하였다. 낮은 모드일수록 두께비에 민감한 반응을 나타내고 있음을 알 수 있다.

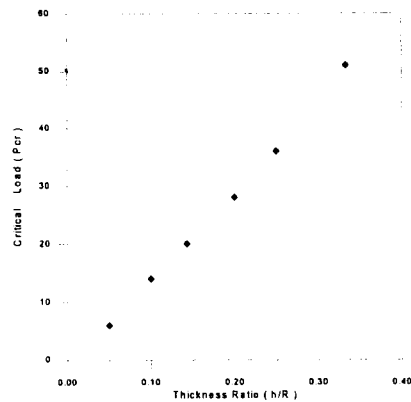


Figure 5. Critical Load vs. Thickness Ratio

두께가 얇을수록 작은 크기의 종동력에 의해서도 동적불안정성이 생기기 시작하는 것을 알 수 있다. 두께에 따른 진동수의 미묘한 변화가 임계하중에 대해서는 상당히 큰 차이를 만들어 내고 있다.

4. 결론

일반적으로 세장비가 큰 원통형 셸을 해석할 때, 보로 가정하고 해석하는 경우가 많이 있다. 이렇게, 보로 가정하고 해석할 경우 시간이나 비용이 비교도 되지 않을 정도로 절약되지만 결과를 그대로 받아들이는 데는 문제가 있는 것으로 생각된다. 원통형 셸의 경우 두께에 대해 상당히 민감하게 반응하므로 상당한 주의가 필요한 것으로 생각된다. 본 연구에서는 원통형 셸의 동적안정성 문제를 유한요소법을 사용하여 해결해 보았다. 결과적으로 두께비가 1/7 미만인 경우는 보의 임계하중보다 작은 하중에서 동적 불안정성을 보이기 시작하므로 두께가 얇은 셸의 경우 보 해석의 결과를 사용할 경우 문제가 발생하고, 1/7 이상인 경우는 정확한 임계하중값을 알 수 있다면 더 나은 설계를 하는데 많은 도움이 될 것으로 생각된다.

5. 참고 문헌

1. T. R. Beal, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts", AIAA Journal, Vol. 3, No. 3, 486~494, 1965
2. Y. P. Park, "Dynamic Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force", J. of Sound and Vibration, Vol. 113, No. 3, 407~415, 1987
3. K. Higuchi, E. H. Dowell, "Dynamic Stability of a Rectangular Plates with Four Free Edges Subjected to a Follower Force", AIAA Journal, Vol. 28, No. 7, 1300~1305, 1990
4. K. Higuchi, E. H. Dowell, "Effects of the Poisson Ratio and Negative Thrust of the Dynamic Stability of a Free Plates Subjected to a Follower Force", J. of Sound and Vibration, Vol. 129, No. 2, 255~269, 1989
5. G. B. Warburton, "Natural Frequency of Thin Cantilever Cylindrical Shells", J. of Sound and Vibration, Vol. 11, No. 3, 335~338, 1970
6. C. L. Dym, "Some New Results for the Vibrations of Circular Cylinders", J. of Sound

- and Vibration, Vol. 29, No. 2, 189~205, 1973
7. H. Chung, "Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells", J. of Sound and Vibration, Vol. 74, No. 3, 331~350, 1981
8. W. Soedel, "On the Vibration of Shells with Timoshenko-Mindlin type Shear Deflections and Rotatory Inertia", J. of Sound and Vibration, Vol. 83, No. 1, 67~79, 1982
9. H. Stolarski, T. Belytschko, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Element", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 41, No. 3, 279~296, 1983